



الرياضيات العامة





تطبيق
التعلُّم التفاعُلى

الصف الثانى الثانوى
القسم الأدبى
الفصل الدراسى الثانى



إعداد نخبة من خبراء التعليم

محتويات الكتاب

أولًا : الجبر

الوحدة 1 المتتابعات والمتسلسلات



الدرس الأول المتتابعات والمتسلسلات. ٨
الدرس الثانى المتتابعة الحسابية. ٢٤
الدرس الثالث المتسلسلات الحسابية. ٤٣
الدرس الرابع المتتابعة الهندسية. ٥٨
الدرس الخامس المتسلسلات الهندسية. ٧٦

الوحدة 2 التباديل والتوافيق



الدرس الأول مبدأ العد - التباديل. ٩٤
الدرس الثانى التوافيق. ١١٤

ثانيًا : التفاضل والتكامل والاحتمال

الوحدة 3 التفاضل والتكامل



الدرس الأول معدل التغير. ١٣١
الدرس الثانى الاشتقاق. ١٤٢
الدرس الثالث قواعد الاشتقاق. ١٤٩
الدرس الرابع مشتقة دالة الدالة (قاعدة السلسلة). ١٥٩
الدرس الخامس تطبيقات على المشتقة. ١٦٧
الدرس السادس التكامل. ١٨١

الوحدة 4 الاحتمال



الدرس الأول بعض المصطلحات والمفاهيم الأساسية -الأحداث - العمليات على الأحداث. ١٩٥
الدرس الثانى مسلمات وقوانين الاحتمال - حساب الاحتمال. ٢١٣



حل امتحان تفاعلى إلكترونى
على كل درس باستخدام تقنية :



QR Code



قم بتحميل أحد تطبيقات
QR code reader
على هاتفك الذكى من
App Store أو Google play



افتح التطبيق وامسح
QR code
باستخدام الكاميرا الخاصة بالهاتف
وابدأ حل الامتحان مباشرة

◄ بعد الانتهاء من الامتحان يمكنك معرفة نتيجتك لتقييم نفسك مع عرض تقرير مفصل بالإجابات الصحيحة.



أولًا

الجبــــر

الوحدة 1 المتتابعات والمتسلسلات.

الوحدة 2 التباديل والتوافيق.



الوحدة الأولى

المتتابعات والمتسلسلات

الدرس 1 المتتابعات والمتسلسلات.

الدرس 2 المتتابعة الحسابية.

الدرس 3 المتسلسلات الحسابية.

الدرس 4 المتتابعة الهندسية.

الدرس 5 المتسلسلات الهندسية.

الدرس

1

المتتابعات والمتسلسلات

* المتتابعة الحقيقية غير المنتهية هى دالة مجالها = ص$^+$ ومجالها المقابل = ح وبالتالى يكون بيان المتتابعة هو مجموعة الأزواج المرتبة (س ، ص) حيث س ∈ ص$^+$ ، ص ∈ ح وعلى ذلك يمكن كتابة بيان المتتابعة على الصورة :

د = {(١ ، د (١)) ، (٢ ، د (٢)) ، (٣ ، د (٣)) ، ..... ، (ن ، د (ن)) ، .....}

* وحيث إن المساقط الأولى للأزواج المرتبة المحددة لبيان المتتابعة هى عناصر ص$^+$ وهى معروفة لدينا فإنه يمكن الاستغناء عن كتابتها فى بيان المتتابعة والاكتفاء بكتابة المساقط الثانية داخل قوسين من النوع ( ) تمييزًا لها عن قوسى المجموعة { }

* وعلى ذلك يمكن التعبير عن المتتابعة كما يأتى :

(د (١) ، د (٢) ، د (٣) ، ..... ، د (ن) ، .....) والقيم د (١) ، د (٢) ، د (٣) ، ..... تسمى حدود المتتابعة حيث د (١) هو الحد الأول للمتتابعة ويرمز له بالرمز $ح_١$ ، د (٢) هو الحد الثانى للمتتابعة ويرمز له بالرمز $ح_٢$ ، د (ن) هو الحد النونى للمتتابعة ويرمز له بالرمز $ح_ن$ وهكذا ..... وبذلك يمكن التعبير عن المتتابعة بصورة أخرى كما يأتى : $(ح_ن) = (ح_١ ، ح_٢ ، ح_٣ ، ..... ، ح_ن ، .....)$

* وإذا كان مجال الدالة يتكون من أول (ن) من الأعداد الصحيحة الموجبة فإن المتتابعة تكون منتهية.

فمثلًا : إذا كانت الدالة د : ص$^+$ ⟵ ح حيث د (س) = ٢ س + ٣ فإن : د (١) = ٢ (١) + ٣ = ٥

، د (٢) = ٢ (٢) + ٣ = ٧ ، د (٣) = ٢ (٣) + ٣ = ٩ ، د (٤) = ٢ (٤) + ٣ = ١١ ، .....

فإن : (د (١) ، د (٢) ، د (٣) ، د (٤) ، .....)

أى (٥ ، ٧ ، ٩ ، ١١ ، .....) تسمى متتابعة ويكون : $ح_١$ = ٥ ، $ح_٢$ = ٧ ، $ح_٣$ = ٩

، $ح_٤$ = ١١ وهكذا وبصفة عامة يكون : د (ن) = ٢ ن + ٣ حيث ن ∈ ص$^+$ ويرمز لذلك بالرمز $ح_ن$ (الحد النونى) حيث $ح_ن$ = ٢ ن + ٣ والذى من خلاله يمكن إيجاد قيمة أى حد إذا علمت رتبته ن

ملاحظـــات

١ لاحظ الفرق بين $(ح_ن)$ ، $ح_ن$ حيث $(ح_ن)$ ترمز للمتتابعة بينما $ح_ن$ ترمز للحد النونى للمتتابعة.

٢ حدود المتتابعة هى صور عناصر مجال المتتابعة.

٣ لاحظ الفرق بين المتتابعة والمجموعة حيث إن :

* المتتابعة تخضع لترتيب عناصرها بينما المجموعة لا تخضع لترتيب عناصرها.
* المتتابعة قد تتكرر عناصرها بينما المجموعة لا يمكن أن تتكرر عناصرها.

مثال ١

اكتب الحدود الستة الأولى لكل من المتتابعات الآتية :

١ متتابعة الأعداد الزوجية الأكبر من ٤

٢ متتابعة الأعداد المحصورة بين ١ ، ٥٠ والتى كل منها يقبل القسمة على ٣

٣ المتتابعة $(ح_ن)$ حيث $ح_ن = ن^٢ + ١$

الحـــل

١ الحدود الستة الأولى هى : ٦ ، ٨ ، ١٠ ، ١٢ ، ١٤ ، ١٦

٢ الحدود الستة الأولى هى : ٣ ، ٦ ، ٩ ، ١٢ ، ١٥ ، ١٨

٣ $\because ح_ن = ن^٢ + ١$

$\therefore ح_١ = (١)^٢ + ١ = ٢$ ، $ح_٢ = (٢)^٢ + ١ = ٥$ ، $ح_٣ = (٣)^٢ + ١ = ١٠$

، $ح_٤ = (٤)^٢ + ١ = ١٧$ ، $ح_٥ = (٥)^٢ + ١ = ٢٦$ ، $ح_٦ = (٦)^٢ + ١ = ٣٧$

$\therefore$ الحدود الستة الأولى هى : ٢ ، ٥ ، ١٠ ، ١٧ ، ٢٦ ، ٣٧

المتتابعة المنتهية والمتتابعة غير المنتهية

تعريـــف

* **المتتابعة المنتهية هى** : متتابعة عدد حدودها منته أى لها عدد محدود من العناصر.
* **المتتابعة غير المنتهية هى** : متتابعة عدد حدودها غير منته أى لها عدد لا نهائى من العناصر.

مثال ٢

بين أى المتتابعات الآتية منتهية وأيها غير منتهية :

١ (٢ ، ٥ ، ٨ ، ١١ ، .... ، ٣٢)

٢ $(\frac{١}{٢}$ ، ١ ، ٢ ، ٤ ، ....)

٣ $(ح_ن)$ حيث $ح_ن = ٢ن - ٣$ ، $ن \in ص^+$

٤ $(ح_ن)$ حيث $ح_ن = \frac{(-١)^ن}{٢ن}$ ، $ن \in \{١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ ، ٥\}$

الحـــل

١ متتابعة منتهية.　　٢ متتابعة غير منتهية.

٣ ∵ $ن \in ص^+$ ∴ عدد الحدود غير منته. ∴ المتتابعة غير منتهية.

٤ ∵ $ن \in \{١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ ، ٥\}$ ∴ عدد الحدود = ٥ ∴ المتتابعة منتهية.

الحد العام للمتتابعة

يرمز للحد العام للمتتابعة بالرمز $ح_ن$ ويسمى أحياناً بالحد النونى حيث $ح_ن$ هو صورة العنصر الذى ترتيبه $ن$ فى المتتابعة ويمكن استنتاجه أحياناً من خلال إدراك العلاقة بين قيمة الحد $ح_ن$ ورتبة الحد $ن$

فمثلاً :

- فى المتتابعة (٢ ، ٤ ، ٦ ، ٨ ، ...) ، $ح_١ = ٢ (١)$ ، $ح_٢ = ٢ (٢)$ ، $ح_٣ = ٢ (٣)$ ، $ح_٤ = ٢ (٤)$

ومن ذلك يمكن استنتاج أن : الحد العام للمتتابعة هو : $ح_ن = ٢ ن$

- فى المتتابعة (١ ، ٥ ، ٩ ، ١٣ ، ...) ، $ح_١ = ٤ (١) - ٣$ ، $ح_٢ = ٤ (٢) - ٣$

، $ح_٣ = ٤ (٣) - ٣$ ، $ح_٤ = ٤ (٤) - ٣$ ومن ذلك يمكن استنتاج أن : الحد العام للمتتابعة هو : $ح_ن = ٤ ن - ٣$

- المتتابعة $(\frac{-١}{٣} ، \frac{١}{٤} ، \frac{-١}{٥} ، \frac{١}{٦} ، ...)$ يمكن استنتاج أن : حدها العام هو : $ح_ن = \frac{(-١)^ن}{ن + ٢}$

مع ملاحظة أن : بعض المتتابعات ليست لها قاعدة معروفة حتى الآن وبالتالى ليس معروف حدها العام مثل متتابعة الأعداد الأولية (٢ ، ٣ ، ٥ ، ٧ ، ...)

مثال ٣

اكتشف النمط ثم اكتب الحد التالى :

١ ٣٥ ، ٣٧ ، ٣٩ ، ٤١ ، ...　　٢ ٢ ، ٤ ، ٨ ، ١٦ ، ...

٣ ١ ، $\frac{١}{٢}$ ، $\frac{١}{٤}$ ، $\frac{١}{٨}$ ، ...　　٤ ٥ ، -١٠ ، ٢٠ ، -٤٠ ، ...

الحـــل

١ ∵ $ح_١ = ٣٣ + ٢ (١)$ ، $ح_٢ = ٣٣ + ٢ (٢)$ ، $ح_٣ = ٣٣ + ٢ (٣)$ ، $ح_٤ = ٣٣ + ٢ (٤)$

∴ النمط يتبع الحد العام للمتتابعة $(ح_ن)$ حيث $ح_ن = ٣٣ + ٢ ن$ ، الحد التالى هو $ح_٥ = ٣٣ + ٢ (٥) = ٤٣$

٢ ∵ $ح_١ = ٢^١$ ، $ح_٢ = ٢^٢$ ، $ح_٣ = ٢^٣$ ، $ح_٤ = ٢^٤$

∴ النمط يتبع الحد العام للمتتابعة $(ح_ن)$ حيث $ح_ن = ٢^ن$ ، الحد التالى هو $ح_٥ = ٢^٥ = ٣٢$

٣ ∵ $ح_١ = \left(\frac{١}{٢}\right)^{٠}$ ، $ح_٢ = \left(\frac{١}{٢}\right)^{١}$ ، $ح_٣ = \left(\frac{١}{٢}\right)^{٢}$ ، $ح_٤ = \left(\frac{١}{٢}\right)^{٣}$

∴ النمط يتبع الحد العام للمتتابعة $(ح_ن)$ حيث $ح_ن = \left(\frac{١}{٢}\right)^{ن - ١}$ ، الحد التالى هو $ح_٥ = \left(\frac{١}{٢}\right)^{٥ - ١} = \frac{١}{١٦}$

٤ ∵ $ح_١ = ٥ (-٢)^{٠}$ ، $ح_٢ = ٥ (-٢)^{١}$ ، $ح_٣ = ٥ (-٢)^{٢}$ ، $ح_٤ = ٥ (-٢)^{٣}$

∴ النمط يتبع الحد العام للمتتابعة $(ح_ن)$ حيث $ح_ن = ٥ (-٢)^{ن - ١}$

، الحد التالى هو $ح_٥ = ٥ (-٢)^{٥ - ١} = ٨٠$

مثال ٤

اكتب الحدود الخمسة الأولى من المتتابعة $(ح_ن)$ حيث :

١ $ح_١ = ٥$ ، $ح_{ن + ١} = ٣ ح_ن$ حيث $ن \geq ١$

٢ $ح_{ن + ٢} = ح_{ن + ١} + ح_ن$ ، $ن \geq ١$ ، $ح_١ = ٣$ ، $ح_٢ = ٧$

٣ $ح_ن = \frac{(-١)^{ن - ١}}{٢ ن + ٣}$

الحل

١ ∵ $ح_{ن + ١} = ٣ ح_ن$

بوضع ن = ١ ∴ $ح_٢ = ٣ ح_١$ ∴ $ح_٢ = ٣ (٥) = ١٥$

بوضع ن = ٢ ∴ $ح_٣ = ٣ ح_٢$ ∴ $ح_٣ = ٣ (١٥) = ٤٥$

بوضع ن = ٣ ∴ $ح_٤ = ٣ ح_٣$ ∴ $ح_٤ = ٣ (٤٥) = ١٣٥$

بوضع ن = ٤ ∴ $ح_٥ = ٣ ح_٤$ ∴ $ح_٥ = ٣ (١٣٥) = ٤٠٥$

∴ الخمسة حدود الأولى من المتتابعة هى : ٥ ، ١٥ ، ٤٥ ، ١٣٥ ، ٤٠٥

٢ ∵ $ح_{ن + ٢} = ح_{ن + ١} + ح_ن$

∴ بوضع ن = ١ ∴ $ح_٣ = ح_٢ + ح_١ = ٧ + ٣ = ١٠$

، بوضع ن = ٢ ∴ $ح_٤ = ح_٣ + ح_٢ = ١٠ + ٧ = ١٧$

، بوضع ن = ٣ ∴ $ح_٥ = ح_٤ + ح_٣ = ١٧ + ١٠ = ٢٧$

∴ الخمسة حدود الأولى من المتتابعة هى : ٣ ، ٧ ، ١٠ ، ١٧ ، ٢٧

ملاحظة

فى المثال السابق : العلاقة $ح_{ن + ٢} = ح_{ن + ١} + ح_ن$ هى علاقة بين حدود المتتابعة وتعنى أن كل حد يساوى مجموع الحدين السابقين له مباشرة.

٣ ∵ $ح_ن = \frac{(-1)^{ن-1}}{2ن+3}$

∴ بوضع ن = ١ ∴ $ح_1 = \frac{(-1)^{1-1}}{2(1)+3} = \frac{1}{5}$

، بوضع ن = ٢ ∴ $ح_2 = \frac{(-1)^{2-1}}{2(2)+3} = \frac{-1}{7}$

، بوضع ن = ٣ ∴ $ح_3 = \frac{(-1)^{3-1}}{2(3)+3} = \frac{1}{9}$

، بوضع ن = ٤ ∴ $ح_4 = \frac{(-1)^{4-1}}{2(4)+3} = \frac{-1}{11}$

، بوضع ن = ٥ ∴ $ح_5 = \frac{(-1)^{5-1}}{2(5)+3} = \frac{1}{13}$

∴ الخمسة حدود الأولى من المتتابعة هى : $\frac{1}{5}$ ، $\frac{-1}{7}$ ، $\frac{1}{9}$ ، $\frac{-1}{11}$ ، $\frac{1}{13}$

معلومة إثرائية

إذا اختلفت إشارة كل حد فى المتتابعة عن إشارة الحد التالى له مباشرة فإن المتتابعة تسمى بالمتتابعة التذبذبية.

ففى المثال السابق : المتتابعة $\left(\frac{1}{5} ، \frac{-1}{7} ، \frac{1}{9} ، \frac{-1}{11} ، \frac{1}{13}\right)$ تسمى متتابعة تذبذبية.

مثال ٥

أوجد الحد العام للمتتابعة (٩ ، ١٣ ، ١٧ ، ٢١ ، ...) ثم أوجد :

١ $ح_7$ ، $ح_{10}$ فى المتتابعة.

٢ رتبة الحد الذى قيمته ٦٥ فى المتتابعة.

الحـــل

∵ $ح_1 = 9 + 4(0)$ ، $ح_2 = 9 + 4(1)$ ، $ح_3 = 9 + 4(2)$ ، $ح_4 = 9 + 4(3)$

∴ الحد العام : $ح_ن = 9 + 4(ن - 1)$

١ $ح_7 = 9 + 4(7 - 1) = 9 + 24 = 33$ ، $ح_{10} = 9 + 4(10 - 1) = 9 + 36 = 45$

٢ بفرض $ح_ن = 65$ ∴ $9 + 4(ن - 1) = 65$

∴ $4(ن - 1) = 56$ ∴ $ن - 1 = 14$

∴ ن = ١٥ ∴ $ح_{15} = 65$

مثال ٦

أوجد الحد العام للمتتابعة (٣ ، ٦ ، ١٢ ، ٢٤ ، ...) ثم أوجد :

١ $ح_٦$ ، $ح_{١١}$ ٢ رتبة الحد الذى قيمته ٣٨٤ فى المتتابعة.

الحل

∵ $ح_١ = ٣ \times ٢^٠$ ، $ح_٢ = ٣ \times ٢^١$ ، $ح_٣ = ٣ \times ٢^٢$ ، $ح_٤ = ٣ \times ٢^٣$

∴ الحد العام : $ح_ن = ٣ \times ٢^{ن-١}$

١ $ح_٦ = ٣ \times ٢^{٦-١} = ٣ \times ٢^٥ = ٩٦$ ، $ح_{١١} = ٣ \times ٢^{١١-١} = ٣ \times ٢^{١٠} = ٣٠٧٢$

٢ بفرض $ح_ن = ٣٨٤$ ∴ $٣ \times ٢^{ن-١} = ٣٨٤$

∴ $٢^{ن-١} = ١٢٨$ ∴ $٢^{ن-١} = ٢^٧$

∴ $ن - ١ = ٧$ ∴ $ن = ٨$ ∴ $ح_٨ = ٣٨٤$

المتسلسلات ورمز التجميع

رمز التجميع Σ

يستخدم رمز التجميع Σ (ويقرأ سيجما) لكى يرمز لمجموع ن حدًا من الحدود المتتالية فى المتتابعة ($ح_١$ ، $ح_٢$ ، $ح_٣$ ، ...... ، $ح_ر$ ، ...... ، $ح_ن$ ، ......) بدءًا من الحد الأول بأن نكتب : $\sum_{ر=١}^{ن} ح_ر$

وتقرأ مجموع $ح_ر$ من ر = ١ إلى ر = ن   **أى أن :** $\sum_{ر=١}^{ن} ح_ر = ح_١ + ح_٢ + ح_٣ + ... + ح_ن$

ملاحظة

ليس من الضرورى أن يبدأ المجموع من الحد الأول أى أنه يمكن استخدام رمز التجميع Σ للتعبير عن مجموع الحدود المتتالية فى المتتابعة بدءًا من حدها الأول أو الثانى أو الثالث أو الحد رقم ك فى المتتابعة إلى الحد رقم ن حيث ك ≤ ن

فمثلًا : $\sum_{ر=ك}^{ن} ح_ر = ح_ك + ح_{ك+١} + ح_{ك+٢} + ... + ح_ن$

مثال ٧

أوجد ناتج كل مما يأتى :

١ $\sum_{ر=١}^{٧} ر$ ٢ $\sum_{ر=٤}^{٧} (٢ر^٢ - ١)$

٣ $\sum_{ر=١}^{٥} \left(\frac{١}{ر+٢} - \frac{١}{ر+١}\right)$ ٤ $\sum_{ر=٢}^{٤} (-١)^{ر+١} ر^٢$

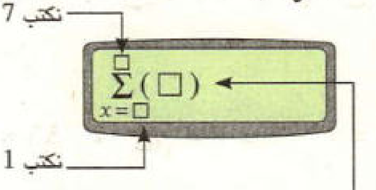
الحـــل

١ بوضع $س = ١ ، ٢ ، ٣ ، ..... ، ٧$ $\therefore \sum_{س=١}^{٧} س = ١ + ٢ + ٣ + ٤ + ٥ + ٦ + ٧ = ٢٨$

ملاحظة

يمكن استخدام الآلة الحاسبة فى إيجاد ناتج $\sum_{س=١}^{٧} س$ كما يلى :

① نضغط SHIFT ثم Log فيظهر لنا





② نضغط (=) فيظهر الناتج $\sum_{x=1}^{7}(x)$ 28

٢ بوضع $س = ٤ ، ٥ ، ٦ ، ٧$

$\therefore \sum_{س=٤}^{٧} (٢ س^٢ - ١) = (٢ (٤)^٢ - ١) + (٢ (٥)^٢ - ١) + (٢ (٦)^٢ - ١) + (٢ (٧)^٢ - ١)$

$= ٣١ + ٤٩ + ٧١ + ٩٧ = ٢٤٨$

٣ بوضع $س = ١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ ، ٥$

$\therefore \sum_{س=١}^{٥} \left(\frac{١}{س + ٢} - \frac{١}{س + ١} \right) = \left(\frac{١}{١ + ٢} - \frac{١}{١ + ١} \right) + \left(\frac{١}{٢ + ٢} - \frac{١}{٢ + ١} \right) + \left(\frac{١}{٣ + ٢} - \frac{١}{٣ + ١} \right)$

$+ \left(\frac{١}{٤ + ٢} - \frac{١}{٤ + ١} \right) + \left(\frac{١}{٥ + ٢} - \frac{١}{٥ + ١} \right)$

$= \left(\frac{-١}{٦} \right) + \left(\frac{-١}{١٢} \right) + \left(\frac{-١}{٢٠} \right) + \left(\frac{-١}{٣٠} \right) + \left(\frac{-١}{٤٢} \right) = - \frac{٥}{١٤}$

٤ بوضع $س = ٢ ، ٣ ، ٤$

$\therefore \sum_{س=٢}^{٤} (-١)^{س+١} س^٢ = (-١)^{٢+١} \times ٢^٢ + (-١)^{٣+١} \times ٣^٢ + (-١)^{٤+١} \times ٤^٢ = -٤ + ٩ - ١٦ = -١١$

المتسلسلات

المتسلسلة هى : عملية جمع لحدود المتتابعة.

أى أنه : لأى متتابعة $(ح_١ ، ح_٢ ، ح_٣ ، ..... ، ح_ن ، .....)$ حيث $ن \in ص^+$

، $ح_ن$ هو الحد الذى ترتيبه $ن$ من المتتابعة.

يكون : $ح_١ + ح_٢ + ح_٣ + ... + ح_ن + ...$ هى المتسلسلة المرتبطة بهذه المتتابعة.

١ المتسلسلة المنتهية

لأى متتابعة منتهية ($ح_١$ ، $ح_٢$ ، $ح_٣$ ، ..... ، $ح_ن$) يكون :

$ح_١ + ح_٢ + ح_٣ + ... + ح_ر + ... + ح_ن = \sum_{ر=١}^{ن} ح_ر$ متسلسلة منتهية.

أى أن : مجموع كل حدود المتتابعة المنتهية يسمى متسلسلة منتهية.
والقيمة العددية للمتسلسلة هى مجموع حدود المتتابعة المناظرة.

مثال ٨

اكتب مفكوك كل من المتسلسلتين الآتيتين ، وأوجد مجموع حدود المتتابعة المناظرة :

١ $\sum_{ر=١}^{٥} (١ + ر)$ ٢ $\sum_{ر=١}^{٦} (ر^٢ + ٢)$

الحـل

١ بوضع ر = ١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ ، ٥

$\therefore \sum_{ر=١}^{٥} (١ + ر) = (١ + ١) + (١ + ٢) + (١ + ٣) + (١ + ٤) + (١ + ٥) = ٢ + ٣ + ٤ + ٥ + ٦ = ٢٠$

∴ مجموع حدود المتتابعة : (٢ ، ٣ ، ٤ ، ٥ ، ٦) = ٢٠

٢ بوضع ر = ١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ ، ٥ ، ٦

$\therefore \sum_{ر=١}^{٦} (ر^٢ + ٢) = (١^٢ + ٢) + (٢^٢ + ٢) + (٣^٢ + ٢) + (٤^٢ + ٢) + (٥^٢ + ٢) + (٦^٢ + ٢)$

$= ٣ + ٦ + ١١ + ١٨ + ٢٧ + ٣٨ = ١٠٣$

∴ مجموع حدود المتتابعة : (٣ ، ٦ ، ١١ ، ١٨ ، ٢٧ ، ٣٨) = ١٠٣

٢ المتسلسلة غير المنتهية

وهى المتسلسلة التى بها عدد لا نهائى من الحدود ويرمز لها بالرمز $\sum_{ر=١}^{\infty} ح_ر$

فمثلًا : المتسلسلة : ٢ + ٤ + ٦ + ٨ + ١٠ + ... غير منتهية.

والمتتابعة المناظرة لها : (٢ ، ٤ ، ٦ ، ٨ ، ١٠ ، .....) حدها العام هو $ح_ر = ٢ ر$

ولذلك فإن : $٢ + ٤ + ٦ + ٨ + ١٠ + ... = \sum_{ر=١}^{\infty} ٢ ر$

مثال ٩

اكتب مفكوك كل من المتسلسلتين الآتيتين :

١ $\sum_{ر=١}^{\infty} ((\frac{١}{٣})^{ر} - ١)$ ٢ $\sum_{ر=١}^{\infty} (\frac{١}{ر+١} - \frac{١}{ر})$

الحل

١ $\sum_{ر=١}^{\infty} ((\frac{١}{٣})^{ر} - ١) = ((\frac{١}{٣})^{١} - ١) + ((\frac{١}{٣})^{٢} - ١) + ((\frac{١}{٣})^{٣} - ١) + ((\frac{١}{٣})^{٤} - ١) + ...$

$= \frac{-٢}{٣} + \frac{-٨}{٩} + \frac{-٢٦}{٢٧} + \frac{-٨٠}{٨١} + ... = -\frac{٢}{٣} - \frac{٨}{٩} - \frac{٢٦}{٢٧} - \frac{٨٠}{٨١} - .....$

٢ $\sum_{ر=١}^{\infty} (\frac{١}{ر+١} - \frac{١}{ر}) = (\frac{١}{١+١} - \frac{١}{١}) + (\frac{١}{٢+١} - \frac{١}{٢}) + (\frac{١}{٣+١} - \frac{١}{٣}) + (\frac{١}{٤+١} - \frac{١}{٤}) + ...$

$= \frac{-١}{٢} + \frac{-١}{٦} + \frac{-١}{١٢} + \frac{-١}{٢٠} + ... = -\frac{١}{٢} - \frac{١}{٦} - \frac{١}{١٢} - \frac{١}{٢٠} - .....$

مثال ١٠

استخدم رمز التجميع $\sum$ فى كتابة كل من المتسلسلتين الآتيتين :

١ $١ \times ٢ + ٢ \times ٣ + ٣ \times ٤ + ٤ \times ٥ + ...$

٢ $٣ + ١ + \frac{١}{٣} + \frac{١}{٩} + ...$

الحل

١ ∵ الحد العام للمتتابعة : $(١ \times ٢ ، ٢ \times ٣ ، ٣ \times ٤ ، ٤ \times ٥ ، .....)$

هو $ح_{ر} = ر (ر + ١)$

∴ $١ \times ٢ + ٢ \times ٣ + ٣ \times ٤ + ٤ \times ٥ + ... = \sum_{ر=١}^{\infty} ر (ر + ١)$

٢ ∵ الحد العام للمتتابعة : $(٣ ، ١ ، \frac{١}{٣} ، \frac{١}{٩} ، .....)$ هو $ح_{ر} = ٣^{٢ - ر}$

∴ $٣ + ١ + \frac{١}{٣} + \frac{١}{٩} + ... = \sum_{ر=١}^{\infty} ٣^{٢ - ر}$

تمـارين 1 على المتتابعات والمتسلسلات

اختبر نفسك

من أسئلة الكتاب المدرسى • فهم • تطبيق • مستويات عليا

أولًا أسئلة الاختيار من متعدد

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

① المتتابعة الحقيقية هى دالة مجالها هو ....

(أ) ح (ب) $ح^+$ (جـ) ص (د) $ص^+$

② الحد التالى فى المتتابعة : (١ ، ٢ ، ٤ ، ٧ ، ١١ ، ...) هو ....

(أ) ١٥ (ب) ١٦ (جـ) ١٧ (د) ١٨

③ الحد التالى فى المتتابعة : ($\frac{٣}{١٣}$ ، $\frac{٧}{١٠}$ ، $\frac{١١}{٧}$ ، $\frac{١٥}{٤}$ ، ...) هو ....

(أ) $\frac{١٩}{٢}$ (ب) ١٩ (جـ) $-\frac{٢٣}{٢}$ (د) $\frac{١٦}{٣}$

④ الحد العاشر من حدود المتتابعة : (١ ، ١ ، ٢ ، ٣ ، ٥ ، ٨ ، ١٣ ، ...) هو ....

(أ) ٢٩ (ب) ٣٤ (جـ) ٥٥ (د) ٨٩

⑤ الحد الخالى من س فى المتتابعة : (٨ - ٦ س ، ٧ - ٤ س ، ٦ - ٢ س ، ...) هو ....

(أ) $ح_٧$ (ب) $ح_٦$ (جـ) $ح_٥$ (د) $ح_٤$

⑥ الحد السادس فى المتتابعة ($ح_ن$) حيث $ح_ن = \frac{(-١)^ن}{٢ ن}$ هو ....

(أ) ٦ (ب) $\frac{-١}{١٢}$ (جـ) $\frac{١}{١٢}$ (د) $\frac{١}{٦}$

⑦ الحد الرابع فى المتتابعة ($ح_ن$) حيث $ح_ن = ن^٢ + ٢$ هو ....

(أ) ٤ (ب) ٦ (جـ) ١٦ (د) ١٨

⑧ الحد الخامس فى متتابعة الأعداد الطبيعية التى تقبل القسمة على ٥ هو ....

(أ) ٥ (ب) ٢٥ (جـ) ٢٠ (د) ١٠

⑨ فى المتتابعة ($ح_ن$) حيث $ح_{ن+١} = ن ح_ن$ ، $ن \geq ١$ إذا كان : $ح_١ = ١$

فإن : $ح_٣$ = ...

(أ) ١ (ب) ٢ (جـ) ٤ (د) $\frac{١}{٢}$

⑩ الحد الخامس للمتتابعة ($ح_ن$) حيث $ح_ن = (ن + ١) (ن + ٢)$ يساوى ....

(أ) ٥ × ٦ (ب) ٦ × ٨ (جـ) ٦ × ٧ (د) ٥ × ٧

(١١) الخمسة حدود الأولى من المتتابعة $(ح_ن)$ التى فيها $ح_{ن+١} = \frac{(-١)^ن}{٣ ح_ن}$ ، $ح_١ = ٩$ هى ....

(أ) $(٩ ، \frac{١}{٢٧} ، -٩ ، ٢٧ ، ٩)$ (ب) $(٩ ، \frac{١}{٩} ، -٩ ، \frac{١}{٢٧} ، -٢٧)$

(جـ) $(٩ ، \frac{١}{٢٧} ، \frac{-١}{٨١} ، \frac{١}{٢٤٣} ، \frac{-١}{٧٢٩})$ (د) $(٩ ، -\frac{١}{٢٧} ، -٩ ، \frac{١}{٢٧} ، ٩)$

(١٢) فى المتتابعة $(ح_ن)$ إذا كان : $ح_١ = ٢$ ، $ح_{ن+١} = ح_ن - ن$

فإن الحدود الخمسة الأولى هى ....

(أ) $(١ ، ٢ ، -١ ، -٤ ، -٨)$ (ب) $(٢ ، -١ ، ١ ، ٣ ، -٨)$

(جـ) $(٢ ، ١ ، -١ ، -٤ ، -٨)$ (د) $(٢ ، ١ ، -١ ، -٣ ، -٨)$

(١٣) الخمسة حدود الأولى من المتتابعة التى فيها $ح_١ = ١$ ، $ح_٢ = ٢$ ، $ح_ن = ح_{ن-١} + ح_{ن-٢}$

لكل $ن > ٢$ هى ....

(أ) $(١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ ، ٥)$ (ب) $(١ ، ٢ ، ٤ ، ٨ ، ١٦)$

(جـ) $(١ ، ٢ ، ٣ ، ٥ ، ٨)$ (د) $(١ ، ٢ ، ٣ ، ٦ ، ١٢)$

(١٤) إذا علم أن $(ح_ن)$ متتابعة فيها : $ح_ن = ح_١ + ح_٢ + ح_٣ + ... + ح_{ن-١}$ حيث $ن > ٢$

فإن : $ح_١ + ح_٢ + ح_٣ + ح_٤ + ح_٥ - ح_٦ =$ ....

(أ) صفر (ب) ٣٢ (جـ) ٦٤ (د) ٧٢

(١٥) الحد العام لمتتابعة $(ح_ن)$ هو $ح_ن = ٣$ فإن الخمسة حدود الأولى فيها ....

(أ) $(٣ ، ٤ ، ٥ ، ٦ ، ٧)$ (ب) $(١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ ، ٥)$

(جـ) $(٣ ، ٣ ، ٣ ، ٣ ، ٣)$ (د) $(٤ ، ٥ ، ٦ ، ٧ ، ٨)$

(١٦) الحد النونى للمتتابعة : $(١ ، ٤ ، ٩ ، ١٦ ، ...)$ هو ....

(أ) $٢ ن$ (ب) $٤ ن$ (جـ) $٢^ن$ (د) $ن^٢$

(١٧) الحد النونى للمتتابعة : $(-١ ، ٤ ، -٩ ، ١٦ ، ...)$ هو ....

(أ) $-ن^٢$ (ب) $(-١)^ن ن^٢$ (جـ) $(-ن)^٢$ (د) $-٤ ن$

(١٨) الحد العام للمتتابعة : $(\frac{١}{٢} ، \frac{٢}{٣} ، \frac{٣}{٤} ، \frac{٤}{٥} ، ...)$ هو ....

(أ) $\frac{ن}{٢ ن}$ (ب) $\frac{ن}{ن+١}$ (جـ) $\frac{١}{ن}$ (د) $\frac{ن}{٢ ن - ١}$

(١٩) الحد العام للمتتابعة : $(١ ، \frac{١}{١٠} ، \frac{١}{١٠٠} ، \frac{١}{١٠٠٠} ، ...)$ هو $ح_ن =$ ....

(أ) $ن^{ن-١}$ (ب) $(١٠)^{-ن}$ (جـ) $(\frac{١}{١٠})^{ن-١}$ (د) $(٠,١)^{ن+١}$

(٢٠) الحد النونى للمتتابعة : $\left(2 ، 2 ، \frac{8}{3} ، 4 ، ...\right)$ هو ....

(أ) $ح_ن = ن - 1$ (ب) $ح_ن = 2ن - 1$

(جـ) $ح_ن = 2^{ن-1}$ (د) $ح_ن = \frac{2^ن}{ن}$

(٢١) الحد النونى للمتتابعة : $\left(\frac{1}{2} ، \frac{1}{6} ، \frac{1}{12} ، ...\right)$ هو $ح_ن =$ ....

(أ) $\frac{1}{ن^2 + ن}$ (ب) $\frac{1}{ن} + \frac{1}{ن+1}$ (جـ) $\frac{1}{ن^2 + 2}$ (د) $\frac{1}{ن + 2}$

(٢٢) الحد العام لمتتابعة الأعداد الصحيحة الزوجية الموجبة هو ....

(أ) ٤ ن (ب) ٢ ن (جـ) ٢ ن − ٢ (د) ٤ ن − ٢

(٢٣) قاعدة المتتابعة : ((٢ × ٣) ، (٣ × ٤) ، (٤ × ٥) ، (٥ × ٦) ، ...) هى ....

(أ) (ن − ١) (ن + ١) (ب) ن(ن + ١)

(جـ) ٢ ن(ن + ١) (د) (ن + ١) (ن + ٢)

(٢٤) فى المتتابعة (٢ ، ٥ ، ٨ ، ١١ ، ...) :

أولًا : الحد العام هو $ح_ن =$ ....

(أ) ٢ ن (ب) ٤ ن − ٢ (جـ) ن + ١ (د) ٣ ن − ١

ثانيًا : $ح_{11} =$ ....

(أ) ٢٢ (ب) ٣٢ (جـ) ٣٤ (د) ٢٨

ثالثًا : رتبة الحد الذى قيمته ٥٩ هو ....

(أ) $ح_{10}$ (ب) $ح_{22}$ (جـ) $ح_{18}$ (د) $ح_{20}$

(٢٥) فى المتتابعة (٢ ، ٤ ، ٨ ، ١٦ ، ...) :

أولًا : الحد العام هو = ...

(أ) ٢ ن (ب) ن + ١ (جـ) ٢ (ن + ١) (د) $2^ن$

ثانيًا : رتبة الحد الذى قيمته ١٢٨ هو ....

(أ) $ح_5$ (ب) $ح_7$ (جـ) $ح_8$ (د) $ح_6$

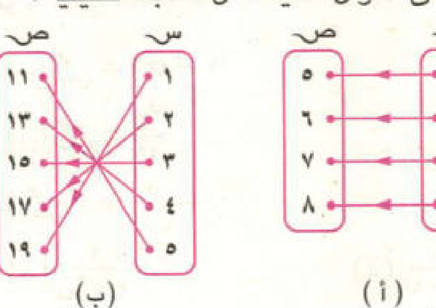
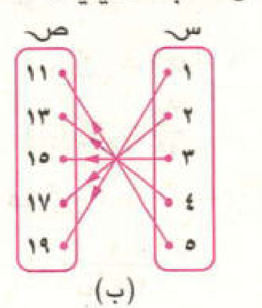
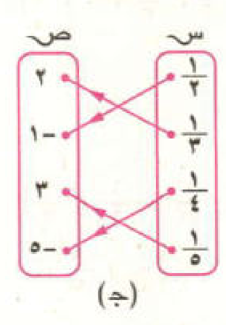
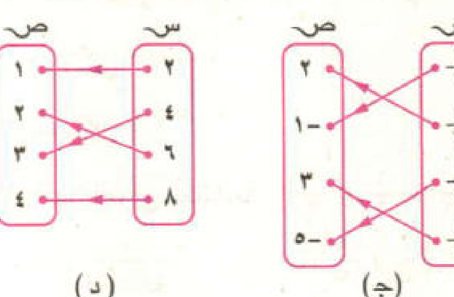
(٢٦) فى المتتابعة $(ح_ن)$ حيث $ح_ن = 3ن^2 - 1$ إذا كان $ح_م = 74$ فإن : م = ...

(أ) ± ٥ (ب) ٥ (جـ) ٤ (د) ٧٤

(٢٧) عدد حدود المتتابعة : (١ ، ٤ ، ٩ ، ١٦ ، ... ، ٦٢٥) هو ....

(أ) ٢٥ (ب) ١٢٥ (جـ) ٦٢٥ (د) ٥٠

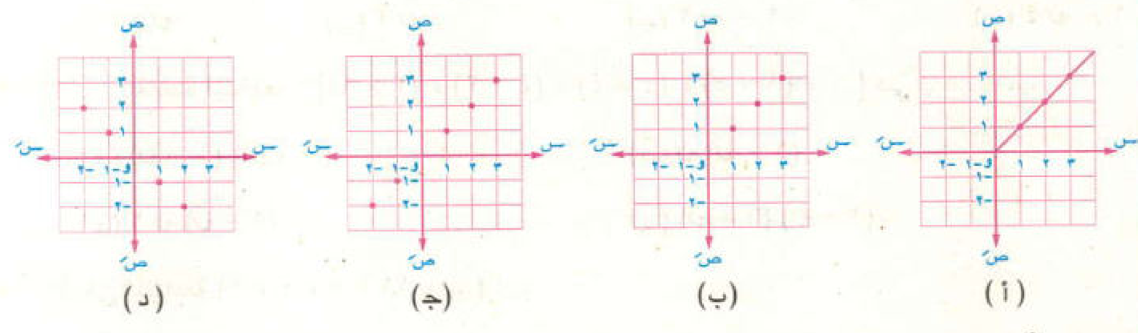
(٢٨) أي الدوال الآتية تمثل متتابعة حقيقية ؟

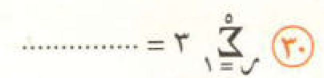
(أ) (ب) (ج) (د)



(٢٩) أي الأشكال الآتية تمثل متتابعة ؟



(أ) (ب) (ج) (د)



(٣٠) $\sum_{ر=1}^{5} 3 =$ ....

(أ) ٣ (ب) ٥ (ج) ١٥ (د) ٢٤٣

(٣١) $\sum_{ر=2}^{5} 3 =$ ....

(أ) ٣ (ب) ٥ (ج) ١٥ (د) ١٢

(٣٢) $\sum_{ر=1}^{4} ر =$ ....

(أ) ٢٠ (ب) ١٠ (ج) ٤ (د) ٦

(٣٣) $\sum_{ر=1}^{10} ر^2 =$ ....

(أ) ١٠ (ب) ٥٥ (ج) ٢٢٠ (د) ٣٨٥

(٣٤) مجموع المتسلسلة $\sum_{ر=1}^{3} 3ر =$ ....

(أ) ١ (ب) ٣ (ج) ٦ (د) ١٨

(٣٥) قيمة المتسلسلة $\sum_{ر=1}^{15} (ر^2 + ر + 1) =$ ....

(أ) ١٣٧٥ (ب) ٣٧٢٠ (ج) ١٤٤٠٠ (د) ٢٢٣٢٠٠٠

(٣٦) قيمة المتسلسلة $\sum_{ن=1}^{10} (-1)^{ن} =$ ....

(أ) صفر (ب) ١ (ج) −١ (د) ١٠

(٣٧) ١ + ٢ + ٣ + ٤ + ٥ + ... + ٢٠ باستخدام رمز التجميع = ...

(أ) $\sum_{ر=١}^{٢٠} ١$ (ب) $\sum_{ر=١}^{٢٠} ر^٢$ (جـ) $\sum_{ر=١}^{٢٠} (ر + ١)$ (د) $\sum_{ر=١}^{٢٠} ر$

(٣٨) ٢ + ٤ + ٦ + ٨ + ... + ٣٠ باستخدام رمز التجميع = ...

(أ) $\sum_{ر=١}^{٣٠} ر$ (ب) $\sum_{ر=١}^{١٥} ر$ (جـ) $\sum_{ر=١}^{١٥} ٢ ر$ (د) $\sum_{ر=١}^{٣٠} ٢ ر$

(٣٩) $١^٢ + ٢^٢ + ٣^٢ + ٤^٢ + ... + ٨^٢$ باستخدام رمز التجميع = ...

(أ) $\sum_{ر=١}^{٨} ر^٢$ (ب) $\sum_{ر=١}^{٦٤} ر$ (جـ) $\sum_{ر=١}^{٨} ٢ ر$ (د) $\sum_{ر=١}^{٨} ٢ ر^٢$

(٤٠) ٣ + ٦ + ٩ + ١٢ + ... باستخدام رمز التجميع = ...

(أ) $\sum_{ر=١}^{\infty} ٣ ر$ (ب) $\sum_{ر=١}^{\infty} (ر + ٣)$ (جـ) $\sum_{ر=١}^{\infty} (ر + ٢)$ (د) $\sum_{ر=١}^{\infty} ر^٣$

(٤١) -١ - ٨ - ٢٧ - ٦٤ - ... - ٢١٦ باستخدام رمز التجميع = ...

(أ) $\sum_{ر=١}^{٢١٦} (-ر)^٢$ (ب) $\sum_{ر=١}^{١٥} -ر^٣$ (جـ) $\sum_{ر=١}^{٦} (-١)^ر (ر)^٢$ (د) $\sum_{ر=١}^{٦} (-ر)^٣$

(٤٢) المتسلسلة : ٥ × ١ + ٥ × ٢ + ٥ × ٣ + ... + ٥ × ١٠ تكتب باستخدام رمز التجميع بالصورة ....

(أ) $\sum_{ر=١}^{٥٠} ر$ (ب) $\sum_{ر=١}^{١٠} ٥ ر$ (جـ) $\sum_{ر=١}^{١٠} ر^٥$ (د) $\sum_{ر=١}^{٢٠} ٥ ر$

(٤٣) $\frac{١}{٢} + \frac{١}{٤} + \frac{١}{٦} + \frac{١}{٨} + ... + \frac{١}{٢٠}$ باستخدام رمز التجميع = ...

(أ) $\sum_{ر=١}^{٢٠} \frac{١}{٢ ر}$ (ب) $\sum_{ر=١}^{\infty} \frac{١}{ر + ١}$ (جـ) $\sum_{ر=١}^{١٠} \frac{١}{٢ ر}$ (د) $\sum_{ر=١}^{٢٠} \frac{١}{ر + ٢}$

ثانيًا الأسئلة المقالية

١ اكتب الخمسة حدود الأولى لكل من المتتابعات التى حدها العام يعطى بالقواعد الآتية :

(١) $ح_ن = ٢ \times \left(\frac{١}{٢}\right)^ن$

(٢) $ح_ن = \frac{(-١)^ن}{ن + ٢}$

(٣) $ح_ن = (-١)^ن (ن - ٢)^٢$

(٤) $ح_ن = \frac{(-١)^ن}{ن^٢}$

---

٢ اكتب الستة حدود الأولى لكل من المتتابعات الآتية :

(١) متتابعة الأعداد الزوجية التى تبدأ بالعدد ٢

(٢) متتابعة الأعداد المحصورة بين ١٠ ، ٣٠ والتى يقبل كل منها القسمة على ٣

(٣) متتابعة الأعداد الفردية السالبة التى تبدأ بالعدد -١

(٤) متتابعة الأعداد المحصورة بين ٥١ ، ٨١ والتى يقبل كل منها القسمة على ٥

٣ اكتب كلًا من المتتابعات التى حدها النونى يعطى بالعلاقة :

① $ح_ن = ٢ن - ١$ (إلى خمسة حدود ابتداءً من حدها الأول)

② $ح_ن = ٢ - ٣ن$ (إلى عدد غير منته من الحدود ابتداءً من حدها الأول)

③ $ح_ن = ن^٢$ (إلى خمسة حدود ابتداءً من حدها الأول)

④ $ح_ن = ن^٣$ (إلى عدد غير منته من الحدود ابتداءً من حدها الثانى)

---

٤ اكتب الحدود الستة الأولى للمتتابعة $(ح_ن)$ المعرفة كالآتى :

① $ح_١ = -١$ ، $ح_{ن+١} = ٢ ح_ن$ لكل $ن \geq ١$

② $ح_١ = -١$ ، $ح_{ن+١} = \frac{-١}{ح_ن}$ لكل $ن \geq ١$

③ $ح_١ = ٢$ ، $ح_٢ = ٥$ ، $ح_{ن+٢} = ح_{ن+١} + ح_ن$ لكل $ن \geq ١$

---

٥ اكتشف النمط ثم اكتب الحد التالى :

① ٢ ، ٥ ، ٨ ، ١١ ، ١٤ ، ...

② ١ ، ٣ ، ٦ ، ١٠ ، ١٥ ، ...

③ ١ ، ٢ ، ٤ ، ٨ ، ١٦ ، ...

④ $\frac{١}{٢}$ ، $\frac{١}{٤}$ ، $\frac{١}{٨}$ ، $\frac{١}{١٦}$ ، $\frac{١}{٣٢}$ ، ...

⑤ ٢٥ ، ٣٠ ، ٣٥ ، ٤٠ ، ٤٥ ، ...

⑥ ٦٥ ، ٦٩ ، ٧٣ ، ٧٧ ، ٨١ ، ...

⑦ ٣ ، -٦ ، ١٢ ، -٢٤ ، ٤٨ ، ...

⑧ -١ ، ٢ ، -٣ ، ٤ ، -٥ ، ...

---

٦ اكتب مفكوك كل من المتسلسلات الآتية :

① $\sum_{ر=١}^{٨} \left((-١)^ر + ٤ر\right)$

② $\sum_{ر=١}^{\infty} \left(\left(\frac{١}{٢}\right)^{ر-١}\right)$

③ $\sum_{ر=١}^{\infty} \left(\frac{١}{ر} - \frac{١}{ر+١}\right)$

④ $\sum_{ر=٢}^{\infty} \left((-١)^{ر+١} (ر)\right)$

---

٧ اكتب مفكوك كل من المتسلسلات الآتية ، ثم أوجد مجموع المفكوك :

① $\sum_{ر=١}^{٤} (ر^٢)$

② $\sum_{ر=١}^{٧} (٢ر - ١)$

③ $\sum_{ر=١}^{٥} (١ - ر^٢)$

④ $\sum_{ك=٢}^{٩} (٣ك + ١)$

٨ اكتب مفكوك كل من المتسلسلات الآتية ، ثم أوجد مجموع المفكوك وتحقق من صحة الناتج باستخدام الآلة الحاسبة :

① $\sum_{ر=١}^{٤} (ر + ١)^{٢}$ ② $\sum_{ر=٥}^{٩} (٣ \times ٢^{ر-١})$ ③ $\sum_{ر=٢}^{٧} (٢ر + ٣)$

④ $\sum_{ر=٢}^{٦} (ر^{٢} - ٢)$ ⑤ $\sum_{ر=١}^{٥} \left(٣ \times \left(\frac{١}{٢}\right)^{ر+١}\right)$ ⑥ $\sum_{ر=١}^{٨} \left(-\frac{١}{٢}\right)^{ر}$

---

٩ اكتب المتسلسلات التالية مستخدمًا رمز التجميع :

① ٢ + ٤ + ٦ + ٨ + ١٠ + ... + ٨٠ ② ٥ + ١٠ + ١٥ + ٢٠ + ٢٥ + ... + ٤٥

③ $٢ + ١ + \frac{١}{٢} + \frac{١}{٤} + \frac{١}{٨} + ...$

تطبيقات حياتية

١ الربط بالرياضة :

يمارس كريم تمارين اللياقة البدنية لمدة ٨ دقائق فى اليوم الأول ثم يزيد الفترة بعد ذلك بمعدل دقيقتين يوميًا.

① اكتب الخمسة حدود الأولى لهذه المتتابعة.

② أوجد الحد العام لهذه المتتابعة.

③ أوجد الزمن الذى يستغرقه كريم فى اليوم السابع.

④ فى أى يوم سيكون الزمن الذى يستغرقه كريم نصف ساعة ؟ وضح إجابتك.

---

٢ طفل يريد بناء هرم من قطع خشبية على شكل مكعبات متماثلة بحيث تحتوى قمة الهرم على مكعب واحد والصف الثانى على مكعبين والصف الذى يليه على ثلاثة مكعبات وهكذا. عبر عن عدد المكعبات المستخدمة فى بناء الهرم باستخدام رمز التجميع $\sum$ إذا علم أن الهرم يتكون من ١٠ صفوف ، وأوجد عدد المكعبات.

«٥٥ مكعبًا»

---

٣ الربط بالهندسة :

يمثل الشكل المقابل مثلثًا متساوى الأضلاع ، طول ضلعه ٣٢ سم نصفت أضلاعه الثلاثة ، ورسم المثلث الداخلى وقمنا بهذا النمط مرة أخرى حتى حصلنا على ثلاثة مثلثات بما فيها المثلث الأول.

٣٢ سم

① اكتب متسلسلة محيطات الثلاث مثلثات باستخدام رمز التجميع.

② أوجد محيط المثلث الرابع. «١٢ سم»

③ أوجد بالسنتيمتر مجموع محيطات الأربع مثلثات الأولى من هذا النمط. «١٨٠ سم»



الدرس

2

المتتابعة الحسابية

تعريف

المتتابعة الحسابية هى المتتابعة التى يكون فيها الفرق بين كل حد والحد السابق له مباشرة يساوى مقدارًا ثابتًا يسمى أساس المتتابعة ويرمز له عادة بالرمز (ء) **أى أن** ء = ح$_{ن+١}$ − ح$_{ن}$ لكل ن ∋ ص$^{+}$

مثال ١

بين أى المتتابعات الآتية يمكن أن تكون متتابعة حسابية وأيها ليست حسابية وأوجد أساس كل متتابعة حسابية :

١ (٥ ، ٩ ، ١٣ ، ١٧ ، .....)

٢ (−١٧ ، −١٥ ، −١٣ ، −١١ ، .....)

٣ $\left(\frac{١}{٢} ، \frac{١}{٥} ، \frac{١}{٨} ، \frac{١}{١١} ، .....\right)$

الحل

١ ∵ ح$_{٢}$ − ح$_{١}$ = ح$_{٣}$ − ح$_{٢}$ = ح$_{٤}$ − ح$_{٣}$ = ٤ ∴ المتتابعة حسابية وأساسها = ٤

٢ ∵ ح$_{٢}$ − ح$_{١}$ = ح$_{٣}$ − ح$_{٢}$ = ح$_{٤}$ − ح$_{٣}$ = ٢ ∴ المتتابعة حسابية وأساسها = ٢

٣ ∵ ح$_{٢}$ − ح$_{١}$ = $\frac{١}{٥} - \frac{١}{٢} = -\frac{٣}{١٠}$ ، ح$_{٣}$ − ح$_{٢}$ = $\frac{١}{٨} - \frac{١}{٥} = -\frac{٣}{٤٠}$

∴ ح$_{٢}$ − ح$_{١}$ ≠ ح$_{٣}$ − ح$_{٢}$ ∴ المتتابعة ليست حسابية.

مثال ٢

بين أى المتتابعات الآتية تكون متتابعة حسابية وأيها ليست حسابية وأوجد أساس كل متتابعة حسابية :

١ $(ح_ن) = (٣ن - ٢)$ ٢ $(ح_ن) = (٢ن^٢ - ١)$ ٣ $(ح_ن) = (٣^ن)$

الحـــل

لمعرفة ما إذا كانت المتتابعة $(ح_ن)$ تكون متتابعة حسابية أم لا نوجد $ح_{ن+١} - ح_ن$ فإذا كان الناتج يساوى مقدارًا ثابتًا كانت $(ح_ن)$ متتابعة حسابية وكان هذا المقدار الثابت أساسها ، بينما إذا كان الناتج ليس بمقدار ثابت فإن $(ح_ن)$ ليست متتابعة حسابية.

١ ∵ $ح_{ن+١} - ح_ن = (٣(ن+١) - ٢) - (٣ن - ٢) = ٣ن + ٣ - ٢ - ٣ن + ٢ = ٣$ = مقدار ثابت

∴ $(ح_ن) = (٣ن - ٢)$ متتابعة حسابية أساسها = ٣

٢ ∵ $ح_{ن+١} - ح_ن = (٢(ن+١)^٢ - ١) - (٢ن^٢ - ١) = ٢ن^٢ + ٤ن + ٢ - ١ - ٢ن^٢ + ١ = ٤ن + ٢$

وهذا ليس بمقدار ثابت لأنه يعتمد على قيمة ن ∴ $(ح_ن) = (٢ن^٢ - ١)$ ليست متتابعة حسابية.

٣ ∵ $ح_{ن+١} - ح_ن = (٣^{ن+١}) - (٣^ن) = ٣^ن(٣ - ١) = ٢ × ٣^ن$

وهذا ليس بمقدار ثابت لأنه يعتمد على قيمة ن ∴ $(ح_ن) = (٣^ن)$ ليست متتابعة حسابية.

ملاحظــة

المتتابعة الحسابية هى دالة من الدرجة الأولى فى ن حيث ن ∈ $ص^+$ ويكون معامل ن هو أساس المتتابعة أو دالة ثابتة مجالها $ص^+$ ويكون أساسها = صفر ففى المثال السابق :

١ $(ح_ن) = (٣ن - ٢)$ متتابعة حسابية لأن $(ح_ن)$ دالة من الدرجة الأولى فى ن وأساسها ء = ٣

٢ $(ح_ن) = (٢ن^٢ - ١)$ متتابعة ليست حسابية لأن $(ح_ن)$ دالة من الدرجة الثانية فى ن

المتتابعة التزايدية والمتتابعة التناقصية

المتتابعة الحسابية $(ح_ن)$ تكون :

- تزايدية إذا كان أساسها موجبًا أى ء > ٠ مثل المتتابعة (٥ ، ٩ ، ١٣ ، ١٧ ، ...) التى أساسها ء = ٤
- تناقصية إذا كان أساسها سالبًا أى ء < ٠ مثل المتتابعة (٩ ، ٧ ، ٥ ، ٣ ، ...) التى أساسها ء = -٢

ملاحظــة

إذا كان ء = صفر فإن المتتابعة ثابتة مثل المتتابعة (٥ ، ٥ ، ٥ ، ٥ ، ...)

التمثيل البيانى للمتتابعة الحسابية

حيث إن المتتابعة الحسابية هى دالة من الدرجة الأولى فى $ن$ (أو دالة ثابتة) ومجالها = $ص^+$ لذلك تمثل بيانيًا بنقط على استقامة واحدة.

مثال ٣

مثل بيانيًا الستة حدود الأولى من المتتابعة الحسابية : $(ح_ن) = (٢ن - ٣)$ موضحًا مجال ومدى المتتابعة.

الحل

$\because ح_١ = ٢(١) - ٣ = -١$ ، $ح_٢ = ٢(٢) - ٣ = ١$ ، $ح_٣ = ٢(٣) - ٣ = ٣$

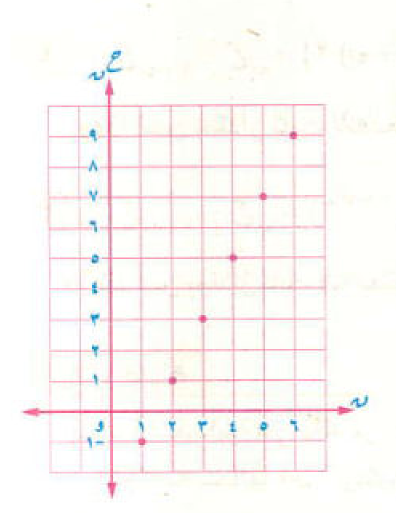
، $ح_٤ = ٢(٤) - ٣ = ٥$ ، $ح_٥ = ٢(٥) - ٣ = ٧$ ، $ح_٦ = ٢(٦) - ٣ = ٩$

$\therefore$ الستة حدود الأولى من المتتابعة تمثل بالنقط :

(١ ، -١) ، (٢ ، ١) ، (٣ ، ٣) ، (٤ ، ٥)

، (٥ ، ٧) ، (٦ ، ٩)

وتمثل بيانيًا بالشكل المقابل :



مجال المتتابعة = {١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ ، ...}

= $ص^+$

مدى المتتابعة = {-١ ، ١ ، ٣ ، ٥ ، ...}

الحد العام (النونى) للمتتابعة الحسابية

إذا كانت $(ح_ن)$ متتابعة حسابية حدها الأول = أ ، أساسها = ء

فإن الصورة العامة للمتتابعة الحسابية هى : (أ ، أ + ء ، أ + ٢ء ، أ + ٣ء ، .....)

أى أن : $ح_١ = أ$ ، $ح_٢ = أ + ء$ ، $ح_٣ = أ + ٢ء$ وهكذا ... ونلاحظ فى هذه الصورة أن معامل ء يقل دائمًا واحد عن رتبة الحد وعليه يكون : $ح_{٢٥} = أ + ٢٤ء$ ، $ح_{٧٥} = أ + ٧٤ء$ ، وهكذا ...

ومنها نجد أن الحد العام (النونى) للمتتابعة الحسابية هو $ح_ن = أ + (ن - ١)ء$

فمثلًا : فى المتتابعة الحسابية (٥ ، ٧ ، ٩ ، ...) يكون أ = ٥ ، ء = ٢

ومنها فإن الحد العام $ح_ن = ٥ + (ن - ١) \times ٢$ ، $ح_٥ = ٥ + ٤ \times ٢ = ١٣$ ، $ح_{١٢} = ٥ + ١١ \times ٢ = ٢٧$

ومما سبق فإنه

إذا كانت المتتابعة الحسابية منتهية وعدد حدودها = $ن$ فإنه يرمز لحدها الأخير بالرمز ل

حيث : ل = أ + ($ن$ − ١) ء

وتكون الصورة العامة للمتتابعة الحسابية فى هذه الحالة على الصورة :

(أ ، أ + ء ، أ + ٢ء ، ..... ، ل − ٢ء ، ل − ء ، ل)

ملاحظات هامة

١ لإيجاد رتبة الحد الذى يساوى قيمة معلومة س نضع: $ح_ن$ = س

٢ لإيجاد رتبة أول حد تكون قيمته أقل من قيمة معلومة س نضع: $ح_ن$ < س

٣ لإيجاد رتبة أول حد تكون قيمته أكبر من قيمة معلومة س نضع: $ح_ن$ > س

٤ لإيجاد رتبة أول حد موجب فى المتتابعة الحسابية نضع: $ح_ن$ > ٠

٥ لإيجاد رتبة أول حد سالب فى المتتابعة الحسابية نضع: $ح_ن$ < ٠

٦ الحد الذى ترتيبه ك من النهاية هو الحد الذى ترتيبه ($ن$ − ك + ١) من البداية حيث $ن$ عدد حدود المتتابعة

مثال ٤

فى المتتابعة الحسابية (٩٥ ، ٩٢ ، ٨٩ ، .....) أوجد :

١ قيمة $ح_٦$

٢ رتبة الحد الذى قيمته ٦٨

٣ رتبة أول حد سالب.

٤ رتبة أول حد تقل قيمته عن ٢٥

الحـــل

∵ أ = ٩٥ ، ء = ٩٢ − ٩٥ = −٣

١ $ح_٦$ = أ + ٥ء = ٩٥ + ٥ × −٣ = ٨٠

٢ بوضع $ح_ن$ = ٦٨ ∴ أ + ($ن$ − ١) ء = ٦٨

∴ ٩٥ + ($ن$ − ١) × −٣ = ٦٨ ∴ ٩٥ − ٣$ن$ + ٣ = ٦٨ ∴ ٩٨ − ٣$ن$ = ٦٨

∴ −٣$ن$ = −٣٠ ∴ $ن$ = ١٠ ∴ $ح_{١٠}$ = ٦٨

٣ بوضع $ح_ن < ٠$ ∴ $أ + (ن - ١) ء < ٠$

∴ $٩٥ + (ن - ١) × -٣ < ٠$ ∴ $٩٨ - ٣ن < ٠$ ∴ $-٣ن < -٩٨$

∴ $ن > ٣٢\frac{٢}{٣}$ ∴ أول حد سالب هو $ح_{٣٣}$

٤ بوضع $ح_ن < ٢٥$ ∴ $أ + (ن - ١) ء < ٢٥$

∴ $٩٥ + (ن - ١) × -٣ < ٢٥$ ∴ $٩٨ - ٣ن < ٢٥$ ∴ $-٣ن < -٧٣$

∴ $ن > ٢٤\frac{١}{٣}$ ∴ أول حد قيمته تقل عن ٢٥ هو $ح_{٢٥}$

مثال ٥

فى المتتابعة الحسابية (-٤٢ ، -٣٩ ، -٣٦ ، ..... ، ٢١)

١ أوجد عدد حدود المتتابعة.

٢ أوجد رتبة وقيمة أول حد موجب.

٣ أوجد قيمة $ح_٩$ من النهاية.

٤ هل يوجد حد قيمته -١١ ؟

الحـــل

∵ $أ = -٤٢$ ، $ء = -٣٩ + ٤٢ = ٣$ ، $ل = ٢١$

١ ∵ $ل = أ + (ن - ١) ء$ ∴ $٢١ = -٤٢ + (ن - ١) × ٣$

∴ $٢١ = -٤٥ + ٣ن$ ∴ $٦٦ = ٣ن$ ∴ $ن = ٢٢$

∴ عدد حدود المتتابعة = ٢٢

٢ بوضع $ح_ن > ٠$ ∴ $أ + (ن - ١) ء > ٠$

∴ $-٤٢ + (ن - ١) × ٣ > ٠$ ∴ $-٤٥ + ٣ن > ٠$ ∴ $٣ن > ٤٥$

∴ $ن > ١٥$ ∴ أول حد موجب هو $ح_{١٦}$

∴ $ح_{١٦} = أ + ١٥ء = -٤٢ + ١٥ × ٣ = ٣$

٣ بكتابة حدود المتتابعة من النهاية يكون حدها الأول = ٢١ وأساسها = -٣

∴ $ح_٩$ من النهاية = $أ + ٨ء = ٢١ + ٨ × -٣ = ٢١ - ٢٤ = -٣$

حل آخر :

$ح_٩$ من النهاية = $ح_{(٢٢ - ٩ + ١)}$ من البداية = $ح_{١٤}$ من البداية

∴ $ح_٩$ من النهاية = $أ + ١٣ء = -٤٢ + ١٣ × ٣ = -٣$

٤ بفرض أن $ح_ن = -١١$ ∴ $أ + (ن - ١) ء = -١١$ ∴ $-٤٢ + (ن - ١) × ٣ = -١١$

∴ $-٤٥ + ٣ن = -١١$ ∴ $ن = ١١\frac{١}{٣} \notin ص^+$ ∴ لا يوجد فى المتتابعة حد قيمته -١١

مثال ٦

إذا كانت المتتابعة (١٧ ، ـس ، ..... ، ص ، ٧١) متتابعة حسابية وكان ٣ ـس = ص + ٤

فأوجد قيمة كل من : ـس ، ص

الحـــل

∵ المتتابعة حسابية ∴ الأساس = مقدار ثابت

∴ ـس − ١٧ = ٧١ − ص ∴ ـس + ص = ٨٨ (١)

، ∵ ٣ ـس = ص + ٤ (معطى) ∴ ٣ ـس − ص = ٤ (٢)

وبجمع (١) ، (٢) : ∴ ٤ ـس = ٩٢ ∴ ـس = ٢٣

وبالتعويض فى (١) : ∴ ص = ٦٥

تعيين المتتابعة الحسابية

* المقصود بتعيين المتتابعة الحسابية هو معرفة كل من حدها الأول وأساسها حتى يمكن تكوينها.

مثال ٧

أوجد المتتابعة الحسابية التى حدها الثالث ١١ وحدها السادس ٢٠

الحـــل

∵ $ح_٣$ = ١١

∴ أ + ٢ء = ١١ (١)

، ∵ $ح_٦$ = ٢٠

∴ أ + ٥ء = ٢٠ (٢)

> **لاحظ أن :**
>
> * إذا كان : $ح_{ـس}$ ، $ح_{ص}$ حدين فى متتابعة حسابية حيث ـس ≠ ص
>
> فإن ء (أساس المتتابعة) = $\frac{ح_{ص} - ح_{ـس}}{ص - ـس}$
>
> **أى أن :** ء = $\frac{ح_٦ - ح_٣}{٦ - ٣} = \frac{٢٠ - ١١}{٦ - ٣} = ٣$

وبطرح (١) من (٢) : ∴ ٣ء = ٩ ∴ ء = ٣

وبالتعويض فى (١) : ∴ أ + ٢ × ٣ = ١١ ∴ أ = ١١ − ٦ = ٥

∴ المتتابعة هى (٥ ، ٨ ، ١١ ، .....)

مثال ٨

متتابعة حسابية فيها $ح_٢ + ح_٤$ = ٢ ، $ح_٦ + ح_٧ + ح_٨$ = −٤٥ أوجد المتتابعة.

الحـــل

∵ $ح_٢ + ح_٤$ = ٢ ∴ (أ + ء) + (أ + ٣ء) = ٢

∴ ٢أ + ٤ء = ٢ وبالقسمة على ٢ ∴ أ + ٢ء = ١ (١)

، ∵ $ح_٦ + ح_٧ + ح_٨ = -٤٥$ ∴ $(أ + ٥ء) + (أ + ٦ء) + (أ + ٧ء) = -٤٥$

∴ $٣أ + ١٨ء = -٤٥$ وبالقسمة على ٣ ∴ $أ + ٦ء = -١٥$ (٢)

وبطرح (١) من (٢) : ∴ $٤ء = -١٦$ ∴ $ء = -٤$

وبالتعويض فى (١) : ∴ $أ - ٨ = ١$ ∴ $أ = ٩$

∴ المتتابعة هى (٩ ، ٥ ، ١ ، ......)

مثال ٩

متتابعة حسابية مجموع حديها الرابع والخامس ٢٢ والنسبة بين حديها التاسع والرابع عشر ٢ : ٣ أوجد المتتابعة.

الحل

∵ $ح_٤ + ح_٥ = ٢٢$ ∴ $(أ + ٣ء) + (أ + ٤ء) = ٢٢$

∴ $٢أ + ٧ء = ٢٢$ (١)

، ∵ $\frac{ح_٩}{ح_{١٤}} = \frac{٢}{٣}$ ∴ $\frac{أ + ٨ء}{أ + ١٣ء} = \frac{٢}{٣}$

∴ $٣أ + ٢٤ء = ٢أ + ٢٦ء$ ∴ $أ = ٢ء$ (٢)

وبالتعويض من (٢) فى (١) : ∴ $٤ء + ٧ء = ٢٢$

∴ $١١ء = ٢٢$ ∴ $ء = ٢$

وبالتعويض فى (٢) : ∴ $أ = ٤$ ∴ المتتابعة هى (٤ ، ٦ ، ٨ ، ......)

مثال ١٠

متتابعة حسابية حدها الثانى خمسة أمثال حدها السادس ، مجموع مربعى حديها الأول والرابع ٤٠٥ فما هى المتتابعة ؟

الحل

∵ $ح_٢ = ٥ ح_٦$ ∴ $أ + ء = ٥(أ + ٥ء)$

∴ $-٤أ = ٢٤ء$ ∴ $أ = -٦ء$ (١)

، ∵ $ح_١^٢ + ح_٤^٢ = ٤٠٥$ ∴ $أ^٢ + (أ + ٣ء)^٢ = ٤٠٥$ (٢)

وبالتعويض من (١) فى (٢) : ∴ $(-٦ء)^٢ + (-٦ء + ٣ء)^٢ = ٤٠٥$

∴ $٣٦ء^٢ + ٩ء^٢ = ٤٠٥$ ∴ $٤٥ء^٢ = ٤٠٥$ ∴ $ء^٢ = ٩$ ∴ $ء = \pm ٣$

وبالتعويض فى (١) عن $ء = ٣$ ∴ $أ = -١٨$

∴ المتتابعة هى (-١٨ ، -١٥ ، -١٢ ، ......)

وبالتعويض فى (١) عن $ء = -٣$ ∴ $أ = ١٨$ ∴ المتتابعة هى (١٨ ، ١٥ ، ١٢ ، ......)

ملاحظتان

1. إذا علم مجموع ثلاثة أعداد فى تتابع حسابى يفضل فرضهم على الصورة : (أ − ء ، أ ، أ + ء)
2. إذا علم مجموع أربعة أعداد فى تتابع حسابى يفضل فرضهم على الصورة :

(أ − ٣ء ، أ − ء ، أ + ء ، أ + ٣ء)

مثال ١١

ثلاثة أعداد تكون متتابعة حسابية مجموعها ٢١ وحاصل ضربها ٢٣١ أوجد هذه الأعداد.

الحل

بفرض أن الأعداد هى : أ − ء ، أ ، أ + ء ∴ (أ − ء) + أ + (أ + ء) = ٢١

∴ ٣ أ = ٢١ ∴ أ = ٧

، ∵ أ (أ − ء) (أ + ء) = ٢٣١ ∴ أ (أ^٢ − ء^٢) = ٢٣١

وبالتعويض عن أ ∴ ٧ (٤٩ − ء^٢) = ٢٣١

∴ ٤٩ − ء^٢ = ٣٣ ∴ ء^٢ = ١٦ ∴ ء = ± ٤

وعندما ء = ٤ ∴ الأعداد هى : ٣ ، ٧ ، ١١

وعندما ء = −٤ ∴ الأعداد هى : ١١ ، ٧ ، ٣

الأوساط الحسابية

الوسط الحسابى لعدد محدود من الأعداد يساوى مجموع تلك الأعداد مقسومًا على عددها.

فمثلًا : الوسط الحسابى للأعداد ٥ ، ٧ ، ٩ ، ١١ هو $\frac{١١ + ٩ + ٧ + ٥}{٤}$ = ٨

* **وبالتالى :** الوسط الحسابى للعددين أ ، ب يساوى $\frac{أ + ب}{٢}$ أى نصف مجموعهما.

فمثلًا : الوسط الحسابى للعددين ٤ ، ٦ يساوى $\frac{٤ + ٦}{٢}$ = ٥

تعريف

إذا كانت أ ، ب ، حـ ثلاثة حدود متتالية من متتابعة حسابية فإن الحد الأوسط ب يساوى الوسط الحسابى للحدين الآخرين أ ، حـ

أى أن ب = $\frac{أ + حـ}{٢}$ أ، ٢ ب = أ + حـ

مثال ١٢

عددان الفرق بينهما ٣ ووسطهما الحسابى ٧,٥ أوجد العددين.

الحل

نفرض أن العددين هما أ ، ب حيث أ > ب   ∴ أ − ب = ٣   (١)

، ∵ $\frac{أ + ب}{٢}$ = ٧,٥   ∴ أ + ب = ١٥   (٢)

وبجمع (١) ، (٢) ينتج أن : ٢ أ = ١٨   ∴ أ = ٩ وبالتعويض فى (١)

∴ ب = ٦   ∴ العددان هما ٦ ، ٩

مثال ١٣

عددان وسطهما الحسابى ١٣ ، حاصل ضربهما ١٦٨ أوجد العددين.

الحل

نفرض أن العددين هما س ، ص   ∴ $\frac{س + ص}{٢}$ = ١٣

∴ س + ص = ٢٦   ∴ ص = ٢٦ − س   (١)

، س ص = ١٦٨   (٢)

وبالتعويض من (١) فى (٢) :   ∴ س (٢٦ − س) = ١٦٨

∴ $س^٢$ − ٢٦ س + ١٦٨ = ٠   ∴ (س − ١٢) (س − ١٤) = ٠

∴ س = ١٢ أ، س = ١٤

وبالتعويض فى (١) : ∴ ص = ١٤ أ، ص = ١٢   ∴ العددان هما ١٢ ، ١٤

إدخال عدد محدود من الأوساط الحسابية بين عددين

إذا كانت أ ، ب كميتين معلومتين وأريد إدخال ن من الأوساط الحسابية : $س_١$ ، $س_٢$ ، $س_٣$ ، ... ، $س_ن$ بينهما فإنه ينتج لدينا متتابعة حسابية حدها الأول أ وعدد حدودها ن + ٢ وحدها الأخير ب = $ح_{ن+٢}$

وتكون المتتابعة على الصورة : (أ ، $س_١$ ، $س_٢$ ، $س_٣$ ، ... ، $س_ن$ ، ب)

مثال ١٤

أدخل أحد عشر وسطًا حسابيًا بين ٢٥ ، −١١

الحل

بإدخال ١١ وسطًا حسابيًا بين ٢٥ ، −١١ نحصل على متتابعة حسابية مكونة من ١٣ حدًا

حيث أ = ٢٥ ، $ح_{١٣}$ = −١١

∴ −١١ = ٢٥ + ١٢ ء   ∴ ١٢ ء = −٣٦

∴ ء = −٣

∴ الأوساط هى (٢٢ ، ١٩ ، ١٦ ، ... ، −٨)

لاحظ أن :

عند إدخال ن من الأوساط الحسابية بين أ ، ب فإن أساس المتتابعة ء = $\frac{ب - أ}{ن + ١}$

أى أن : ء = $\frac{-١١ - ٢٥}{١٢}$ = −٣

ملاحظة

عند إدخال عدة أوساط حسابية بين أ ، ل تكون المتتابعة الحسابية هى :

(أ ، أ + ء ، أ + ٢ ء ، ..... ، ل − ٢ ء ، ل − ء ، ل) ويكون : الوسط الأول = $ح_١$ = أ + ء

، الوسط الثانى = $ح_٢$ = أ + ٢ ء وهكذا ... ، الوسط الأخير = ل − ء ، الوسط قبل الأخير = ل − ٢ ء

وهكذا ... ، مجموع أى وسط ونظيره من الطرف الآخر = أ + ل

أى أن مجموع الوسطين الأول والأخير = أ + ل ومجموع الوسطين الثانى وقبل الأخير = أ + ل

مثال ١٥

إذا أدخلت عدة أوساط حسابية بين العددين ٣٥ ، ٣ وكانت النسبة بين مجموع الوسطين الأولين إلى مجموع الوسطين الأخيرين ١٦ : ٣ فما عدد هذه الأوساط ؟

الحل

نفرض أن المتتابعة (٣٥ ، ٣٥ + ء ، ٣٥ + ٢ ء ، ... ، ٣ − ٢ ء ، ٣ − ء ، ٣)

∵ $\frac{٣٥ + ء + ٣٥ + ٢ ء}{٣ − ء + ٣ − ٢ ء} = \frac{١٦}{٣}$ ∴ $\frac{٧٠ + ٣ ء}{٦ − ٣ ء} = \frac{١٦}{٣}$

∴ ٢١٠ + ٩ ء = ٩٦ − ٤٨ ء ∴ ٥٧ ء = −١١٤ ∴ ء = −٢

∵ ل = أ + (ن − ١) ء حيث ل الحد الأخير ، ن عدد حدود المتتابعة.

∴ ٣ = ٣٥ + (ن − ١) × −٢ ∴ ٣ = ٣٥ − ٢ ن + ٢

∴ ن = ١٧ حدًا. ∴ عدد الأوساط = ١٧ − ٢ = ١٥ وسطًا.

ملاحظتان

* إذا كان : (أ ، ب ، حـ) فى تتابع حسابى فإن :

١ (أ + ك ، ب + ك ، حـ + ك) فى تتابع حسابى ، (أ − ك ، ب − ك ، حـ − ك) فى تتابع حسابى أيضًا.

٢ (أ ك ، ب ك ، حـ ك) فى تتابع حسابى أيضًا.

* إذا كانت ($أ_١$ ، $ب_١$ ، $حـ_١$ ، ...) متتابعة حسابية أساسها ($ء_١$)

وكانت ($أ_٢$ ، $ب_٢$ ، $حـ_٢$ ، ...) متتابعة حسابية أساسها ($ء_٢$)

فإن : ($أ_١ + أ_٢$ ، $ب_١ + ب_٢$ ، $حـ_١ + حـ_٢$ ، ...) تمثل متتابعة حسابية أساسها ($ء_١ + ء_٢$)

تمـارين 2 على المتتابعة الحسابية



من أسئلة الكتاب المدرس • فهـم • تطبيق • مستويات عليا

أولًا أسئلة الاختيار من متعدد

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

تمارين على المتتابعة الحسابية وتعيينها

① جميع المتتابعات الآتية يمكن أن تكون حسابية ما عدا المتتابعة ....

(أ) (٣ ، ٧ ، ١١ ، ١٥ ، ...)　　(ب) (−١١ ، −١٥ ، −١٩ ، −٢٣ ، ...)

(جـ) $(\frac{١}{٢} ، \frac{١}{٤} ، \frac{١}{٥} ، \frac{١}{٦} ، ...)$　　(د) $(\frac{٢١}{٥} ، \frac{١٦}{٥} ، \frac{١١}{٥} ، \frac{٦}{٥} ، ....)$

② جميع المتتابعات الآتية حسابية عدا ....

(أ) (٢ن − ٥)　　(ب) (٤٣ − ٧ن)　　(جـ) $(٢^{ن})$　　(د) (٣ن)

③ المتتابعة الحسابية من بين المتتابعات الآتية هى ....

(أ) $(ح_ن) = (\frac{ن+١}{ن})$　　(ب) $(ح_ن) = ((ن+١)^٢)$

(جـ) $(ح_ن) = (\frac{٣}{ن}(ن+٢))$　　(د) $(ح_ن) = (\frac{ن^٢ - ١}{ن^٢ + ن + ١})$

④ المتتابعة $(ح_ن)$ تكون حسابية إذا وفقط إذا كان .... لكل ن > ١

(أ) $ح_ن + ح_{ن+١}$ = مقدار ثابت.　　(ب) $\frac{ح_{ن+١}}{ح_ن}$ = مقدار ثابت.

(جـ) $ح_{ن-١} + ح_{ن+١} = ٢ ح_ن$　　(د) $ح_{ن+١} - ح_ن = \frac{١}{ن}$

⑤ الحد العام للمتتابعة : (أ ، أ + ء ، أ + ٢ ء ، ...) هو ....

(أ) ء ن + (ء − أ)　　(ب) أ + ن ء　　(جـ) أ + (ن + ١) ء　　(د) ء ن + (أ − ء)

⑥ المتتابعة الحسابية (٣ ، ٥ ، ٧ ، ...) حدها النوني يساوى ....

(أ) ٣ن　　(ب) ٢ن + ١　　(جـ) ٥ن − ٢　　(د) ٢ن

⑦ إذا كان : ٢أ + ١ ، ٥أ − ١ ، ٦أ + ٣ ثلاثة حدود متتالية من متتابعة حسابية فإن : أ = ...

(أ) ١　　(ب) ٢　　(جـ) ٣　　(د) ٥

⑧ إذا كانت : (٢٩ ، س ، ... ، ٣س ، ٩٥) متتابعة حسابية　فإن : س = ...

(أ) ٢١　　(ب) ٣١　　(جـ) ٩٥　　(د) ١٢٤

⑨ إذا كانت : ٣٦ ، أ ، ٢٤ ، ب حدودًا متتالية من متتابعة حسابية　فإن : ب = ...

(أ) ٣٠　　(ب) ٣٦　　(جـ) ١٨　　(د) ٢٤

(١٠) إذا كانت : (س ، ص ، ٣ س + ص ، س + ٣ ص + ٢ ، ....) متتابعة حسابية

فإن : س − ص = ...

(أ) −٦ (ب) −٢ (جـ) ٢ (د) ٦

(١١) عدد حدود المتتابعة : (٢ ، ٨ ، ١٤ ، ... ، ٦٨) يساوى .... حدًا.

(أ) ٦ (ب) ٨ (جـ) ١٢ (د) ١٦

(١٢) الحد الأخير فى المتتابعة الحسابية التى حدها الأول ٣ وأساسها ٥ وعدد حدودها ٢٥ حدًا يساوى ....

(أ) ١١٣ (ب) ١١٨ (جـ) ١٢٣ (د) ١٢٨

(١٣) الحد العاشر فى المتتابعة الحسابية ($\sqrt{٣}$ ، $\sqrt{١٢}$ ، $\sqrt{٢٧}$ ، ...) يساوى ....

(أ) $\sqrt{٢٤٣}$ (ب) $\sqrt{٣٠٠}$ (جـ) $\sqrt{٣٦٣}$ (د) $\sqrt{٤٣٢}$

(١٤) قيمة الحد الأوسط فى المتتابعة (٢ ، ٥ ، ٨ ، ... ، ١٢٨) هى ....

(أ) ٢٢ (ب) ٤٣ (جـ) ٦٥ (د) ٢٧٩٥

(١٥) فى المتتابعة الحسابية (١٢ ، ١٤ ، ١٦ ، ...) فإن رتبة الحد الذى قيمته ١٠٢ هو ....

(أ) $ح_{٣٦}$ (ب) $ح_{٤٨}$ (جـ) $ح_{٤٦}$ (د) $ح_{٤٥}$

(١٦) رتبة الحد الذى قيمته صفر فى المتتابعة الحسابية (٢٢ ، ٢٠ ، ١٨ ، ...) هى ....

(أ) ٨ (ب) ١٠ (جـ) ١٢ (د) ١٤

(١٧) قيمة $ح_{١٥}$ من النهاية فى المتتابعة الحسابية (١٩ ، ١٥ ، ١١ ، ... ، −٦١) تساوى ....

(أ) −٨ (ب) −٥ (جـ) −١ (د) −٣٧

(١٨) متتابعة حسابية عدد حدودها ٢٠ فإن الحد الرابع من النهاية هو الحد .... من البداية.

(أ) ١٥ (ب) ١٦ (جـ) ١٧ (د) ١٨

(١٩) رتبة أول حد قيمته أصغر من −١٨٠ فى المتتابعة الحسابية (٦٤ ، ٦١ ، ٥٨ ، ...) هى ....

(أ) ٨١ (ب) ٨٢ (جـ) ٨٣ (د) ٨٤

(٢٠) قيمة أول حد قيمته أكبر من ١٠٠٠ فى حدود المتتابعة الحسابية (٢ ، ٩ ، ١٦ ، ...) هى ....

(أ) ١٠٠٣ (ب) ١٠٠٤ (جـ) ١٠٠٥ (د) ١٠٠٦

(٢١) رتبة أول حد موجب فى المتتابعة الحسابية (−٤٨ ، −٤٥ ، −٤٢ ، ...) هو ....

(أ) $ح_{١٦}$ (ب) $ح_{١٧}$ (جـ) $ح_{١٨}$ (د) $ح_{١٩}$

(٢٢) رتبة آخر حد سالب فى المتتابعة الحسابية (−٦٢ ، −٥٧ ، −٥٢ ، ...) هو ....

(أ) $ح_{١٢}$ (ب) $ح_{١٣}$ (جـ) $ح_{١٤}$ (د) $ح_{١١}$

(٢٣) رتبة آخر حد موجب فى المتتابعة (٢٨ ، ٢٥ ، ٢٢ ، ...) هى ....

(أ) $ح_{٩}$ (ب) $ح_{١٠}$ (جـ) $ح_{١١}$ (د) $ح_{١٢}$

(٢٤) أول حد سالب من حدود المتتابعة الحسابية (٣٤١ ، ٣٣٤ ، ٣٢٧ ، ...) يساوى ....

(أ) −٤ (ب) −٣ (جـ) −٢ (د) −١

(٢٥) إذا كان $ح_ن$ = (٢ ، ٥ ، ٨ ، ... ، ل) هى متتابعة حسابية وكان الحد السابع عشر من البداية هو نفسه الحد السابع عشر من النهاية فإن : ل = ...

(أ) ٩٨ (ب) −٩٦ (جـ) ١١ (د) ٩٥

(٢٦) إذا كانت ($ح_ن$) متتابعة حسابية فيها $ح_٣ - ح_٥$ = ٦ ، $ح_٤$ = ١٦ فإن قيمة أول حد سالب فى المتتابعة تساوى ....

(أ) −٤ (ب) −٣ (جـ) −٢ (د) −١

(٢٧) رتبة أول حد قيمته تزيد عن ١٠٠ فى المتتابعة ($ح_ن$) = (٢ + ٥ ن) هى ....

(أ) ١٩ (ب) ٢٠ (جـ) ٢١ (د) ٢٢

(٢٨) المتتابعة الحسابية التى حدها الأول = ٤ وحدها الخامس = ٢٠ هى ....

(أ) (٤ ، ٨ ، ١٢ ، ...) (ب) (٤ ، ٦ ، ٨ ، ...)

(جـ) (٤ ، ٢٠ ، ٣٦ ، ...) (د) (٤ ، ٢٤ ، ٤٤ ، ...)

(٢٩) متتابعة حسابية حدها الأول = ٥ ، $ح_{ن+١} = ح_ن + ٣$ فإن حدها الخامس = ...

(أ) ١٢ (ب) ٢٠ (جـ) ١٧ (د) ١٩

(٣٠) إذا كان : ($ح_ن$) متتابعة حسابية فيها $ح_٥$ = ٢ ، $ح_٧$ = ٨ فإن المتتابعة هى ....

(أ) (−١٠ ، −٧ ، −٤ ، ...) (ب) (٨ ، ٥ ، ٢ ، ...)

(جـ) (−١٤ ، −١٠ ، −٦ ، ...) (د) (−١٠ ، −٦ ، −٢ ، ...)

(٣١) إذا كان $ح_٢$ من متتابعة حسابية هو ١٢٩ ، $ح_٥$ منها هو ١٤١ فإن رتبة الحد الذى قيمته ١٦١ هى ....

(أ) ٣ (ب) ٩ (جـ) ١٠ (د) ١٢

(٣٢) متتابعة حسابية حدها السادس = ٣٤ ، مجموع حديها السابع والتاسع يساوى ٨٨ ، فإن رتبة أول حد قيمته أكبر من ١٠٥ فى هذه المتتابعة هى ....

(أ) ١٤ (ب) ١٦ (جـ) ١٨ (د) ٢١

(٣٣) إذا كان : ($ح_ن$) متتابعة حسابية فيها $\frac{ح_٤}{ح_٧} = \frac{٢}{٣}$ فإن : $\frac{ح_٦}{ح_٨}$ = ...

(أ) $\frac{٢}{٣}$ (ب) $\frac{٤}{٥}$ (جـ) $\frac{٦}{٧}$ (د) $\frac{٣}{٤}$

(٣٤) فى أى متتابعة حسابية ($ح_ن$) يكون $\frac{ح_{٤٥} + ح_{٥١}}{ح_{٤٨}}$ = ...

(أ) ٢ (ب) ٣ (جـ) ٤ (د) ٥

(٣٥) متتابعة حسابية فيها $ح_{ن} = م^{٢}$ ، $ح_{م} = ن^{٢}$ فإن أساس المتتابعة (ء) = ...

(أ) $م^{٢} + ن^{٢} - ٢$　(ب) م + ن　(جـ) - م - ن　(د) - م + ن

(٣٦) فى متتابعة حسابية إذا كان : $ح_{١٧} = ٧٣$ ، $ح_{٧٣} = ١٧$

فإن رتبة الحد الذى قيمته صفر هى ....

(أ) ٥٦　(ب) ٨٩　(جـ) ٩٠　(د) ٩١

(٣٧) إذا كان : $(ح_{ر})$ متتابعة حسابية أساسها (ء)　فإن : ء = ...

(أ) $ح_{م} - ح_{ر}$　(ب) $\frac{ح_{م} - ح_{ر}}{م - ر}$　(جـ) $\frac{ح_{م}}{ح_{ر}}$　(د) $ح_{م - ر}$

(٣٨) إذا كان : $ح_{ن} = ١٥ - ٣ن$ فإن أول حد سالب فى المتتابعة $(ح_{ن})$ هو ....

(أ) $ح_{٣}$　(ب) $ح_{٥}$　(جـ) $ح_{٦}$　(د) $ح_{١٥}$

(٣٩) المتتابعة الحسابية التى مجموع حديها الخامس والعاشر يساوى ٢٠ ، حدها السابع يساوى ثلاثة أمثال حدها الرابع هى ....

(أ) (٣ ، ١ ، -١ ، ...)　(ب) (١ ، ٣ ، ٥ ، ...)

(جـ) (-١ ، ٢ ، ٥ ، ...)　(د) (-٣ ، -١ ، ١ ، ...)

(٤٠) المتتابعة الحسابية التى حدها الأول = ٨ وفيها $ح_{٢ن} = ٣ ح_{ن}$ هى ....

(أ) (٢٤ ، ١٦ ، ٨ ، ...)　(ب) (٨ ، ١٢ ، ١٦ ، ...)

(جـ) (٨ ، ١٦ ، ٢٤ ، ...)　(د) (٨ ، ١٤ ، ٢٠ ، ...)

تمارين على الأوساط الحسابية

(٤١) فى أى متتابعة حسابية الوسط الخامس هو الحد ....

(أ) الخامس.　(ب) الرابع.　(جـ) العاشر.　(د) السادس.

(٤٢) إذا كان : أ ، ب وسطين حسابيين بين س ، ص　فإن : $\frac{ص - س}{ب - أ}$ = ...

(أ) ٢　(ب) ٣　(جـ) ٤　(د) ٦

(٤٣) الوسط الحسابى للعددين ٨ ، ١٢ هو ....

(أ) ٨　(ب) ١٢　(جـ) ٢٠　(د) ١٠

(٤٤) إذا كان الوسط الحسابى للعددين : س ، ٢٦ هو ٢١　فإن : س = ...

(أ) ٢٦　(ب) ١٦　(جـ) ٤٢　(د) ٢١

(٤٥) إذا كان : س < ٠ ، وكان : $(٧س ، ٨ ، س^{٢} - ٢)$ فى تتابع حسابى　فإن : س = ...

(أ) ٢　(ب) -٩　(جـ) -٢　(د) -٧

(٤٦) إذا كان الوسط الحسابى لعددين هو ١٥ فإن مجموع العددين يساوى ....

(أ) ٣٠　(ب) ٢٠　(جـ) ١٥　(د) ١٠

(٤٧) إذا كانت : ($أ^٢$ ، $ب^٢$ ، $ح^٢$) فى تتابع حسابى فإن : $ب^٢$ = ...

(أ) $أ^٢ + ح^٢$ (ب) ٢ ($أ^٢ + ح^٢$) (جـ) $\frac{أ^٢ + ح^٢}{٢}$ (د) $\sqrt{أ^٢ + ح^٢}$

(٤٨) الوسط الحسابى للعددين : ٣ س – ٧ ، ٥ س + ٣ يساوى ....

(أ) ٤ س – ٥ (ب) ٤ س – ٢ (جـ) ٤ س + ٢ (د) ٨ س – ٤

(٤٩) إذا كانت : أ ، ٢٤ ، ب حدودًا متتالية من متتابعة حسابية فإن القيمة العددية للمقدار (أ + ب) تساوى ....

(أ) ٢٤ (ب) ٤٨ (جـ) ١٢ (د) ٦

(٥٠) مجموع الوسطين الحسابيين الأول والأخير بين العددين ٧ ، ٣١ يساوى ....

(أ) ١٩ (ب) ٣٨ (جـ) ٢٤ (د) ١٣

(٥١) عند إدخال عدة أوساط حسابية بين أ ، ل يكون الوسط الأخير = ...

(حيث ى أساس المتتابعة الناتجة)

(أ) ل – ى (ب) ل (جـ) ل – ٢ ى (د) ل + ى

(٥٢) عند إدخال ١٠ أوساط حسابية بين ٥ ، ٣٨ فإن المتتابعة الناتجة هى ....

(أ) (٥ ، ١٠ ، ١٥ ، ... ، ٣٨) (ب) (٥ ، ٧ ، ٩ ، ١١ ، ... ، ٣٨)

(جـ) (٥ ، ٨ ، ١١ ، ... ، ٣٨) (د) (٥ ، ٩ ، ١٣ ، ... ، ٣٨)

(٥٣) إذا ادخلت ١٢ وسطًا حسابيًا بين –١٤ ، ٥١ فإن الوسط السابع = ...

(أ) ٢١ (ب) ١٦ (جـ) ٢٦ (د) ٣١

(٥٤) ادخلت عدة أوساط حسابية بين ٨ ، ٦٢ فكان مجموع الوسطين الثانى والسادس = ٤٠

فإن عدد الأوساط = ...

(أ) ١٥ (ب) ١٦ (جـ) ١٧ (د) ١٨

(٥٥) إذا كانت : ($ح_ن$) متتابعة حسابية حيث : $ح_ن$ = ٣ ن – ٢

فإن الوسط الحسابى بين $ح_٥$ ، $ح_{١١}$ يساوى ....

(أ) ٨ (ب) ١٦ (جـ) ٢٢ (د) ٢٦

(٥٦) إذا كانت (١ ، س ، ص) فى تتابع حسابى وكان : $ص^٢$ = س ، س ≠ ص ≠ ١

فإن : ص = ...

(أ) $\frac{١}{٤}$ (ب) $-\frac{١}{٤}$ (جـ) $\frac{١}{٢}$ (د) $\frac{-١}{٢}$

(٥٧) إذا كانت : (س ، ٤ س + ١ ، س + ٢ ص ، ٣ ص + ٢) فى تتابع حسابى

فإن : س = ...

(أ) ٢ (ب) –٢ (جـ) –٧ (د) ٧

ثانيًا الأسئلة المقالية

تمارين على المتتابعة الحسابية

١ بين أى المتتابعات الآتية يمكن أن تكون متتابعة حسابية وأوجد الحد العام للمتتابعة الحسابية :

① (٩ ، ١٣ ، ١٧ ، ٢١ ، ...)
② (٤ ، ٧ ، ١٢ ، ١٩ ، ...)
③ (−٥ ، −١١ ، −١٧ ، −٢٣ ، −٢٩)
④ ($\frac{١}{٢}$ ، $\frac{١}{٣}$ ، $\frac{١}{٤}$ ، $\frac{١}{٥}$ ، ...)
⑤ (س + ٢ ص ، ٣ س + ٣ ص ، ٥ س + ٤ ص)
⑥ (٧ ، ٧ ، ٧ ، ٧ ، ٧)

٢ بين أى المتتابعات الآتية حسابية واذكر أساسها واكتب الحدود الثلاثة الأولى من كل متتابعة حسابية :

① $(ح_ن) = (٥ ن + ٢)$
② $(ح_ن) = (١ - \frac{٣}{٢} ن)$
③ $(ح_ن) = (٣ \times ٧^{ن+١})$
④ $(ح_ن) = \left(\frac{ن^٢ - ٢٥}{ن + ٥}\right)$

٣ فى المتتابعة الحسابية (١٦ + ٤٠ س ، ٥٠ س − ٩ ، ... ، ٣ س + ١٥ ، ٥ س + ٦) أوجد قيمة س ثم أوجد عدد حدود المتتابعة. «٢ ، ١٧»

٤ فى المتتابعة الحسابية (٦٣ ، ٥٩ ، ٥٥ ، ... ، −١٣٣) أوجد :
① قيمة الحد السابع. ② عدد حدود المتتابعة. «٣٩ ، ٥٠»

٥ أوجد عدد حدود المتتابعة (٨ ، ١١ ، ١٤ ، ... ، ٥٠) ثم أوجد قيمة الحد العاشر من النهاية. «١٥ ، ٢٣»

٦ أوجد رتبة وقيمة أول حد سالب فى المتتابعة الحسابية (١١ ، ٩ ، ٧ ، ...) «٧ ، −١»

٧ أوجد رتبة وقيمة أول حد موجب فى المتتابعة الحسابية (−٥١ ، −٤٨ ، −٤٥ ، ...) «١٩ ، ٣»

٨ أوجد رتبة وقيمة آخر حد سالب فى المتتابعة الحسابية (−٣٩ ، −٣٤ ، −٢٩ ، ...) «٨ ، −٤»

٩ أوجد عدد الحدود السالبة فى المتتابعة الحسابية (−٤٧ ، −٤٢ ، −٣٧ ، ...) «١٠»

١٠ أوجد عدد الحدود الموجبة فى المتتابعة الحسابية (٧٢ ، ٦٣ ، ٥٤ ، ...) «٨»

١١ أثبت أنه لا يوجد حد قيمته ١٠٠ فى المتتابعة الحسابية (١٣ ، ١٧ ، ٢١ ، ...)

١٢ اكتشف الخطأ :

① يعرف أساس المتتابعة الحسابية بأنه الفرق بين كل حد والحد السابق له مباشرة

أى أن : $ء = ح_ن - ح_{ن-١}$ لكل $ن \in ص^+$

② تعطى العلاقة بين $ن$ ، $ح_ن$ فى المتتابعة الحسابية كالآتى :

$ح_ن = أ ن + ب$ حيث أ ، ب ثابتان ، ب هو أساس المتتابعة فى هذه العلاقة.

تمارين على تعيين المتتابعة الحسابية

١٣ $(ح_ن)$ متتابعة حسابية فيها $ح_٧ = ١٨$ ، $ح_{١٥} = ٣٤$ أوجد هذه المتتابعة. «(٦ ، ٨ ، ١٠ ، ...)»

١٤ أوجد المتتابعة الحسابية التى حدها الثامن ١١ ، وحدها العاشر هو المعكوس الجمعى لحدها السابع عشر.
«(٢٥ ، ٢٣ ، ٢١ ، ...)»

١٥ أوجد المتتابعة الحسابية التى حدها الخامس = ٢١ ، حدها العاشر = ثلاثة أمثال حدها الثانى.
«(٩ ، ١٢ ، ١٥ ، ...)»

١٦ متتابعة حسابية حدها الرابع = ١١، مجموع حديها الخامس والتاسع يساوى ٤٠ أوجد المتتابعة ثم أوجد رتبة الحد الذى قيمته ١٥٢ فى هذه المتتابعة. «(٢ ، ٥ ، ٨ ، ...) ، ٥١»

١٧ أوجد المتتابعة الحسابية التى مجموع حديها الثانى والرابع يساوى ٤ ومجموع حدودها السادس والسابع والثامن يساوى ٥٤ «(-٦ ، -٢ ، ٢ ، ...)»

١٨ $(ح_ن)$ متتابعة حسابية فيها : $ح_١ - ح_٦ = ٢٥$ ، $ح_٧ + ح_٨ = ٩٥$ أوجد المتتابعة ثم أوجد رتبة وقيمة أول حد سالب فيها. «(٨٠ ، ٧٥ ، ٧٠ ، ...) ، $ح_{١٨}$ ، -٥»

١٩ أوجد المتتابعة الحسابية التى حدها السادس = ٢٠ ، النسبة بين حديها الرابع والعاشر كنسبة ٤ : ٧
«(١٠ ، ١٢ ، ١٤ ، ...)»

٢٠ أوجد المتتابعة الحسابية التى مجموع حديها الثانى والخامس ٤ وحاصل ضرب حديها الثالث والسادس ٧ وبين أن هناك متتابعتين. «(-١ ، $\frac{١}{٥}$ ، $\frac{٧}{٥}$ ، ...) أ، (-٣ ، -١ ، ١ ، ...)»

٢١ $(ح_ن)$ متتابعة حسابية فيها : $ح_٣ + ح_٤ = ٤٢$ ، $ح_٣ \times ح_٥ = ٣١٥$ أوجد هذه المتتابعة.
«(٢٧ ، ٢٤ ، ٢١ ، ...)»

٢٢ متتابعة حسابية تزايدية مجموع حديها الثانى والثالث يساوى ١٥ ومربع حدها الخامس يساوى ٢٢٥ أوجد المتتابعة. «(٣ ، ٦ ، ٩ ، ...)»

٢٣ متتابعة حسابية حدودها موجبة حاصل ضرب حديها الأول والرابع يساوى ٤٥ وحاصل ضرب الحدين الثالث والعاشر يزيد عن حاصل ضرب الحدين الرابع والسابع بمقدار ٢٤ أوجد المتتابعة.

«(٣ ، ٧ ، ١١ ، ...)»

٢٤ متتابعة حسابية عدد حدودها ٢١ حدًا وحدها الأوسط يساوى ٣٢ ومجموع حدودها الثلاثة الأخيرة يساوى ١٧٧ أوجد المتتابعة. «(٢ ، ٥ ، ٨ ، ...)»

٢٥ أوجد المتتابعة الحسابية التى مجموع حديها الثانى والثالث –٧ ومجموع مربعيهما ٢٩ «(–٨ ، –٥ ، –٢ ، ...) أ (١ ، –٢ ، –٥ ، ...)»

٢٦ أربعة أعداد تكون متتابعة حسابية مجموعها ٣٦ ومجموع مربعاتها ٣٤٤ أوجد هذه الأعداد. «٦ ، ٨ ، ١٠ ، ١٢»

٢٧ إذا كان مجموع ثلاثة أعداد تكون متتابعة حسابية هو ٣٣ وحاصل ضربها ٧٩٢ فما هى الأعداد ؟ «٤ ، ١١ ، ١٨»

٢٨ أوجد عدد الأعداد الصحيحة المحصورة بين ١١٠ ، ٤٥٠ والتى كل منها يقبل القسمة على ١١ «٣٠»

٢٩ متتابعة حسابية حدها الأول = ٣ ، $ح_{ن}$ = ٣٩ ، $ح_{٢ن}$ = ٧٩ فما قيمة ن ؟ ثم أوجد المتتابعة. «١٠ ، (٣ ، ٧ ، ١١ ، ...)»

٣٠ متتابعة حسابية منتهية حدها الأول ٧ فإذا كان $ح_{١١}$ من البداية يساوى ٤٧ ، $ح_{١١}$ من النهاية يساوى ٣٩٥ أوجد ($ح_{ن}$) «(٧ ، ١١ ، ١٥ ، ... ، ٤٣٥)»

تمارين على الأوساط الحسابية

٣١ إذا كان الوسط الحسابى بين عددين هو ١١ ، الوسط الحسابى بين مربعيهما هو ١٢٥ فما هما العددان ؟ «٩ ، ١٣»

٣٢ أدخل ١٦ وسطًا حسابيًا بين ٢٧ ، –٢٤ «(٢٤ ، ٢١ ، ... ، –٢١)»

٣٣ أدخل ٨ أوساط حسابية بين لو ٢ ، لو ١٠٢٤ «(٢ لو ٢ ، ٣ لو ٢ ، ... ، ٩ لو ٢)»

٣٤ إذا أدخلت عدة أوساط حسابية بين ١ ، ١٧ وكان الوسط السابع يساوى ثلاثة أمثال الوسط الثانى. أوجد عدد هذه الأوساط. «٧»

٣٥ متتابعة حسابية حدها التاسع يساوى ٢٥ ، الوسط الحسابى بين حديها الثالث والخامس هو ١٠ أوجد هذه المتتابعة. «(١ ، ٤ ، ٧ ، ...)»

٣٦ أوجد المتتابعة الحسابية التى فيها الوسط الحسابى بين حديها الثالث والسابع هو ١٩ ، حدها العاشر يزيد عن ضعف حدها الرابع بمقدار ٢ «(٧ ، ١٠ ، ١٣ ، ...)»

٣٧ إذا كان مجموع الوسطين الثانى والرابع من متتابعة حسابية يساوى ١٢ ، والوسط السابع يزيد عن الوسط الثالث بمقدار ٤ فما هى المتتابعة ؟ «(٣ ، ٤ ، ٥ ، ...)»

٣٨ إذا أدخلنا عدة أوساط حسابية بين ٢ ، ٤٧ وكانت النسبة بين الوسط الثانى والوسط الأخير كنسبة ٢ : ٧ أوجد عدد الأوساط. «٨»

٣٩ إذا أدخلنا عدة أوساط حسابية بين ٢٠ ، ١٧٠ وكان مجموع الوسطين الخامس عشر والعشرين خمسة أمثال الوسط الخامس فما عدد هذه الأوساط ؟ «٢٤»

٤٠ إذا أدخلنا عدة أوساط حسابية بين ٦ ، ٣٦ وكانت نسبة مجموع الوسطين الأولين إلى مجموع الوسطين الأخيرين كنسبة ١ : ٣ فما عدد هذه الأوساط ؟ «٩»

ثالثاً مسائل تقيس مهارات التفكير

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

① إذا كان الحد الأخير من متتابعة حسابية عشرة أمثال حدها الأول وحدها قبل الأخير يساوى مجموع حديها الرابع والخامس فإن : $\frac{ح_٦}{ح_٢}$ = ...

(أ) ٣ ء (ب) ٢ (جـ) ٢ ء (د) $\frac{٥}{٢}$

② إذا كان : $ء_١$ هو أساس المتتابعة الحسابية (أ ، $س_١$ ، $س_٢$ ، ... ، $س_٥$ ، ب)

وكان : $ء_٢$ هو أساس المتتابعة الحسابية (أ ، $ص_١$ ، $ص_٢$ ، ... ، $ص_٧$ ، ب) فإن : $\frac{ء_١}{ء_٢}$ = ...

(أ) $\frac{٣}{٢}$ (ب) $\frac{٥}{٧}$ (جـ) $\frac{٤}{٣}$ (د) $\frac{٧}{٥}$

③ إذا كانت : (أ ، ب ، حـ ، ٢٠ ، ك ، هـ ، و) تكون متتابعة حسابية

فإن : أ + ب + حـ + ك + هـ + و = ...

(أ) ٦٠ (ب) ٨٠ (جـ) ١٠٠ (د) ١٢٠

④ إذا كان : س ، ص ، ع ثلاثة حدود متتالية فى متتابعة حسابية

فإن : (س + ٢ ص − ع) (٢ ص + ع − س) (ع + س − ص) = ...

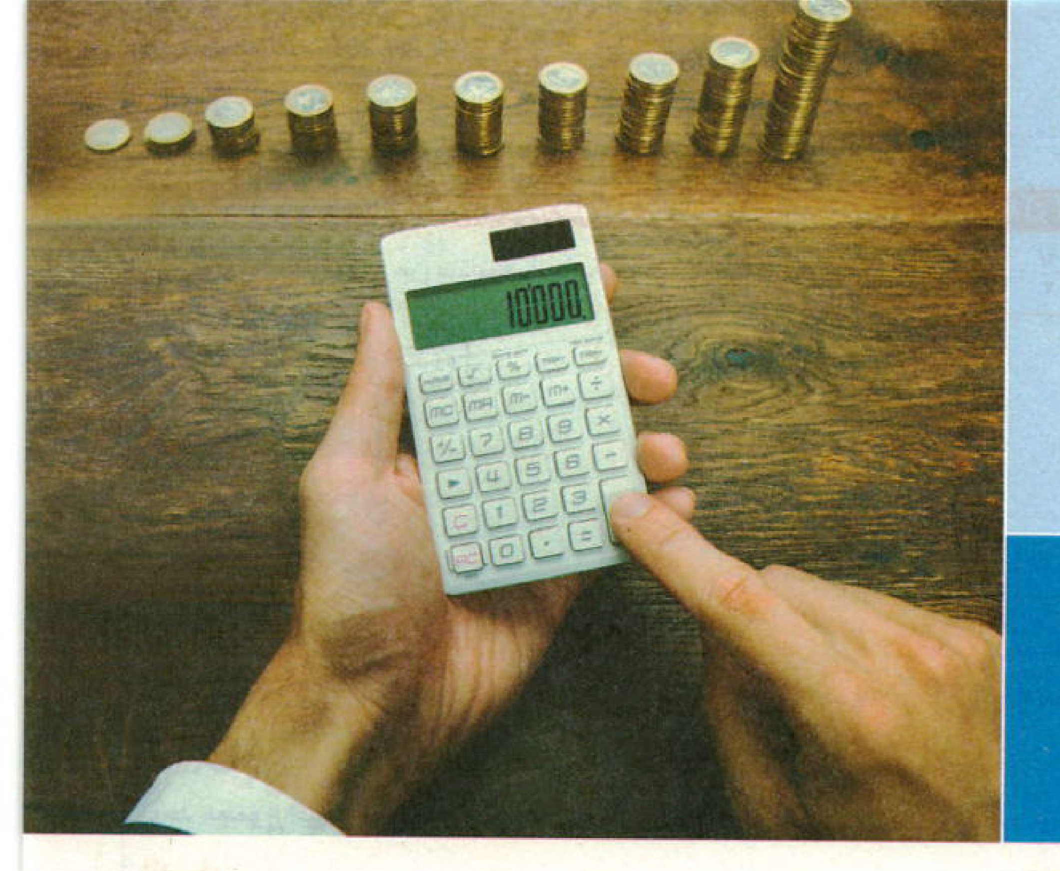
(أ) $\frac{١}{٢}$ س ص ع (ب) س ص ع (جـ) ٢ س ص ع (د) ٤ س ص ع

تطبيقات على المتتابعة الحسابية

١ **الربط بالهندسة :** أوجد قياس كل من زوايا المثلث الذى قياس إحدى زواياه هو الوسط الحسابى بين قياسى الزاويتين الأخريين والفرق بين قياسى الزاويتين الصغرى والكبرى يساوى ٨٠° «٢٠° ، ٦٠° ، ١٠٠°»

٢ **الربط بالتجارة :** اشترى رجل دراجة بخارية واتفق مع البائع أن يسدد ثمنها على أقساط شهرية تكون متتابعة حسابية حدها النونى هو ١٢٠ ن + ٨٠ ، فإذا كان القسط الأخير هو ١٤٠٠ جنيه.

أوجد عدد هذه الأقساط. «١١»



الدرس

3

المتسلسلات الحسابيـــة

المتسلسلة الحسابية

* هى المتسلسلة الناتجة من عملية جمع حدود متتابعة حسابية.

أى أنه : لأى متتابعة حسابية (أ ، أ + ء ، أ + ٢ء ، أ + ٣ء ، ...)

حدها الأول = أ وأساسها = ء وحدها العام (النونى) حـن = أ + (ن - ١) ء

تسمى المتسلسلة أ + (أ + ء) + (أ + ٢ء) + (أ + ٣ء) + ... متسلسلة حسابية ويكون مجموع ن

حدًا من حدود المتتابعة الحسابية = $\sum_{ر=1}^{ن}$ (أ + (ر - ١) ء)

مجموع المتتابعة الحسابية

١ مجموع المتتابعة الحسابية بمعلومية حدها الأول (أ) وحدها الأخير (ل)

مجموع متتابعة حسابية حدها الأول أ وحدها الأخير ل وعدد حدودها ن هو جـن = $\frac{ن}{٢}$ (أ + ل)

استنتاج القانون

نفرض أن المتتابعة هى : (أ ، أ + ء ، أ + ٢ء ، ... ، ل - ٢ء ، ل - ء ، ل)

∴ جـن = أ + (أ + ء) + (أ + ٢ء) + ... + (ل - ٢ء) + (ل - ء) + ل   (١)

وبكتابة الطرف الأيسر فى المعادلة (١) معكوسًا.

∴ جـن = ل + (ل - ء) + (ل - ٢ء) + ... + (أ + ٢ء) + (أ + ء) + أ   (٢)

وبجمع (١) ، (٢) :

∴ ٢ جـن = (أ + ل) + (أ + ل) + (أ + ل) + ... + (أ + ل) + (أ + ل) + (أ + ل) = ن (أ + ل)

∴ جـن = $\frac{ن}{٢}$ (أ + ل)

٢ مجموع $ن$ حدًا الأولى من متتابعة حسابية بمعلومية حدها الأول (أ) وأساسها (ء)

مجموع $ن$ حدًا الأولى من متتابعة حسابية حدها الأول أ ، أساسها ء هو : $ح_ن = \frac{ن}{٢} [٢ أ + (ن - ١) ء]$

$$ح_ن = \frac{ن}{٢} [٢ أ + (ن - ١) ء]$$

استنتاج القانون

∵ $ل = أ + (ن - ١) ء$ (١)

، $ح_ن = \frac{ن}{٢} (أ + ل)$ (٢)

وبالتعويض من (١) فى (٢) :

∴ $ح_ن = \frac{ن}{٢} [أ + أ + (ن - ١) ء]$ ∴ $ح_ن = \frac{ن}{٢} [٢ أ + (ن - ١) ء]$

مثال ١

أوجد مجموع حدود المتتابعة الحسابية التى حدها الأول ٣ وحدها الأخير ٢١ وعدد حدودها ١٠

الحــل

$أ = ٣$ ، $ل = ٢١$ ، $ن = ١٠$ ∵ $ح_ن = \frac{ن}{٢} (أ + ل)$

∴ $ح_{١٠} = \frac{١٠}{٢} (٣ + ٢١) = ٥ × ٢٤ = ١٢٠$

مثال ٢

فى المتسلسلة الحسابية : (٢٤ + ٢١ + ١٨ + ...) أوجد مجموع ٨ حدود الأولى منها.

الحــل

$أ = ٢٤$ ، $ء = ٢١ - ٢٤ = -٣$ ، $ن = ٨$ ∵ $ح_ن = \frac{ن}{٢} [٢ أ + (ن - ١) ء]$

∴ $ح_٨ = \frac{٨}{٢} [٢ × ٢٤ + ٧ × -٣] = ٤ [٤٨ - ٢١] = ٤ × ٢٧ = ١٠٨$

مثال ٣

أوجد : ١ $\sum_{ر=١}^{١٠} (٣ ر + ٢)$ ٢ $\sum_{ر=٥}^{٢٤} (١ - ٢ ر)$

الحــل

١ ∵ المقدار (٣ ر + ٢) مقدار جبرى من الدرجة الأولى.

∴ المتسلسلة $\sum_{ر=١}^{١٠} (٣ ر + ٢)$ تمثل مجموع ١٠ حدود من حدود متتابعة حسابية حدها النونى $ح_ن = ٣ ن + ٢$

ويكون : حدها الأول $أ = ح_١ = ٣ (١) + ٢ = ٥$ ، حدها الأخير $ل = ح_{١٠} = ٣ (١٠) + ٢ = ٣٢$

، ∵ $ح_ن = \frac{ن}{٢} [أ + ل]$ ∴ $ح_{١٠} = \frac{١٠}{٢} [٥ + ٣٢] = ١٨٥$

∴ $\sum_{ر=١}^{١٠} (٣ ر + ٢) = ١٨٥$

٢ ∵ المقدار (١ − ٢ ر) مقدار جبرى من الدرجة الأولى.

∴ المتسلسلة $\sum_{ر=٥}^{٢٤}$ (١ − ٢ ر) تمثل مجموع ن حدًا من حدود متتابعة حسابية حدها النونى $ح_ن$ = ١ − ٢ ن

ويكون ن = ٢٤ − ٥ + ١ = ٢٠ حدًا ، أ = $ح_٥$ = ١ − ٢ (٥) = −٩ ، ل = $ح_{٢٤}$ = ١ − ٢ (٢٤) = −٤٧

، ∵ $ج_ن$ = $\frac{ن}{٢}$ [أ + ل] ∴ $ج_{٢٠}$ = $\frac{٢٠}{٢}$ [−٩ + (−٤٧)] = −٥٦٠

∴ $\sum_{ر=٥}^{٢٤}$ (١ − ٢ ر) = −٥٦٠

ملاحظات

١ لإيجاد المجموع $ج_ن$ يلزم معرفة عدد الحدود ن وإن لم تكن معلومة نوجدها من القانون ل = أ + (ن − ١) ء

٢ لإيجاد المجموع ابتداءً من حد معين نوجد قيمة هذا الحد ونعوض عنه بدلاً من أ فى القانون.

٣ لإيجاد عدد الحدود التى تجعل المجموع = س نضع $ج_ن$ = س ونوجد قيمة ن

٤ عدد الحدود التى تجعل المجموع أكبر ما يمكن = عدد الحدود (الموجبة أوغير السالبة).

٥ عدد الحدود التى تجعل المجموع أصغر ما يمكن = عدد الحدود (السالبة أو غير الموجبة).

٦ $ح_ن$ = $ج_ن$ − $ج_{ن-١}$ لكل ن > ١ فمثلًا : $ح_{١٠}$ = $ج_{١٠}$ − $ج_٩$ ، $ح_{١٣}$ = $ج_{١٣}$ − $ج_{١٢}$ ، ... وهكذا

مثال ٤

أوجد مجموع حدود المتتابعة الحسابية (١٣ ، ٢٢ ، ٣١ ، ... ، ١٣٩)

الحل

أ = ١٣ ، ء = ٢٢ − ١٣ = ٩ ، ل = ١٣٩

نوجد عدد الحدود ∵ ل = أ + (ن − ١) ء ∴ ١٣٩ = ١٣ + (ن − ١) × ٩

∴ ١٢٦ = ٩ (ن − ١) ∴ ن − ١ = ١٤ ∴ ن = ١٥

∵ $ج_ن$ = $\frac{ن}{٢}$ (أ + ل) ∴ $ج_{١٥}$ = $\frac{١٥}{٢}$ (١٣ + ١٣٩) = ١١٤٠

مثال ٥

أوجد مجموع الخمسة عشر حدًا الأولى من المتتابعة ($ح_ن$) = (٥ ن − ٣)

الحل

∵ $ح_ن$ = ٥ ن − ٣ مقدار من الدرجة الأولى فى ن ∴ المتتابعة حسابية وأساسها = ٥

∴ أ = $ح_١$ = ٥ × ١ − ٣ = ٢ ، ء = ٥ ، ن = ١٥

∵ $ج_ن$ = $\frac{ن}{٢}$ [٢ أ + (ن − ١) ء] ∴ $ج_{١٥}$ = $\frac{١٥}{٢}$ [٢ × ٢ + ١٤ × ٥] = ٥٥٥

مثال ٦

في المتسلسلة الحسابية : ٣ + ٧ + ١١ + ... أوجد :

١ مجموع ١٠ حدود الأولى منها.

٢ مجموع ١٠ حدود ابتداءً من حدها الخامس.

٣ مجموع حدود المتسلسلة بدءً من ح ١٠ إلى ح ٢٠.

الحل

أ = ٣ ، ء = ٧ − ٣ = ٤

١ ∵ حـن = $\frac{ن}{٢}$ [٢ أ + (ن − ١) ء]

∴ حـ١٠ = $\frac{١٠}{٢}$ [٢ × ٣ + (١٠ − ١) × ٤] = ٥ [٦ + ٣٦] = ٢١٠

٢ ∵ حن = أ + (ن − ١) ء ∴ ح٥ = ٣ + (٥ − ١) × ٤ = ١٩

∴ حـ١٠ ابتداءً من ح٥ = $\frac{١٠}{٢}$ [٢ ح٥ + ٩ ء] = ٥ [٢ × ١٩ + ٩ × ٤] = ٣٧٠

٣ ∵ ح١٠ = أ + ٩ ء = ٣ + ٩ × ٤ = ٣٩ ، ح٢٠ = أ + ١٩ ء = ٣ + ١٩ × ٤ = ٧٩

، عدد الحدود (ن) = ٢٠ − ١٠ + ١ = ١١

، ∵ حـن = $\frac{ن}{٢}$ [أ + ل]

∴ حـ١١ ابتداءً من ح١٠ إلى ح٢٠ = $\frac{١١}{٢}$ [٣٩ + ٧٩] = ٦٤٩

مثال ٧

كم حدًا يلزم أخذه من حدود المتتابعة الحسابية (٣٥ ، ٣٠ ، ٢٥ ، ...) ابتداءً من حدها الأول ليكون مجموعها مساويًا ١٣٥ ؟ ثم علل وجود جوابين.

الحل

أ = ٣٥ ، ء = −٥ ، حـن = ١٣٥

∵ حـن = $\frac{ن}{٢}$ [٢ أ + (ن − ١) ء] ∴ ١٣٥ = $\frac{ن}{٢}$ [٢ × ٣٥ + (ن − ١) × −٥]

∴ ١٣٥ = $\frac{ن}{٢}$ [٧٠ − ٥ ن + ٥] ∴ ٢٧٠ = ن [٧٥ − ٥ ن]

∴ ٢٧٠ = ٧٥ ن − ٥ ن^{٢} ∴ ٥ ن^{٢} − ٧٥ ن + ٢٧٠ = ٠

∴ ن^{٢} − ١٥ ن + ٥٤ = ٠ ∴ (ن − ٩) (ن − ٦) = ٠

∴ ن = ٦ أ، ن = ٩

أي أن : مجموع الستة حدود الأولى = مجموع التسعة حدود الأولى.

وهذا يعني أن مجموع الحدود ابتداءً من ح٧ إلى ح٩ = صفر

مثال ٨

أوجد المتتابعة الحسابية التى فيها $ح_١$ = ١٢ ، $ح_ن$ = ٧٨ ، $جـ_ن$ = ١٠٣٥ حيث ن عدد حدودها.

الحـل

∵ $ح_١$ = ١٢ ∴ أ = ١٢

، ∵ $ح_ن$ = ٧٨ ∴ ل = ٧٨

، ∵ $جـ_ن$ = ١٠٣٥ ∴ $\frac{ن}{٢}$ [أ + ل] = ١٠٣٥ ∴ $\frac{ن}{٢}$ [١٢ + ٧٨] = ١٠٣٥

∴ $\frac{ن}{٢}$ × ٩٠ = ١٠٣٥ ∴ ن = ٢٣ ∴ عدد حدود المتتابعة = ٢٣ حدًا

∴ $ح_{٢٣}$ = ٧٨ ∴ أ + ٢٢ ء = ٧٨ ∴ ١٢ + ٢٢ ء = ٧٨

∴ ٢٢ ء = ٦٦ ∴ ء = ٣

∴ المتتابعة الحسابية هى : (١٢ ، ١٥ ، ١٨ ، .... ، ٧٨)

مثال ٩

أوجد أكبر مجموع للمتتابعة الحسابية (٤٥ ، ٤١ ، ٣٧ ، ...)

الحـل

∵ أكبر مجموع للمتتابعة = مجموع الحدود الموجبة فقط لذلك نوجد عدد الحدود الموجبة بوضع $ح_ن$ > ٠

∴ أ + (ن - ١) ء > ٠ ∴ ٤٥ + (ن - ١) × -٤ > ٠ ∴ ٤٥ - ٤ ن + ٤ > ٠

∴ ٤٩ - ٤ ن > ٠ ∴ ٤ ن < ٤٩ ∴ ن < ١٢$\frac{١}{٤}$

∴ ن = ١٢ ∴ عدد الحدود الموجبة = ١٢ حدًا

∴ أكبر مجموع للمتتابعة = $جـ_{١٢}$ = $\frac{١٢}{٢}$ [٢ × ٤٥ + ١١ × -٤] = ٢٧٦

مثال ١٠

متتابعة حسابية مجموع حديها الثانى والثالث = ١٣ ، مجموع العشرين حدًا الأولى منها ٦١٠ أوجد المتتابعة واحسب عدد الحدود التى يلزم أخذها ابتداءً من حدها الأول ليكون مجموعها ١٥٥

الحـل

∵ $ح_٢$ + $ح_٣$ = ١٣ ∴ (أ + ء) + (أ + ٢ ء) = ١٣

∴ ٢ أ + ٣ ء = ١٣ (١)

، ∵ $جـ_{٢٠}$ = ٦١٠ ∴ $\frac{٢٠}{٢}$ [٢ أ + ١٩ ء] = ٦١٠

∴ ٢ أ + ١٩ ء = ٦١ (٢)

وبطرح (١) من (٢) : ∴ ١٦ ء = ٤٨ ∴ ء = ٣

وبالتعويض فى (١) : ∴ $أ = ٢$

∴ المتتابعة هى (٢ ، ٥ ، ٨ ، ...)

∵ $ح_ن = \frac{ن}{٢}\left[٢أ + (ن - ١)ء\right]$

∴ $١٥٥ = \frac{ن}{٢}\left[٢ \times ٢ + (ن - ١) \times ٣\right]$

∴ $١٥٥ \times ٢ = ن\left[٣ن + ١\right]$

∴ $٣ن^٢ + ن - ٣١٠ = ٠$

∴ $(ن - ١٠)(٣ن + ٣١) = ٠$

∴ $ن = ١٠$ أ، $ن = \frac{-٣١}{٣} \notin ص^+$ (مرفوض)

∴ عدد الحدود الذى يجعل المجموع مساويًا ١٥٥ هو ١٠ حدود.

مثال ⓫

أوجد المتتابعة الحسابية التى مجموع الحدود العشرة الأولى منها ١٢٠ ومجموع الحدود الستة التالية لها ١٦٨

الحــل

∵ $ح_{١٠}$ الأولى = ١٢٠

∴ $\frac{١٠}{٢}\left[٢أ + ٩ء\right] = ١٢٠$

∴ $٢أ + ٩ء = ٢٤$ (١)

، ∵ $ح_{١٦} = ١٢٠ + ١٦٨ = ٢٨٨$

∴ $\frac{١٦}{٢}\left[٢أ + ١٥ء\right] = ٢٨٨$

∴ $٢أ + ١٥ء = ٣٦$ (٢)

وبطرح (١) من (٢) : ∴ $٦ء = ١٢$

∴ $ء = ٢$

وبالتعويض فى (١) : ∴ $أ = ٣$

∴ المتتابعة هى (٣ ، ٥ ، ٧ ، ...)

مثال ⓬

أوجد مجموع الأعداد الصحيحة المحصورة بين ١٠ ، ١٠٠ والتى لا تقبل القسمة على ٧

الحــل

لإيجاد مجموع الأعداد الصحيحة المحصورة بين ١٠ ، ١٠٠ والتى لا تقبل القسمة على ٧ نتبع الآتى :

١ نحسب مجموع جميع الأعداد الصحيحة المحصورة بين ١٠ ، ١٠٠

وهى (١١ ، ١٢ ، ١٣ ، ... ، ٩٩) متتابعة حسابية فيها $أ = ١١$ ، $ء = ١$ ، $ل = ٩٩$

∵ $ل = أ + (ن - ١)ء$

∴ $٩٩ = ١١ + (ن - ١) \times ١$

∴ $٩٩ = ن + ١٠$

∴ $ن = ٨٩$

∵ $ح_ن = \frac{ن}{٢}(أ + ل)$

∴ $ح_{٨٩} = \frac{٨٩}{٢}(١١ + ٩٩) = ٤٨٩٥$

٢ نحسب مجموع جميع الأعداد الصحيحة المحصورة بين ١٠ ، ١٠٠ والتى تقبل القسمة على ٧ وهى (١٤ ، ٢١ ، ٢٨ ، ... ، ٩٨) متتابعة حسابية فيها $أ = ١٤$ ، $ء = ٧$ ، $ل = ٩٨$

∵ $ل = أ + (ن - ١)ء$

∴ $٩٨ = ١٤ + (ن - ١) \times ٧$

∴ $٩٨ = ٧ + ٧ن$

∴ $ن = ١٣$

∴ $ح_{١٣} = \frac{١٣}{٢}(١٤ + ٩٨) = ٧٢٨$

، من ١ ، ٢ : ∴ مجموع الأعداد الصحيحة المحصورة بين ١٠ ، ١٠٠

والتى لا تقبل القسمة على ٧ = ٤٨٩٥ – ٧٢٨ = ٤١٦٧

مثال ١٣

وفر رجل فى نهاية سنة ما مبلغ ٧٥٠٠ جنيه ثم أخذ يزيد ما يوفره فى كل سنة بمقدار ١٥٠٠ جنيه عن السنة السابقة لها. أوجد :

١ مقدار ما يوفره الرجل فى السنة السابعة عشر. ٢ جملة ما يوفره الرجل فى ١٧ عامًا.

الحل

المبالغ التى يوفرها الرجل فى نهاية كل سنة تكون المتتابعة الحسابية

(٧٥٠٠ ، ٩٠٠٠ ، ١٠٥٠٠ ، ...) التى حدها الأول = ٧٥٠٠ وأساسها = ١٥٠٠

١ ما يوفره الرجل فى السنة السابعة عشر = $ح_{١٧}$ من هذه المتتابعة = أ + ١٦ ء

= ٧٥٠٠ + ١٦ × ١٥٠٠ = ٣١٥٠٠ جنيه.

٢ جملة ما يوفره الرجل فى ١٧ عامًا = مجموع ١٧ حدًا الأولى من هذه المتتابعة.

= $\frac{ن}{٢}$ (أ + ل) حيث ل = $ح_{١٧}$ = ٣١٥٠٠ جنيه. = $\frac{١٧}{٢}$ (٧٥٠٠ + ٣١٥٠٠)

= $\frac{١٧}{٢}$ × ٣٩٠٠٠ = ٣٣١٥٠٠ جنيه.

مثال ١٤

فى مسابقة لإحدى شركات المياه الغازية وضعت ٢٤ زجاجة على خط مستقيم واحد والمسافة بين كل زجاجة وأخرى ٥ أمتار ووضع صندوق مجاور للزجاجة الأولى ، فإذا قام متسابق بجمع هذه الزجاجات واحدة تلو الأخرى ثم وضعها فى الصندوق دون تحريكه فأوجد المسافة التى قطعها المتسابق حتى أتم جمع الزجاجات كلها.

الحل



المتسابق يضع الزجاجة الأولى فى الصندوق دون قطع أى مسافة لأنها مجاورة للصندوق ثم يمشى ٥ أمتار حتى يصل إلى الزجاجة الثانية ويعود نفس المسافة ليضعها فى الصندوق ثم يمشى عشرة أمتار حتى يصل إلى الزجاجة الثالثة ويعود نفس المسافة ليضعها فى الصندوق وهكذا ...

مجموع المسافات التى يمشيها = ٢ × ٥ + ٢ × ١٠ + ٢ × ١٥ + ... إلى ٢٣ حدًا.

= ٢ (٥ + ١٠ + ١٥ + ... إلى ٢٣ حدًا)

= ٢ × مجموع ٢٣ حدًا من متتابعة حسابية حدها الأول ٥ وأساسها ٥

= ٢ × $\frac{٢٣}{٢}$ [٢ × ٥ + ٢٢ × ٥] = ٢٣ (١٠ + ١١٠)

= ٢٣ × ١٢٠ = ٢٧٦٠ مترًا.

تمارين 3 على المتسلسلات الحسابية

اختبر نفسك

من أسئلة الكتاب المدرسي • فهم • تطبيق • مستويات عليا

أولًا أسئلة الاختيار من متعدد

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

(١) قيمة المتسلسلة الحسابية $\sum_{ر=١}^{٥} (٢ ر + ١)$ تساوى ....

(أ) ٢٥ (ب) ٣٠ (جـ) ٣٥ (د) ٤٠

(٢) قيمة المتسلسلة الحسابية $\sum_{ر=١}^{٢٠} (٣ - ٢ ر)$ تساوى ....

(أ) ٤٠٠ (ب) −٤٠٠ (جـ) −٣٦٠ (د) ٣٨٠

(٣) قيمة المتسلسلة : ٤ + ٩ + ١٤ + ... + (٥ ن − ١) باستخدام رمز التجميع هى ....

(أ) $\sum_{ر=٤}^{ن} (٥ ر - ١)$ (ب) $\sum_{ر=١}^{ن} (٥ ر + ١)$

(جـ) $\sum_{ر=١}^{ن} (٥ ر - ١)$ (د) $\sum_{ر=١}^{٥ن-١} (٣ ر + ١)$

(٤) قيمة المتسلسلة : ٧ + ١٢ + ١٧ + ٢٢ باستخدام رمز التجميع هى ....

(أ) $\sum_{ر=١}^{٤} (٥ ر + ٢)$ (ب) $\sum_{ر=١}^{٤} (٤ ر + ٣)$

(جـ) $\sum_{ر=١}^{٤} (٧ ر + ١)$ (د) $\sum_{ر=١}^{٤} (٣ ر + ٤)$

(٥) مجموع حدود المتتابعة الحسابية (٣ ، ٥ ، ٧ ، ... ، (٢ ن + ١)) ابتداءً من حدها الأول يساوى ....

(أ) ن(ن + ١) (ب) ن(ن + ٢)

(جـ) ن(ن + ٥) (د) ن(ن + ٢) (ن + ٣)

(٦) متتابعة حسابية مجموع حديها الأول والأخير ٤٦ ومجموع حدودها ٣٤٥ فإن عدد حدودها = ...

(أ) ٢٥ (ب) ١٥ (جـ) ٢٣ (د) ٢٢

(٧) متتابعة حسابية حدها الأول = ١٢ ، وحدها الأخير = −٢٦ ومجموع حدودها يساوى −١٤٠ ، فإن المتتابعة هى ....

(أ) (١٢ ، ٨ ، ٤ ، ... ، −٢٦) (ب) (١٢ ، ٩ ، ٦ ، ... ، −٢٦)

(جـ) (١٢ ، ٦ ، ٠ ، ... ، −٢٦) (د) (١٢ ، ١٠ ، ٨ ، ... ، −٢٦)



(٨) إذا كان : $ح_{ن+١} - ح_{ن} = ٢$ فى متتابعة حسابية وكان الحد الأول من المتتابعة = ٦

فإن مجموع العشرة حدود الأولى منها = ...

(أ) ١٥٠ (ب) ١٨٠ (جـ) ٢١٠ (د) ٢٤٠

(٩) مجموع حدود المتسلسلة الحسابية : ٨٩ + ٨٥ + ٨١ + ... + ٣٣ = ...

(أ) ٩٠٠ (ب) ٩١٠ (جـ) ٨٩٥ (د) ٩١٥

(١٠) مجموع حدود المتسلسلة الحسابية : $\frac{١}{٢} + \frac{٣}{٢} + \frac{٥}{٢} + \cdots + \frac{١٣}{٢}$ = ...

(أ) ٢٣,٥ (ب) ٢٤,٥ (جـ) ٢٥ (د) ٢٢,٥

(١١) مجموع حدود المتسلسلة الحسابية : ٢ + ٥ + ٨ + ⋯ + ٦٢ = ...

(أ) ٦٦٤ (ب) ٦٧٠ (جـ) ٦٦٠ (د) ٦٧٢

(١٢) مجموع المتسلسلة : $\frac{١}{٢} + \frac{١}{٣} + \frac{١}{٦} + \cdots$ إلى ٩ حدود = ...

(أ) $\frac{-٥}{٦}$ (ب) $-\frac{١}{٢}$ (جـ) ١ (د) $\frac{-٣}{٢}$

(١٣) مجموع ٣٠ حدًا الأولى من المتتابعة $(ح_{ن})$ حيث $ح_{ن} = ٢ن + ٣$ هو ....

(أ) ١٠٠٠ (ب) ١٠٢٤ (جـ) ١٠٢٠ (د) ١٠١٠

(١٤) مجموع الأعداد الزوجية بداية من ٤ إلى ٤٠ يساوى ....

(أ) ٨١٤ (ب) ١٨٤ (جـ) ١٤٨ (د) ٤١٨

(١٥) مجموع ن حدًا الأولى من متتابعة الأعداد الطبيعية الفردية هو ....

(أ) ٢ن (ب) $ن^٢$ (جـ) $\frac{ن(ن-١)}{٢}$ (د) $\frac{ن(ن+١)}{٢}$

(١٦) مجموع الأعداد الطبيعية التى تقبل القسمة على ٣ ومحصورة بين ٣٠ ، ٥٠ يساوى ....

(أ) ٨١ (ب) ٢٤٣ (جـ) ٣٤٣ (د) ٥١٢

(١٧) مجموع الأعداد الصحيحة المحصورة بين ١٠٠ ، ١٧٠ والتى لا يقبل كل منها القسمة على ٣ يساوى ....

(أ) ٥١٥٠ (ب) ٧١٢٠ (جـ) ٦١٧٠ (د) ٦٢١٠

(١٨) مجموع الأعداد الطبيعية الفردية التى هى أكبر من ١٠ وأقل من ٣٠ يساوى ....

(أ) ١٠٠ (ب) ١٥٠ (جـ) ٢٠٠ (د) ٢٥٠

(١٩) مجموع ٣٠ حدًا متتالية من المتتابعة (٢ن − ١) ابتداءً من $ح_{١٠}$ هو ....

(أ) ١٣٣٥ (ب) ١٧٤٠ (جـ) ١٦٧٥ (د) ١٧٢٠

(٢٠) مجموع الثمانية حدود الأولى من المتتابعة الحسابية التى حدها الرابع ٢ وحدها السابع $\frac{١}{٤}$ هو ....

(أ) ١٣ (ب) $١٢\frac{١}{٢}$ (جـ) $١٣\frac{٢}{٣}$ (د) $١٣\frac{١}{٢}$

(٢١) أى المتتابعات الحسابية الآتية مجموع العشرين حدًا الأولى منها ٨٢٠ ؟

(أ) (٢ ، ٦ ، ١٠ ، ...) (ب) (١ ، ٥ ، ٩ ، ...)

(جـ) (٣ ، ٧ ، ١١ ، ...) (د) (٤ ، ٨ ، ١٢ ، ...)

(٢٢) إذا كان مجموع العشرين حدًا الأولى من متتابعة حسابية يساوى ٨٦٠ ومجموع حديها الثالث والرابع يزيد عن حدها السادس بمقدار ٥ فإن المتتابعة هى ....

(أ) (٤ ، ٩ ، ١٤ ، ...) (ب) (٥ ، $٩\frac{١}{٢}$ ، ١٤ ، ...)

(جـ) (٥ ، ٩ ، ١٣ ، ...) (د) (٥ ، ٨ ، ١١ ، ...)

(٢٣) 📖 متتابعة حسابية حدها الثانى = ١٣ ، ومجموع العشرة حدود الأولى منها = ٢٣٥ فإن المتتابعة هى ....

(أ) (٨ ، ١٣ ، ١٨ ، ...) (ب) (٩ ، ١٣ ، ١٧ ، ...)

(جـ) (١٢ ، ١٣ ، ١٤ ، ...) (د) (١٠ ، ١٣ ، ١٦ ، ...)

(٢٤) إذا كانت : $(ح_ن)$ متتابعة حسابية فيها $ح_ن = ٨١ - ٢ن$ فإن : $جـ_{٨٠}$ الأولى = ...

(أ) صفر (ب) ٨١ (جـ) ‎-٨١ (د) ‎-١٦٢

(٢٥) متتابعة حسابية حدها الأول = ٧ ومجموع ١٠ حدود الأولى منها = ٢٥٠ فإن : $ح_{٢٠}$ = ...

(أ) ٨٧ (ب) ٨٣ (جـ) ٨٦ (د) ٩١

(٢٦) متتابعة حسابية مكونة من ٢٧ حدًا وحدها الأوسط ٤١ فإن مجموع حدود هذه المتتابعة = ...

(أ) ٥٥٣,٥ (ب) ١١٠٧ (جـ) ٢٢١٤ (د) ٦٨

(٢٧) متتابعة حسابية عدد حدودها ن حدًا حيث ن عدد فردى والحد الأوسط منها = م فإن مجموع المتتابعة = ...

(أ) ٢ م ن (ب) $\frac{١}{٢}$ م ن (جـ) م ن (د) م $ن^٢$

(٢٨) أوجد عدد الحدود التى يجب أخذها من المتتابعة الحسابية (١ ، ٣ ، ٥ ، ...) ابتداءً من حدها الأول ليكون مجموع هذه الحدود مساويًا ٤٠٠ هو .... حدًا.

(أ) ١٨ (ب) ٢١ (جـ) ٢٠ (د) ١٩

(٢٩) 📖 عدد الحدود اللازم أخذها من المتتابعة (٢٧ ، ٢٤ ، ٢١ ، ...) ابتداءً من الحد الأول ليتلاشى المجموع هو .... حدًا.

(أ) ١٨ (ب) ١٩ (جـ) ٢٠ (د) ٢١

(٣٠) أكبر عدد من الحدود يمكن أخذه من المتتابعة $(ح_{ن})$ = (٣٢ ، ٢٨ ، ٢٤ ، ...) ابتداءً من الحد الأول ليكون المجموع موجب هو ....

(أ) ١٦ (ب) ١٧ (جـ) ١٨ (د) ٢٠

(٣١) أكبر مجموع لحدود المتتابعة الحسابية التى فيها $ح_{٦}$ = ١٦ ، $ح_{١٨}$ = −٢٠ هو ....

(أ) ١٧٣ (ب) ١٧٦ (جـ) ١٧٩ (د) ١٨٢

(٣٢) أكبر مجموع لحدود المتتابعة الحسابية (٣٣ ، ٣١ ، ٢٩ ، ...) يساوى ....

(أ) ٢٨٠ (ب) ٢٩٨ (جـ) ٢٩٠ (د) ٢٨٩

(٣٣) أصغر مجموع للمتتابعة الحسابية (−٢٤ ، −٢٠ ، −١٦ ، ...) يساوى ....

(أ) صفر (ب) −٨٦ (جـ) −٨٤ (د) −٨٨

(٣٤) أصغر عدد من الحدود يمكن أخذه من المتتابعة (٨٩ ، ٨١ ، ٧٣ ، ...) ابتداءً من الحد الأول ليكون المجموع سالبًا هو .... حدًا.

(أ) ٢٥ (ب) ٢٤ (جـ) ٢٦ (د) ٢٣

(٣٥) أكبر عدد من الحدود يمكن أخذه من المتتابعة (٢٥ ، ٢١ ، ١٧ ، ...) ابتداءً من الحد الأول ليكون المجموع موجبًا هو .... حدًا.

(أ) ١٢ (ب) ١٤ (جـ) ١٣ (د) ١١

(٣٦) عند إدخال ٢٨ وسطًا حسابيًا بين ٤ ، ٩١ فإن مجموع حدود المتتابعة الحسابية الناتجة = ...

(أ) ١٢٢٥ (ب) ١٣١٥ (جـ) ١٤٢٥ (د) ١٥٢٥

(٣٧) عند إدخال «ن» وسطًا حسابيًا بين ٣ ، ٥١ فإن مجموع المتتابعة الحسابية الناتجة يساوى ....

(أ) ٢٧ (ن − ٢) (ب) ٢٧ (ن − ١) (جـ) ٢٧ (ن + ١) (د) ٢٧ (ن + ٢)

(٣٨) المتتابعة الحسابية التى مجموع العشرين حدًا الأولى منها = ٨٢٠ والوسط الحسابى لحديها الرابع والسابع = ٢١ هى ....

(أ) (٢ ، ٧ ، ١٢ ، ...) (ب) (٤ ، ٨ ، ١٢ ، ...)

(جـ) (٥ ، ٧ ، ٩ ، ...) (د) (٣ ، ٧ ، ١١ ، ...)

(٣٩) فى المتتابعة الحسابية (٥ ، ٨ ، ١١ ، ...) :

أولًا : مجموع ٢٠ حدًا الأولى منها = ...

(أ) ٦٧٠ (ب) ٨٢٠ (جـ) ٥٢٥ (د) ٦٩٠

ثانيًا : مجموع ١٠ حدود من حدودها ابتداءً من الحد السابع = ...

(أ) ٣٧٥ (ب) ٣٨٥ (جـ) ٣٥٥ (د) ٣٦٥

ثالثًا : مجموع حدود المتتابعة بدءًا من $ح_{١٠}$ إلى $ح_{٢٠}$ = ...

(أ) ٥١٣ (ب) ٥١٠ (جـ) ٥١٧ (د) ٥٢٠

(٤٠) متتابعة حسابية حدها الثانى = ٢٣ ، وحدها قبل الأخير = ٩٧ ومجموع حدودها ٢٤٠٠ فإن :

أولًا : عدد حدود المتتابعة = ... حدًا.

(أ) ٣٨ (ب) ٤٠ (جـ) ٤٢ (د) ٤٣

ثانيًا : المتتابعة هى ....

(أ) (٢١ ، ٢٢ ، ٢٣ ، ... ، ٩٨) (ب) (١٩ ، ٢٢ ، ٢٥ ، ... ، ١٠٠)

(جـ) (٢١ ، ٢٣ ، ٢٥ ، ... ، ٩٩) (د) (٢٠ ، ٢٤ ، ٢٨ ، ... ، ١٠١)

(٤١) إذا كان مجموع ن حدًا الأولى من متتابعة حسابية يتعين بالقانون : $جـ_ن = ٢ ن (٧ - ن)$ فإن :

أولًا : $ح_٧$ = ...

(أ) -١٥ (ب) -١٢ (جـ) -١٤ (د) -١١

ثانيًا : عدد الحدود اللازم أخذها من المتتابعة ابتداءً من الحد الأول حتى يكون المجموع مساويًا -٢٤٠ هو .... حدًا

(أ) ١٥ (ب) ١٧ (جـ) ١٤ (د) ١٢

(٤٢) متتابعة حسابية فيها $ح_٥ - ح_٤ = ٢٠$ ، $ح_٨ - ح_٧ = ٢٩$ فإن : $ح_{١٥}$ = ...

(أ) ٤٩ (ب) ٩٨ (جـ) ١٥٥ (د) ١٥٨

(٤٣) متتابعة حسابية حدها الأول = ٣ ، وحدها الأخير = ٣٩ ومجموع حدودها = ٢١٠

فإن عدد حدودها = ...

(أ) ٨ (ب) ١٠ (جـ) ١٢ (د) ١٥

(٤٤) إذا كان مجموع ن حدًا الأولى من متتابعة هو $\frac{ن}{ن + ١}$ فإن : $\frac{١}{ح_٨}$ = ...

(أ) ٦٤ (ب) ٨٠ (جـ) ٧٥ (د) ٧٢

(٤٥) إذا كان : $\frac{٣ + ٥ + ٧ + ... \text{ إلى ن حدًا}}{٥ + ٨ + ١١ + ... \text{ إلى ١٠ حدود}} = ٧$ فإن : ن = ...

(أ) ٣٥ (ب) ٣٦ (جـ) ٣٧ (د) ٤٠

(٤٦) $\frac{٢ + ٦ + ١٠ + ... \text{ إلى ٧٥ حدًا من متتابعة حسابية}}{٣ + ٩ + ١٥ + ... + ٢٩٧ \text{ متسلسلة حسابية}}$ = ...

(أ) $\frac{٣}{٤}$ (ب) $\frac{٤}{٣}$ (جـ) $\frac{٢}{٣}$ (د) $\frac{٣}{٢}$

(٤٧) $\frac{١ + ٣ + ٥ + \dots \text{ إلى } ن \text{ حدًا من متتابعة حسابية}}{٢ + ٤ + ٦ + \dots + \text{ إلى } ن \text{ حدًا من متتابعة حسابية}}$ = ...

(أ) $\frac{٢ن}{ن + ١}$ (ب) $\frac{ن + ١}{٢}$ (جـ) $\frac{ن}{ن + ١}$ (د) $\frac{ن + ١}{ن + ٢}$

(٤٨) ما عدد الدقات التى تدقها ساعة الحائط فى اليوم إذا علم أنها تدق مرة واحدة عند الساعة الواحدة ثم مرتين عند الساعة الثانية وهكذا ؟

(أ) ١٥٦ (ب) ١٣٢ (جـ) ١٢٠ (د) ٧٨

(٤٩) فى أحد المسارح تم تنظيم المقاعد بحيث يحتوى الصف الأخير على ٤٥ مقعد ثم ينقص كل صف تالى بمقدار ٢ مقعد عن الصف السابق ، فإذا كان عدد مقاعد المسرح ٥٢٠ مقعد فإن عدد الصفوف = ...

(أ) ٢٠ (ب) ٢٦ (جـ) ٢٠ أ، ٢٦ (د) ٢٣

ثانيًا الأسئلة المقالية

١ أوجد :

(١) مجموع حدود المتتابعة الحسابية (٢ ، ٥ ، ٨ ، ... ، ٨٠) «١١٠٧»

(٢) مجموع الأعداد الصحيحة المحصورة بين ٣ ، ١٠٠٠ وكل منها يقبل القسمة على ٧ «٧١٠٧١»

(٣) مجموع الحدود الفردية الرتبة من حدود المتتابعة الحسابية (٢ ، ٥ ، ٨ ، ... ، ١١٠) «١٠٦٤»

(٤) مجموع النصف الأخير من حدود المتتابعة الحسابية (٨ ، ١١ ، ١٤ ، ... ، ٧١) «٦١٦»

(٥) مجموع الثلث الأخير من حدود المتتابعة الحسابية (٢٥ ، ٢١ ، ١٧ ، ... ، −١٢٧) «−١٣٣٩»

---

٢ كم حدًا يلزم أخذه من المتتابعة الحسابية (٤٠ ، ٣٦ ، ٣٢ ، ...) ابتداءً من حدها الأول ليكون مجموعها ٢٠٨ ؟ فسر معنى الجوابين. «٨ أ، ١٣»

---

٣ فى المتسلسلة الحسابية (٩ + ١٢ + ١٥ + ...) أوجد :

(١) مجموع ١٥ حدًا الأولى منها.

(٢) مجموع حدود المتتابعة ابتداءً من الحد الخامس إلى الحد الخامس عشر.

(٣) عدد الحدود التى مجموعها يساوى ٧٥٠ ابتداءً من الحد الأول. «٤٥٠ ، ٣٩٦ ، ٢٠»

---

٤ أوجد أكبر مجموع لحدود المتتابعة الحسابية (٣٣ ، ٣١ ، ٢٩ ، ...) «٢٨٩»

---

٥ متتابعة حسابية حدها الأول = ٧ ومجموع ١٠ حدود الأولى منها = ٢٥٠ أوجد المتتابعة. «(٧ ، ١١ ، ١٥ ، ...)»

٦ متتابعة حسابية حدها الأول = ١٢ ، وحدها الأخير = −٢٦ ، ومجموع حدودها يساوى −١٤٠

أوجد هذه المتتابعة. «(١٢ ، ١٠ ، ٨ ، ... ، −٢٦)»

---

٧ أوجد المتتابعة الحسابية التى فيها :

(١) $ح_١ = ٢٣$ ، $ح_ن = ٨٦$ ، $حـ_ن = ٥٤٥$ «(٢٣ ، ٣٠ ، ٣٧ ، ... ، ٨٦)»

(٢) $ح_١ = ١٧$ ، $ح_ن = -٩٥$ ، $حـ_ن = -٥٨٥$ «(١٧ ، ٩ ، ١ ، ... ، −٩٥)»

---

٨ أدخل ثمانية أوساط حسابية بين العددين ٢ ، ٢٩ ثم أوجد مجموع تلك الأوساط. «١٢٤»

---

٩ أدخل ١٧ وسطًا حسابيًا بين ٤٢ ، −١٢ لكى تكون متتابعة حسابية ثم أوجد رتبة أول حد سالب ومجموع حدود المتتابعة. «١٦ ، ٢٨٥»

---

١٠ أوجد المتتابعة الحسابية التى مجموع حديها الثالث والخامس ٢٢ وينقص حدها الرابع عن حدها السابع بمقدار ٩ ثم أوجد مجموع ٢٥ حدًا الأولى منها. «(٢ ، ٥ ، ٨ ، ...) ، ٩٥٠»

---

١١ متتابعة حسابية حدها الأول ٢٩ وحدها الثانى يساوى خمسة أمثال حدها السابع أوجد المتتابعة ثم أوجد عدد الحدود التى يجب أخذها بدءًا من حدها الأول حتى يكون المجموع أكبر ما يمكن. «(٢٩ ، ٢٥ ، ٢١ ، ...) ، ٨»

---

١٢ متتابعة حسابية حدها العشرون يساوى ٤١ ، ويزيد مجموع حديها الثالث والسادس عن حدها التاسع بمقدار الوحدة. أوجد المتتابعة وعدد الحدود اللازم أخذها منها ابتداءً من الحد الأول ليكون المجموع ٤٤٠

«(٣ ، ٥ ، ٧ ، ...) ، ٢٠»

---

١٣ أوجد المتتابعة الحسابية التى مجموع العشرين حدًا الأولى منها = ٨٢٠ والوسط الحسابى لحديها الرابع والسابع = ٢١ «(٣ ، ٧ ، ١١ ، ...)»

---

١٤ متتابعة حسابية مجموع السبعة حدود الأولى منها = ٢٤٥ ومجموع السبعة حدود التالية لها = ٩٨

أوجد المتتابعة. «(٤٤ ، ٤١ ، ٣٨ ، ...)»

ثالثًا مسائل تقيس مهارات التفكير

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

(١) إذا أُدخلت ن من الأوساط الحسابية بين عددين أ ، ب فإن مجموع هذه الأوساط يساوى ....

(أ) $\frac{أ + ب}{٢}$ (ب) $ن\left(\frac{أ + ب}{٢}\right)$ (جـ) $ن(أ - ب)$ (د) $\frac{ن}{٢}(ب - أ)$



(٢) إذا كانت ($ح_ن$) متتابعة حسابية فيها : $ح_١ + ح_٥ + ح_{١٠} + ح_{١٦} = ٦٤$

فإن مجموع ١٥ حدًا الأولى = ...

(أ) ١٢٠ (ب) ١٨٠ (جـ) ٢٤٠ (د) ٣٦٠

تطبيقات عملية على المتتابعة الحسابية

١ مسرح به ٢٥ صفًا من الكراسى ، يحتوى الصف الأول على ٢٠ كرسيًا ، ويحتوى الصف الثانى على ٢٢ كرسيًا ويحتوى الصف الثالث على ٢٤ كرسيًا وهكذا ، أوجد عدد الكراسى فى جميع صفوف المسرح. «١١٠٠ كرسى»

---

٢ **ادخار :** يدخر زياد من عمله اليومى ١٥ جنيهًا ، فإذا كان يدخر فى كل يوم مبلغًا يزيد بمقدار جنيهين عن اليوم السابق له مباشرة ، فأوجد مجموع ما يدخره خلال ١٥ يومًا. «٤٣٥ جنيهًا»

---

٣ **الربط بالتجارة :** اقترض رجل مبلغًا من المال ، واتفق على أن يقوم بسداده على ١٠ أقساط ، يبدأ القسط الأول بمبلغ ٥٠٠ جنيه ، وكل قسط تالٍ يزيد عن القسط السابق له مباشرة بـ ٢٠٠ جنيه ، فما قيمة القرض ؟ «١٤٠٠٠ جنيه»

٤ شخص مدين بمبلغ ٤٨٠٠٠ جنيه قرر أن يسدد دينه على عشرين قسطًا سنويًا تكون متتابعة حسابية وبعد أن دفع ٥ أقساط توفى وعليه $\frac{٤}{٥}$ الدين فكم كان مقدار القسط الأول ؟ «١٧٩٢ جنيهًا»

---

٥ **صيانة :** أسندت إحدى الشركات عمل صيانة شاملة لأحد مبانيها ، وحددت موعدًا لاستلام المبنى ، وكان من بين شروط التعاقد أنه فى حالة التأخير عن الموعد أن يدفع المسئول ١٠٠٠ جنيه غرامة عن اليوم الأول وتزداد ١٠٠ جنيه عن كل يوم تالٍ له ، فإذا تأخر المقاول عن تسليم هذه الأعمال خمسة أيام ، فكم يكون إجمالى المبلغ المستحق لتسديد غرامة التأخير ؟ «٦٠٠٠ جنيه»

---

٦ فى إحدى المسابقات المدرسية وضعت ٢١ ثمرة على خط مستقيم واحد والمسافة بين كل ثمرة وأخرى متران ووضع صندوق مجاور للثمرة الأولى فإذا قام متسابق بجمع هذه الثمار واحدة تلو الأخرى ثم وضعها فى الصندوق دون تحريك الصندوق فأوجد المسافة التى قطعها المتسابق حتى أتم جمع الثمار كلها. «٨٤٠ مترًا»

---

٧ **الربط بالرياضة :** يستعد زياد لسباق المسافات الطويلة ، فقرر أن يتدرب على الجرى مسافة ٤ كيلو مترات فى اليوم الأول ثم يقوم بزيادة المسافة بمقدار نصف كيلو متر واحد يوميًا.

(١) أوجد المسافة التى يقطعها زياد فى اليوم السابع.

(٢) أوجد مجموع المسافات التى يقطعها زياد فى الأسبوع الأول (الأسبوع سبعة أيام).

(٣) إذا استمر زياد فى التدريب على هذا النمط دون انقطاع فما عدد الأيام التى يقطع خلالها مسافة ٨١ كيلو مترًا ؟ «٧ كم ، $٣٨\frac{١}{٢}$ كم ، ١٢ يومًا»



الدرس

4

المتتابعة الهندسية

تعريف

تسمى المتتابعة $(ح_ن)$ حيث $ح_ن \neq ٠$ متتابعة هندسية إذا كان : $\frac{ح_{ن+١}}{ح_ن}$ = (مقدارًا ثابتًا) لكل $ن \in ص^+$

وهذا المقدار الثا بت يسمى أساس المتتابعة الهندسية ويرمز له بالرمز ر

أى أن : ر (أساس المتتابعة الهندسية) = $\frac{\text{أى حد فيها}}{\text{الحد السابق له مباشرة}}$

مثال ١

بين أى المتتابعات الآتية تكون متتابعة هندسية وأوجد أساسها :

١ $(ح_ن) = (٢ \times ٥^{ن-١})$

٢ $(ح_ن) = (٣ ن^٢)$

٣ $(ح_ن) = (٥ + ٣ن)$

٤ $(ح_ن)$ حيث $ح_١ = ٦$ ، $ح_ن = \frac{١}{٤} \times ح_{ن-١}$ حيث $ن > ١$

الحل

١ $\because ح_ن = ٢ \times ٥^{ن-١}$ ، $ح_{ن+١} = ٢ \times ٥^{(ن+١)-١} = ٢ \times ٥^ن$

$\therefore \frac{ح_{ن+١}}{ح_ن} = \frac{٢ \times ٥^ن}{٢ \times ٥^{ن-١}} = ٥$ = مقدار ثابت.

$\therefore (ح_ن) = (٢ \times ٥^{ن-١})$ متتابعة هندسية أساسها ر = ٥

٢ ∵ $ح_ن = ٣ ن^٢$ ، $ح_{ن+١} = ٣ (ن + ١)^٢$

∴ $\frac{ح_{ن+١}}{ح_ن} = \frac{٣ (ن+١)^٢}{٣ ن^٢} = \left(\frac{ن+١}{ن}\right)^٢$ ≠ مقدار ثابت. ∴ $(ح_ن) = (٣ ن^٢)$ ليست متتابعة هندسية.

٣ ∵ $ح_ن = ٥ + ٣^ن$ ، $ح_{ن+١} = ٥ + ٣^{ن+١}$

∴ $\frac{ح_{ن+١}}{ح_ن} = \frac{٥ + ٣^{ن+١}}{٥ + ٣^ن}$ ≠ مقدار ثابت. ∴ $(ح_ن) = (٥ + ٣^ن)$ ليست متتابعة هندسية.

٤ ∵ $ح_ن = \frac{١}{٤} × ح_{ن-١}$ حيث ن > ١ ∴ $\frac{ح_ن}{ح_{ن-١}} = \frac{١}{٤}$ = مقدار ثابت.

∴ $(ح_ن) = (\frac{١}{٤} × ح_{ن-١})$ ، ن > ١ متتابعة هندسية وأساسها ر = $\frac{١}{٤}$

التمثيل البيانى للمتتابعة الهندسية

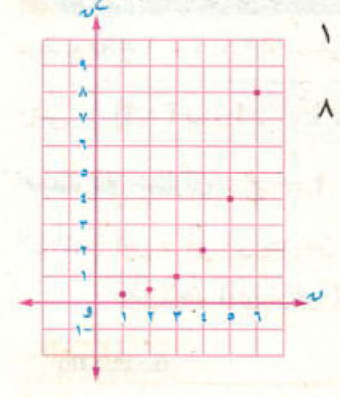
مثال ٢

أثبت أن المتتابعة : $(ح_ن) = (\frac{١}{٨} × ٢^ن)$ متتابعة هندسية ثم أوجد الستة حدود الأولى منها ومثلها بيانيًا.

الحل

∵ $\frac{ح_{ن+١}}{ح_ن} = \frac{\frac{١}{٨} × ٢^{ن+١}}{\frac{١}{٨} × ٢^ن} = ٢^{ن+١-ن} = ٢$ = مقدار ثابت.

∴ المتتابعة $(ح_ن) = (\frac{١}{٨} × ٢^ن)$ متتابعة هندسية وأساسها ر = ٢



، ∵ $ح_١ = \frac{١}{٨} × ٢ = \frac{١}{٤}$ ، $ح_٢ = \frac{١}{٨} × ٢^٢ = \frac{١}{٢}$ ، $ح_٣ = \frac{١}{٨} × ٢^٣ = ١$

، $ح_٤ = \frac{١}{٨} × ٢^٤ = ٢$ ، $ح_٥ = \frac{١}{٨} × ٢^٥ = ٤$ ، $ح_٦ = \frac{١}{٨} × ٢^٦ = ٨$

∴ الحدود الستة الأولى من المتتابعة الهندسية

يمثلها بيانيًا النقط : $(١ ، \frac{١}{٤})$ ، $(٢ ، \frac{١}{٢})$

، (٣ ، ١) ، (٤ ، ٢) ، (٥ ، ٤) ، (٦ ، ٨)

وهى نقط لا تقع على استقامة واحدة كما فى المتتابعة الحسابية.

لاحظ أنه : يمكن إيجاد كل حد من حدود المتتابعة بدءًا من حدها الثانى بضرب أساس المتتابعة ر فى الحد السابق له مباشرة ففى المثال السابق : $ح_١ = \frac{١}{٤}$ ، ر = ٢

∴ $ح_٢ = \frac{١}{٤} × ٢ = \frac{١}{٢}$ ، $ح_٣ = \frac{١}{٢} × ٢ = ١$ ، $ح_٤ = ١ × ٢ = ٢$ وهكذا ...

لاحظ أن : المتتابعة الهندسية يمثلها بيانيًا نقط منفصلة تقع على منحنى دالة أسية وليس دالة من الدرجة الأولى كما فى المتتابعة الحسابية.

ملاحظات

المتتابعة الهندسية التى حدها الأول = أ وأساسها = ر حيث ر ≠ ٠ تكون :

١ تزايدية إذا كان : ر > ١ ، أ > ٠ أو ٠ > ر > ١ ، أ > ٠

فمثلًا : • إذا كان : أ = ٣ ، ر = ٢ فإن المتتابعة الهندسية (٣ ، ٦ ، ١٢ ، ٢٤ ، ...) تزايدية.

• إذا كان : أ = −٦ ، ر = $\frac{١}{٣}$ فإن المتتابعة الهندسية (−٦ ، −٢ ، $\frac{-٢}{٣}$ ، $\frac{-٢}{٩}$ ، ...) تزايدية.

٢ تناقصية إذا كان : ٠ > ر > ١ ، أ > ٠ أو ر > ١ ، أ > ٠

فمثلًا : • إذا كان : أ = ٢ ، ر = $\frac{١}{٢}$ فإن المتتابعة الهندسية (٢ ، ١ ، $\frac{١}{٢}$ ، $\frac{١}{٤}$ ، ...) تناقصية.

• إذا كان : أ = −٢ ، ر = ٣

فإن المتتابعة الهندسية (−٢ ، −٦ ، −١٨ ، −٥٤ ، ...) تناقصية.

٣ ثابتة إذا كان : ر = ١

فمثلًا : إذا كان : أ = ٥ ، ر = ١ فإن المتتابعة (٥ ، ٥ ، ٥ ، ٥ ، ٥ ، ...) ثابتة.

الحد العام (النونى) للمتتابعة الهندسية

إذا كانت ($ح_ن$) متتابعة هندسية حدها الأول = أ ، أساسها = ر

فإن حدها العام يكون على الصورة $ح_ن = أ ر^{ن-١}$ حيث ن رتبة الحد.

الصورة العامة للمتتابعة الهندسية

بوضع ن = ١ ، ٢ ، ٣ ، ... فى القانون السابق نحصل على الصورة العامة للمتتابعة الهندسية

وهى : (أ ، أ ر ، أ $ر^٢$ ، أ $ر^٣$ ، ...)

حيث نلاحظ أن : $ح_١$ = أ ، $ح_٢$ = أ ر ، $ح_٣$ = أ $ر^٢$ ، ...

أى أن : أس ر فى أى حد من حدود المتتابعة الهندسية يقل بمقدار الواحد الصحيح عن رتبة هذا الحد (أى ترتيبه)

ملاحظة

إذا كانت المتتابعة الهندسية منتهية وعدد حدودها = ن

فإنه يرمز لحدها الأخير بالرمز ل حيث $ل = أ ر^{ن-١}$ حيث ن عدد الحدود

وتكون الصورة العامة للمتتابعة الهندسية فى هذه الحالة على الصورة :

(أ ، أ ر ، أ $ر^٢$ ، ... ، أ $ر^{ن-١}$) أ، (أ ، أ ر ، أ $ر^٢$ ، ... ، $\frac{ل}{ر^٢}$ ، $\frac{ل}{ر}$ ، ل)

مثال ٣

أوجد $ح_٦$ ، $ح_{١٠}$ من المتتابعة الهندسية (٦ ، ١٢ ، ٢٤ ، ...)

الحــل

أ = ٦ ، ر = $\frac{١٢}{٦}$ = ٢ ∴ $ح_٦$ = أ $ر^٥$ = ٦ × $٢^٥$ = ١٩٢ ، $ح_{١٠}$ = أ $ر^٩$ = ٦ × $٢^٩$ = ٣٠٧٢

مثال ٤

إذا كان $\frac{١}{٢٤٣}$ هو أحد حدود المتتابعة الهندسية (٢٧ ، ٩ ، ٣ ، ...) فما رتبة هذا الحد ؟

الحــل

أ = ٢٧ ، ر = $\frac{٩}{٢٧}$ = $\frac{١}{٣}$

∵ $ح_ن$ = أ $ر^{ن-١}$ ∴ $\frac{١}{٢٤٣}$ = ٢٧ $\left(\frac{١}{٣}\right)^{ن-١}$ ∴ $\frac{١}{٢٧}$ × $\frac{١}{٢٤٣}$ = $\left(\frac{١}{٣}\right)^{ن-١}$

∴ $\frac{١}{٣^٣}$ × $\frac{١}{٣^٥}$ = $\left(\frac{١}{٣}\right)^{ن-١}$ ∴ $\left(\frac{١}{٣}\right)^٨$ = $\left(\frac{١}{٣}\right)^{ن-١}$ ∴ ن - ١ = ٨

∴ ن = ٩ ∴ الحد الذى قيمته $\frac{١}{٢٤٣}$ هو $ح_٩$

تعيين المتتابعة الهندسية

تتعين المتتابعة الهندسية متى علم حدها الأول (أ) وأساسها (ر)

مثال ٥

متتابعة هندسية حدها الثالث يساوى ١٢ وحدها الثامن يساوى ٣٨٤ أوجد المتتابعة.

الحــل

∵ $ح_٣$ = ١٢ ∴ أ $ر^٢$ = ١٢ (١)

، ∵ $ح_٨$ = ٣٨٤ ∴ أ $ر^٧$ = ٣٨٤ (٢)

وبقسمة (٢) على (١) : ∴ $\frac{أ ر^٧}{أ ر^٢}$ = $\frac{٣٨٤}{١٢}$

∴ $ر^٥$ = ٣٢ ∴ $ر^٥$ = $٢^٥$

∴ ر = ٢ ، وبالتعويض فى (١) : ∴ أ = ٣ ∴ المتتابعة هى (٣ ، ٦ ، ١٢ ، ...)

> **لاحظ أن :**
> إذا كان : $ح_س$ ، $ح_ص$ حدين فى متتابعة هندسية
> فإن : $ر^{س-ص}$ = $\frac{ح_س}{ح_ص}$

تذكر أن :

١ فرق بين مربعين : ١ - $ر^٢$ = (١ - ر) (١ + ر)

٢ فرق بين مكعبين : ١ - $ر^٣$ = (١ - ر) (١ + ر + $ر^٢$)

٣ مجموع المكعبين : ١ + $ر^٣$ = (١ + ر) (١ - ر + $ر^٢$)

٤ ١ + $ر^٢$ + $ر^٤$ = (١ - ر + $ر^٢$) (١ + ر + $ر^٢$)

مثال ٦

متتابعة هندسية مجموع حديها الأول والثانى ٧٢ ومجموع حديها الثالث والرابع ٨ أوجد المتتابعة.

الحـل

∵ $ح_١ + ح_٢ = ٧٢$ ∴ $أ + أ ر = ٧٢$ ∴ $أ (١ + ر) = ٧٢$ (١)

، $ح_٣ + ح_٤ = ٨$ ∴ $أ ر^٢ + أ ر^٣ = ٨$ ∴ $أ ر^٢ (١ + ر) = ٨$ (٢)

بقسمة (٢) على (١) : ∴ $\frac{أ ر^٢ (١ + ر)}{أ (١ + ر)} = \frac{٨}{٧٢}$ ∴ $ر^٢ = \frac{١}{٩}$ ∴ $ر = ± \frac{١}{٣}$

بالتعويض فى (١) عن $ر = \frac{١}{٣}$ ∴ $أ \left(١ + \frac{١}{٣}\right) = ٧٢$ ∴ $أ = ٥٤$

وبالتعويض فى (١) عن $ر = -\frac{١}{٣}$ ∴ $أ \left(١ - \frac{١}{٣}\right) = ٧٢$ ∴ $أ = ١٠٨$

∴ المتتابعة هى (٥٤ ، ١٨ ، ٦ ، ...) أ، (١٠٨ ، ‎-٣٦ ، ١٢ ، ...)

مثال ٧

متتابعة هندسية حدودها موجبة ، حدها الخامس يزيد عن حدها الرابع بمقدار ٢٧ ، حدها الرابع يزيد عن حدها الثانى بمقدار ٣٠ أوجد هذه المتتابعة.

الحـل

∵ $ح_٥ - ح_٤ = ٢٧$ ∴ $أ ر^٤ - أ ر^٣ = ٢٧$ ∴ $أ ر^٣ (ر - ١) = ٢٧$ (١)

، $ح_٤ - ح_٢ = ٣٠$ ∴ $أ ر^٣ - أ ر = ٣٠$ ∴ $أ ر (ر^٢ - ١) = ٣٠$

∴ $أ ر (ر - ١) (ر + ١) = ٣٠$ (٢)

وبقسمة (١) على (٢) : ∴ $\frac{أ ر^٣ (ر - ١)}{أ ر (ر - ١) (ر + ١)} = \frac{٢٧}{٣٠}$ ∴ $\frac{ر^٢}{(ر + ١)} = \frac{٩}{١٠}$

∴ $١٠ ر^٢ = ٩ ر + ٩$ ∴ $١٠ ر^٢ - ٩ ر - ٩ = ٠$

∴ $(٢ ر - ٣) (٥ ر + ٣) = ٠$ ∴ $ر = \frac{٣}{٢}$ أ، $ر = \frac{-٣}{٥}$ (مرفوض)

وبالتعويض فى (١) عن $ر = \frac{٣}{٢}$ ∴ $أ × \frac{٢٧}{٨} \left(\frac{٣}{٢} - ١\right) = ٢٧$

∴ $أ = ١٦$ ∴ المتتابعة هى : (١٦ ، ٢٤ ، ٣٦ ، ...)

مثال ٨

متتابعة هندسية مجموع حدها الخامس وضعف حدها السادس يساوى عشرة أمثال حدها الرابع ، حدها الثالث = ٤٠ أوجد المتتابعة.

الحـــل

∵ $ح_٥ + ٢ ح_٦ = ١٠ ح_٤$ ∴ $أ ر^٤ + ٢ أ ر^٥ = ١٠ أ ر^٣$ وبقسمة الطرفين على $أ ر^٣$

∴ $ر + ٢ ر^٢ = ١٠$ ∴ $٢ ر^٢ + ر - ١٠ = ٠$

∴ $(٢ ر + ٥)(ر - ٢) = ٠$ ∴ $ر = -\frac{٥}{٢}$ أ، $ر = ٢$

، ∵ $ح_٣ = ٤٠$ ∴ $أ ر^٢ = ٤٠$

وبالتعويض عن $ر = \frac{-٥}{٢}$ ∴ $أ \times \frac{٢٥}{٤} = ٤٠$ ∴ $أ = \frac{٣٢}{٥}$

∴ المتتابعة هى $(\frac{٣٢}{٥}$ ، -١٦ ، ٤٠ ، ...$)$

، وبالتعويض عن $ر = ٢$ ∴ $أ \times ٤ = ٤٠$

∴ $أ = ١٠$ ∴ المتتابعة هى (١٠ ، ٢٠ ، ٤٠ ، ...)

مثال ٩

موظف راتبه الشهرى ١٢٠٠ جنيه ويحصل على علاوة سنوية ثابتة بنسبة ٦ ٪ زيادة عن راتب السنة السابقة مباشرة فكم يكون راتبه بالجنيه بعد مرور ٦ سنوات ؟

الحـــل

بعد مرور ١ سنة يكون المرتب = $١٢٠٠ + ١٢٠٠ \times ٦٪ = ١٢٠٠ (١ + ٠,٠٦) = ١٢٠٠ \times (١,٠٦)$

بعد مرور ٢ سنة يكون المرتب = $١٢٠٠ \times (١,٠٦) + ١٢٠٠ \times (١,٠٦) \times ٦٪$

$= ١٢٠٠ (١,٠٦) [١ + ٦٪] = ١٢٠٠ (١,٠٦)^٢$

∴ المرتبات بعد الزيادة تكون متتابعة هندسية هى $(١٢٠٠ \times (١,٠٦)$ ، $١٢٠٠ \times (١,٠٦)^٢$ ، ...$)$

أى $أ = ١٢٠٠ \times ١,٠٦$ ، $ر = ١ + ٦٪ = ١ + ٠,٠٦ = ١,٠٦$

∴ المرتب بعد مرور ٦ سنوات

$= ح_٦$ (من المتتابعة السابقة) $= أ ر^٥$

$= ١٢٠٠ \times (١,٠٦) \times (١,٠٦)^٥$

$= ١٢٠٠ \times (١,٠٦)^٦ \simeq ١٧٠٢$ جنيه

ملاحظتان

١ المتتابعة الهندسية فى الحل الأول هى متتابعة المرتبات بعد الزيادة فيكون المرتب بعد مرور $ن$ سنة هو $ح_ن = أ ر^{ن-١}$ حيث أ هو المرتب بعد أول زيادة.

٢ المتتابعة الهندسية فى الحل الثانى هى متتابعة تشمل المرتب الأصلى والمرتبات بعد الزيادة فيكون المرتب بعد مرور $ن$ سنة هو $ح_{ن+١} = أ ر^ن$ حيث أ هو المرتب قبل أى زيادة.

حل آخر : المرتب الأصلى والمرتبات بعد الزيادة تكون متتابعة هندسية هى

$(١٢٠٠$ ، $١٢٠٠ \times ١,٠٦$ ، $١٢٠٠ \times (١,٠٦)^٢$ ، ...$)$

أى $أ = ١٢٠٠$ ، $ر = ١,٠٦$

ويكون المرتب بعد مرور ٦ سنوات = $ح_٧$ (من المتتابعة السابقة) $= أ ر^٦ = ١٢٠٠ \times (١,٠٦)^٦ \simeq ١٧٠٢$ جنيه.

الأوساط الهندسية

تعريف

إذا كانت : أ ، ب ، حـ ثلاثة حدود متتالية من متتابعة هندسية فإن ب هى الوسط الهندسى بين أ ، حـ

ويكون : $\frac{ب}{أ} = \frac{حـ}{ب}$ ومنها $ب^٢ = أ حـ$ ∴ $ب = \pm \sqrt{أ حـ}$

أى أن الوسط الهندسى لكميتين لهما نفس الإشارة (موجبتين معًا أو سالبتين معًا) هو الجذر التربيعى لحاصل ضربهما.

فمثلًا :

- الوسط الهندسى للكميتين ٢ ، ٣٢ = $\pm \sqrt{٢ \times ٣٢} = \pm \sqrt{٦٤} = \pm ٨$
- الوسط الهندسى للكميتين $أ^٣ ب$ ، $أ ب^٣$ = $\pm \sqrt{أ^٣ ب \times أ ب^٣} = \pm \sqrt{أ^٤ ب^٤} = \pm أ^٢ ب^٢$
- لا يوجد وسط هندسى للعددين −٤ ، ٩ لأنهما مختلفان فى الإشارة.

ملاحظة (الوسط الهندسى لعدة كميات)

يعرف الوسط الهندسى لعدة كميات موجبة عددها (ن) بأنه الجذر النونى الموجب لحاصل ضرب هذه الكميات جميعًا.

فمثلًا : الوسط الهندسى للكميات الموجبة أ ، ب ، حـ = $\sqrt[٣]{أ ب حـ}$

والوسط الهندسى للأعداد الستة ٢ ، ٤ ، ٦ ، ٩ ، ٣٦ ، ٣ = $\sqrt[٦]{٢ \times ٤ \times ٦ \times ٩ \times ٣٦ \times ٣} = \sqrt[٦]{٤٦٦٥٦} = ٦$

مثال ١٠

عددان موجبان وسطهما الحسابى = ٥٠ ، وسطهما الهندسى = ٤٠ أوجد العددين.

الحل

نفرض أن العددين هما : س ، ص

∵ الوسط الحسابى = ٥٠ ∴ $\frac{س + ص}{٢} = ٥٠$ ∴ س + ص = ١٠٠

∴ ص = ١٠٠ − س (١)

، ∵ الوسط الهندسى = ٤٠ ∴ $\sqrt{س ص} = ٤٠$ ∴ س ص = ١٦٠٠ (٢)

وبالتعويض من (١) فى (٢) :

∴ س (١٠٠ − س) = ١٦٠٠ ∴ $س^٢ - ١٠٠ س + ١٦٠٠ = ٠$ ∴ (س − ٢٠) (س − ٨٠) = ٠

∴ س = ٢٠ أ، س = ٨٠ ∴ ص = ٨٠ أ، ص = ٢٠ ∴ العددان هما : ٢٠ ، ٨٠

مثال ⑪

إذا علم أن : أ − ٢ ، أ − ١ ، ٣أ − ٥ ثلاثة حدود متتالية من متتابعة هندسية فما قيمة أ ؟

الحل

∵ أ − ٢ ، أ − ١ ، ٣أ − ٥ حدود متتالية فى متتابعة هندسية.

∴ أ − ١ وسط هندسى بين أ − ٢ ، ٣أ − ٥ ∴ $(أ - ١)^٢ = (أ - ٢)(٣أ - ٥)$

∴ $أ^٢ - ٢أ + ١ = ٣أ^٢ - ١١أ + ١٠$ ∴ $٢أ^٢ - ٩أ + ٩ = ٠$

∴ $(٢أ - ٣)(أ - ٣) = ٠$ ∴ أ = ٣ أ، $أ = \frac{٣}{٢}$

ملاحظتان

- الوسط الحسابى لعددين حقيقيين موجبين مختلفين أكبر من وسطهما الهندسى

أى أنه : إذا كان أ ، ب عددين حقيقيين موجبين ، أ ≠ ب فإن : $\frac{أ + ب}{٢} > \sqrt{أب}$

- الوسط الحسابى لعددين حقيقيين موجبين متساويين يساوى وسطهما الهندسى

أى أنه : إذا كان أ ، ب عددين حقيقيين موجبين ، أ = ب فإن : $\frac{أ + ب}{٢} = \sqrt{أب}$

إدخال عدد محدود من الأوساط الهندسية بين كميتين معلومتين

إذا كانت أ ، ب كميتين معلومتين وأدخلنا بينهما ن وسطًا هندسيًا فإننا نحصل على متتابعة هندسية حدها الأول أ وعدد حدودها ن + ٢ وحدها الأخير ب

مثال ⑫

أدخل ٣ أوساط هندسية بين ٢ ، ٣٢

الحل

∵ عدد الأوساط = ٣ ∴ عدد حدود المتتابعة = ٣ + ٢ = ٥ حدود

∴ أ = ٢ ، $ح_٥ = ٣٢$ ∵ $ح_٥ = أ ر^٤$ ∴ $٣٢ = ٢ ر^٤$

∴ $ر^٤ = ١٦$ ∴ ر = ± ٢

- عندما ر = ٢ ∴ الأوساط هى : ٤ ، ٨ ، ١٦
- عندما ر = −٢ ∴ الأوساط هى : −٤ ، ٨ ، −١٦

لاحظ أن :

عند إدخال ن وسط هندسى بين العددين أ ، ب

فإن : $ر^{ن+١} = \frac{ب}{أ}$

مثال ١٣

إذا أدخلت أربعة أوساط هندسية بين عددين وكان مجموع الوسطين الأول والرابع يساوى ٩٠ ومجموع الوسطين الثانى والثالث يساوى ٦٠ فما هما العددان ؟

الحل

∵ عدد الأوساط = ٤ ∴ عدد حدود المتتابعة = ٤ + ٢ = ٦ حدود

وبفرض أن العدد الأول = أ ∴ الوسطين الأول والرابع هما $ح_٢$ ، $ح_٥$

∴ $ح_٢ + ح_٥ = ٩٠$ ∴ $أ ر + أ ر^٤ = ٩٠$

∴ $أ ر (١ + ر^٣) = ٩٠$ (١)

، ∵ الوسطين الثانى والثالث هما $ح_٣$ ، $ح_٤$ ∴ $أ ر^٢ + أ ر^٣ = ٦٠$

∴ $أ ر^٢ (١ + ر) = ٦٠$ (٢)

بقسمة (١) على (٢) : ∴ $\frac{(١ + ر)(١ - ر + ر^٢)}{ر (١ + ر)} = \frac{٣}{٢}$ ∴ $٢ ر^٢ - ٢ ر + ٢ = ٣ ر$

∴ $٢ ر^٢ - ٥ ر + ٢ = ٠$ ∴ $(ر - ٢)(٢ ر - ١) = ٠$

∴ ر = ٢ أ، ر = $\frac{١}{٢}$

- وبالتعويض فى (٢) عن ر = ٢ ∴ أ = ٥ والعددان هما أ ، $أ ر^٥$ أى ٥ ، ١٦٠
- وبالتعويض فى (٢) عن ر = $\frac{١}{٢}$ ∴ $\frac{٣}{٨}$ أ = ٦٠

∴ أ = ١٦٠ والعددان هما أ ، $أ ر^٥$ أى ١٦٠ ، ٥

ملاحظات

* إذا كان : (أ ، ب ، حـ ، ....) متتابعة هندسية أساسها (ر) ، (س ، ص ، ع ، ....) متتابعة هندسية أساسها (م) فإن :

١ (أ س ، ب ص ، حـ ع ، ....) تكون متتابعة هندسية أساسها (ر م)

٢ (أ ك ، ب ك ، حـ ك ، ...) تكون متتابعة هندسية أساسها (ر) حيث ك ≠ ٠

٣ ($\frac{أ}{ك}$ ، $\frac{ب}{ك}$ ، $\frac{حـ}{ك}$ ، ....) تكون متتابعة هندسية أساسها (ر) حيث ك ≠ ٠

٤ ($أ^ك$ ، $ب^ك$ ، $حـ^ك$ ، ....) تكون متتابعة هندسية أساسها ($ر^ك$)

* إذا كان : ($ح_١$ ، $ح_٢$ ، $ح_٣$ ، .... ، $ح_{ن-١}$ ، $ح_ن$) متتابعة هندسية فإن :

$ح_١ ح_ن = ح_٢ ح_{ن-١} = ح_٣ ح_{ن-٢} = ...$ وهكذا ....

تمـارين 4 على المتتابعة الهندسية



من أسئلة الكتاب المدرسى • فهـم • تطبيق • مستويات عليا

أولًا أسئلة الاختيار من متعدد

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

تمارين على تعريف المتتابعة الهندسية وحدها العام وتعيين المتتابعة الهندسية

① الحد الخامس من المتتابعة $(ح_ن)$ حيث $ح_ن = ٢ \times (٣)^{ن-١}$ يساوى ....

(أ) ٨١ (ب) ١٦٢ (جـ) ٣٢٤ (د) ٢٤٣

② أى مما يأتى يكون متتابعة هندسية ؟

(أ) (٢ ، ٥ ، ٨ ، ١١ ، ...) (ب) (٣ ، ٣٣ ، ٣ ، ٣٣ ، ...)

(جـ) (٥ ، −٥ ، ٥ ، −٥ ، ...) (د) (١ ، ٤ ، ٨ ، ١٦ ، ٣٢ ، ...)

③ جميع المتتابعات الآتية هندسية ما عدا المتتابعة ....

(أ) (٣ ، −٦ ، ١٢ ، −٢٤ ، ...) (ب) (لو$أ$ ، لو$أ^٢$ ، لو$أ^٣$ ، لو$أ^٤$ ، ...)

(جـ) $\left(\frac{٣}{٢} ، ١ ، \frac{٢}{٣} ، \frac{٤}{٩}\right)$ (د) $\left(\frac{٣ب}{٢أ} ، ٣ ، \frac{٦أ}{ب} ، \frac{١٢أ^٢}{ب^٢}\right)$

④ المتتابعة الهندسية من بين المتتابعات الآتية هى ....

(أ) $(ح_ن) = (٤ ن^٢)$ لكل $ن \geq ١$

(ب) $(ح_ن) =$ حيث $ح_ن = \frac{١}{٤} ح_{ن-١}$ لكل $ن \geq ٢$ ، $ح_١ = ١$

(جـ) $(ح_ن) = (٢^ن - ١)$ لكل $ن \geq ١$

(د) $(ح_ن) = (لو (٣ \times ٢^ن))$ لكل $ن \geq ١$

⑤ متتابعة هندسية أساسها $= \frac{١}{٢}$ وحدها الثالث ٢٤ فإن المتتابعة هى ....

(أ) (٤٨ ، ٢٤ ، ١٢ ، ...) (ب) (٦ ، ١٢ ، ٢٤ ، ...)

(جـ) (٩٦ ، ٤٨ ، ٢٤ ، ...) (د) $\left(\frac{٨}{٣}\right.$ ، ٨ ، ٢٤ ، ...)

⑥ متتابعة هندسية حدها الأول ٢ وحدها السادس ٦٤ فإن المتتابعة هى ....

(أ) (٢ ، ٨ ، ٣٢ ، ...) (ب) (٢ ، ٤ ، ٨ ، ...)

(جـ) (٢ ، −٤ ، ٨ ، ...) (د) (٢ ، ٦ ، ١٨ ، ...)

⑦ المتابعة (١٥ ، ٥ ، $\frac{٥}{٣}$ ، ...) هى متتابعة ....

(أ) حسابية وأساسها -٥ (ب) هندسية وأساسها ٣

(جـ) حسابية وأساسها ٥ (د) هندسية وأساسها $٣^{-١}$

⑧ المتابعة ($\frac{١}{٢٤٣}$ ، $-\frac{١}{٨١}$ ، $\frac{١}{٢٧}$ ، $-\frac{١}{٩}$ ، $\frac{١}{٣}$) هى متتابعة ....

(١) منتهية.   (٢) تزايدية.   (٣) تذبذبية.   (٤) هندسية وأساسها -٣

(أ) (١) فقط.   (ب) (١) ، (٢) فقط.

(جـ) (٣) ، (٤) فقط.   (د) (١) ، (٣) ، (٤) فقط.

⑨ الحد النونى للمتتابعة الهندسية (٣ ، -٦ ، ١٢ ، ...) هو ....

(أ) $٣(-٢)^{ن-١}$ (ب) $٣(-٢)^{ن}$ (جـ) $(-٦)^{ن-١}$ (د) $(-٦)^{ن}$

⑩ الحد النونى للمتتابعة الهندسية ($\frac{-١}{٢}$ ، $\frac{١}{٤}$ ، $\frac{-١}{٨}$ ، ...) يساوى ....

(أ) $\left(\frac{-١}{٢}\right)^{ن-١}$ (ب) $\left(\frac{١}{٢}\right)^{ن-١}$ (جـ) $\left(\frac{١}{٢}\right)^{ن}$ (د) $\left(-\frac{١}{٢}\right)^{ن}$

⑪ الحد النونى فى المتتابعة الهندسية ($س^{٣}$ ، $س$ ، $س^{-١}$ ، ...) هو ....

(أ) $س^{٥-٢ن}$ (ب) $س^{٥+ن}$ (جـ) $س^{ن-٥}$ (د) $س^{ن-١}$

⑫ إذا كانت (-١ ، -٥ ، -٢٥ ، -١٢٥ ، ...) متتابعة هندسية فإن .... لكل $ن > ١$

(أ) $ح_{ن} = \frac{١}{٥} ح_{ن-١}$ (ب) $ح_{ن} = -٥ ح_{ن-١}$

(جـ) $ح_{ن} = ١٠ ح_{ن-١}$ (د) $ح_{ن} = ٥ ح_{ن-١}$

⑬ 📖 الحد الخامس فى المتتابعة الهندسية (٨ ، ٦ ، $\frac{٩}{٢}$ ، ...) هو ....

(أ) $\frac{١١}{٨}$ (ب) $\frac{٢٧}{١٦}$ (جـ) $\frac{٩}{٤}$ (د) $\frac{٨١}{٣٢}$

⑭ 📖 إذا كانت : $س > ٠$ فإن أساس المتتابعة الهندسية (٤ ، $س - ٣$ ، $٢س + ٦$ ، ...) هو ....

(أ) ١ (ب) ٥ (جـ) ٣ (د) ٢٤

⑮ إذا كان : ($أ$ ، $ب$ ، $حـ$ ، ...) متتابعة هندسية أساسها ($ر$) فإن : ($\frac{١}{أ^{٢}}$ ، $\frac{١}{ب^{٢}}$ ، $\frac{١}{حـ^{٢}}$ ، ...) تمثل متتابعة هندسية أساسها = ...

(أ) $ر$ (ب) $\frac{١}{ر}$ (جـ) $ر^{٢}$ (د) $\frac{١}{ر^{٢}}$

⑯ إذا كان : $أ$ ، $ب$ ، $حـ$ ، $ء$ ، $هـ$ فى تتابع هندسى فإن : $\frac{هـ}{حـ} =$ ....

(أ) $\frac{ء}{حـ}$ (ب) $\frac{ب}{أ}$ (جـ) $\frac{حـ}{ب}$ (د) $\frac{ء}{ب}$

⑰ المتتابعة الهندسية التى حدها الأول = $أ$ وأساسها = $ر$ تكون تزايدية إذا كان : ....

(أ) $أ > ٠$ ، $-١ < ر < ٠$ (ب) $أ > ٠$ ، $٠ < ر < ١$

(جـ) $أ < ٠$ ، $-١ < ر < ٠$ (د) $أ < ٠$ ، $٠ < ر < ١$

(١٨) المتتابعة الهندسية التى حدها الأول = أ وأساسها = ر تكون تناقصية إذا كان ....

(أ) أ > ٠ ، −١ < ر < ٠ (ب) أ > ٠ ، ٠ < ر < ١

(جـ) أ < ٠ ، −١ < ر < ٠ (د) أ < ٠ ، ٠ < ر < ١

(١٩) إذا كان : أ ، ب ، حـ فى تتابع هندسى وأساس المتتابعة = ر فإن جميع العبارات الآتية صحيحة ما عدا ....

(أ) ر = $\frac{ب}{أ}$ (ب) ر = $\frac{حـ}{ب}$ (جـ) ر = $\frac{ب^2}{أ حـ}$ (د) ر = $\frac{ب + حـ}{أ + ب}$

(٢٠) رتبة الحد الذى قيمته $\frac{١}{٢٤٣}$ من المتتابعة الهندسية (٨١ ، ٢٧ ، ٩ ، ...) تساوى ....

(أ) ٥ (ب) ٧ (جـ) ٩ (د) ١٠

(٢١) رتبة أول حد أصغر من الواحد الصحيح فى المتتابعة الهندسية (١٠٢٤ ، ٥١٢ ، ٢٥٦ ، ...) هى ....

(أ) ٧ (ب) ١٠ (جـ) ١٢ (د) ١٤

(٢٢) إذا كان الحد الثالث فى متتابعة هندسية = ٤ فإن حاصل ضرب أول ٥ حدود هو ....

(أ) $٤^٢$ (ب) $٤^٣$ (جـ) $٤^٥$ (د) $٤^٦$

(٢٣) إذا كان الحد الثالث من متتابعة هندسية يساوى مربع حدها الأول وحدها الثانى = ٨ فإن حدها السادس = ...

(أ) ١٢٠ (ب) ١٢٤ (جـ) ١٢٨ (د) ١٣٢

(٢٤) عدد حدود المتتابعة الهندسية (٢٤٣ ، ٨١ ، ٢٧ ، ... ، $\frac{١}{٩}$) يساوى ....

(أ) ٦ (ب) ٧ (جـ) ٨ (د) ٩

(٢٥) رتبة الحد الذى قيمته = ١٠٢٤ فى المتتابعة الهندسية ($\frac{١}{٨}$ ، $\frac{١}{٤}$ ، $\frac{١}{٢}$ ، ١ ، ...) هى ....

(أ) ١٦ (ب) ١٤ (جـ) ١٢ (د) ١١

(٢٦) فى المتتابعة الهندسية (٦ ، ١٢ ، ٢٤ ، ...) تكون رتبة أول حد تزيد قيمته عن ٢٠٠ هو ....

(أ) ٧ (ب) ٨ (جـ) ٦ (د) ٩

(٢٧) متتابعة هندسية جميع حدودها موجبة ، $ح_٥ - ح_٤ = ٣٦$ ، $ح_٤ - ح_٢ = ٤٠$ فإن المتتابعة هى ....

(أ) (٦٤ ، ٣٢ ، ١٦ ، ...) (ب) ($\frac{٦٤}{٣}$ ، ٣٢ ، ٤٨ ، ...)

(جـ) (٣٢ ، ٤٨ ، ٧٢ ، ...) (د) (٢٤ ، ٣٦ ، ٥٤ ، ...)

(٢٨) متتابعة هندسية حدودها موجبة ، $ح_٣ + ح_٤ = ٦ ح_٢$ ، $ح_٧ = ٣٢٠$

فإن المتتابعة هى ....

(أ) (٢ ، ١٠ ، ٢٠ ، ...) (ب) (٢٤ ، ١٦ ، ٨ ، ...)

(جـ) (٣ ، ١٥ ، ٧٥ ، ...) (د) (٥ ، ١٠ ، ٢٠ ، ...)

(٢٩) متتابعة هندسية مجموع الحدود الثلاثة الأولى فيها ٢٦ ومجموع الحدود الثلاثة التالية لها ٧٠٢

فإن المتتابعة هى ....

(أ) (٣ ، ٦ ، ١٢ ، ...) (ب) ($\frac{٢٦}{٧}$ ، $\frac{٥٢}{٧}$ ، $\frac{١٠٤}{٧}$ ، ...)

(جـ) (٢ ، −٨ ، ٣٢ ، ...) (د) (٢ ، ٦ ، ١٨ ، ...)

(٣٠) متتابعة هندسية حدها النونى يساوى $\left(\frac{٣}{٥}\right)^{ن-٢}$ فإن حاصل ضرب أول ثلاثة حدود = ...

(أ) ١ (ب) $\frac{٥}{٣}$ (جـ) $\frac{٣}{٥}$ (د) $\frac{٢٥}{٩}$

تمارين على الأوساط الهندسية

(٣١) إذا كانت : أ ، ب ، حـ فى تتابع هندسى ، فإن ....

(أ) $ب حـ = أ^٢$ (ب) $أ ب = حـ^٢$ (جـ) $ب^٢ = أ حـ$ (د) $أ ب حـ = ١$

(٣٢) الوسط الهندسى للعددين ٤ ، ١٦ هو ....

(أ) ١٠ (ب) ٦٤ (جـ) ٨ (د) ± ٨

(٣٣) إذا كان : ٣ ، س ، ٩ فى تتابع هندسى فإن : س = ...

(أ) ± ٦ (ب) $٣\sqrt{٣}$ (جـ) $± ٣\sqrt{٣}$ (د) $-\sqrt{٣}$

(٣٤) إذا كان الوسط الهندسى للعددين ٩ ، ص هو ١٥ فإن : ص = ...

(أ) ٦ (ب) ٥ (جـ) ٢٥ (د) ٩

(٣٥) الوسط الحسابى لعددين حقيقيين موجبين مختلفين .... وسطهما الهندسى.

(أ) = (ب) > (جـ) < (د) ≥

(٣٦) إذا كانت أ ، ب ، حـ ثلاثة حدود موجبة متتالية غير متساوية من متتابعة هندسية فإن : ....

(أ) $ب = ± \sqrt{أ حـ}$ (ب) $أ حـ = ٢ ب$ (جـ) $\frac{أ + حـ}{٢} = ب$ (د) $ب = \sqrt{أ حـ}$

(٣٧) إذا كانت : ($ح_ن$) متتابعة هندسية حيث $ح_ن = ٧ \times (٣)^{ن-١}$ فإن الوسط الهندسى بين $ح_٢$ ، $ح_٧$

هو ....

(أ) ± ٥٧٠ (ب) ± ٥٦٧ (جـ) ± ٥٤٠ (د) ± ٥٦٠

(٣٨) إذا كانت (١ ، م ، ٤ م − ٤) متتابعة هندسية فإن : م = ...

(أ) ٢ (ب) −٢ (ج) ٤ (د) −٤

(٣٩) أى مما يأتى وسط هندسى للكميتين : $أ^{٤}$ ، $ب^{١٦}$ ؟

(أ) $أ^{٤} ب^{١٦}$ (ب) $أ^{٢} ب^{٨}$ (ج) $أ^{٢} ب^{٤}$ (د) $أ ب^{٤}$

(٤٠) الوسط الهندسى للأعداد : ٢ ، ٥ ، ٨ ، ١٠ ، ١٢٥ يساوى ....

(أ) $٥\sqrt{١٠}$ (ب) ٣٠ (ج) ٨ (د) ١٠

(٤١) إذا كانت (س ، ص ، ع) ثلاثة أعداد حقيقية موجبة مختلفة فى تتابع هندسى فإن : ....

(أ) ٢ ص < س + ع (ب) $ص^{٢}$ > س ع

(ج) ص = س ع (د) $\sqrt{ص}$ = س ع

(٤٢) فى أى متتابعة هندسية يكون $ح_{١} \times ح_{٧}$ = ...

(أ) $(ح_{١})^{٢}$ (ب) $(ح_{٤})^{٢}$ (ج) $(ح_{٧})^{٢}$ (د) $(ح_{٨})^{٢}$

(٤٣) إذا كان $(ح_{ن})$ متتابعة هندسية حدها الأول = أ وأساسها = أ فإن حدها الخامس هو ....

(أ) $أ^{٣}$ (ب) $أ^{٤}$ (ج) $أ^{٥}$ (د) $أ^{٦}$

(٤٤) إذا كان الوسط الحسابى بين أ ، ب يساوى ٩ ، والوسط الحسابى بين $\frac{١}{أ}$ ، $\frac{١}{ب}$ يساوى $\frac{١}{٤}$

فإن الوسط الهندسى الموجب بين أ ، ب يساوى ....

(أ) ٢ (ب) ٣ (ج) ٦ (د) ٦,٥

(٤٥) إذا كانت : س − ١ ، س + ٢ ، ٣ س فى تتابع هندسى فإن : س = ...

(أ) $\frac{١}{٢}$ أ، −٤ (ب) $-\frac{١}{٢}$ أ، ٤ (ج) $\frac{١}{٢}$ أ، ٤ (د) $-\frac{١}{٢}$ أ، −٤

(٤٦) إذا كانت (٥٤ ، س ، ص ، ٢) متتابعة هندسية فإن : $\frac{ص}{س}$ = ...

(أ) $\frac{١}{٣}$ (ب) ٣ (ج) ٩ (د) ٢٧

(٤٧) إذا كانت (أ ، ب ، جـ) فى تتابع حسابى وأيضًا هندسى فإن ....

(أ) أ = ب ≠ جـ (ب) أ ≠ ب = جـ (ج) أ ≠ ب ≠ جـ (د) أ = ب = جـ

(٤٨) إذا كانت (٧ ، $ك_{١}$ ، $ك_{٢}$ ، $ك_{٣}$ ، $ك_{٤}$ ، $\frac{٧}{٣٢}$) متتابعة هندسية فإن : $ك_{٢}$ = ...

(أ) $\frac{١}{٤}$ (ب) $\frac{١}{٢}$ (ج) $\frac{٧}{٤}$ (د) $\frac{٧}{٢}$

(٤٩) إذا أدخلنا سته وسائط هندسية بين ٥ ، ٦٤٠ فإن : $\frac{\text{مجموع آخر وسطين}}{\text{مجموع أول وسطين}}$ = ...

(أ) ٢ (ب) ٣٢ (ج) ١٦ (د) ٤

ثانيًا الأسئلة المقالية

تمارين على تعريف المتتابعة الهندسية وحدها العام وتعيين المتتابعة الهندسية

1 بين أى المتتابعات الآتية هندسية واذكر أساسها واكتب الحدود الثلاثة الأولى من كل متتابعة هندسية :

(١) $(ح_ن) = (٥ \times ٢^ن)$

(٢) $(ح_ن) = (٤ ن^٢)$

(٣) $(ح_ن)$ حيث $ح_١ = ١٢$ ، $ح_ن = \frac{١}{٤} \times ح_{ن-١}$ ، $ن > ١$

---

2 أثبت أن المتتابعة $(ح_ن)$ حيث $ح_ن = ٢ \times ٣^{ن-٥}$ متتابعة هندسية وأوجد حدها السابع. «١٨»

---

3 بيِّن أن المتتابعة $(ح_ن)$ حيث $ح_ن = \frac{٣}{٨} (٢)^ن$ هى متتابعة هندسية

ثم أوجد حدها الثامن ، رتبة الحد الذى قيمته ٧٦٨ «٩٦ ، ١١»

---

4 أوجد الحدود الأربعة التالية فى كل من المتتابعتين الهندسيتين الآتيتين ثم مثل الحدود السبعة الأولى بيانيًا :

(١) (٨ ، ٤ ، ٢ ، .....)　　(٢) $(\frac{١}{٢٧} ، \frac{١}{٩} ، \frac{١}{٣} ، .....)$

---

5 فى كل مما يأتى أوجد :

(١) متتابعة هندسية حدها الأول ٩ ، وحدها السادس ٢٨٨ «(٩ ، ١٨ ، ٣٦ ، .....)»

(٢) متتابعة هندسية $(ح_ن)$ فيها $ح_٣ = ١٢$ ، $ح_٨ = ٣٨٤$ «(٣ ، ٦ ، ١٢ ، ...)»

(٣) متتابعة هندسية حدها الثالث = ١٨ ، حدها السادس = ٤٨٦ «(٢ ، ٦ ، ١٨ ، ...)»

(٤) متتابعة هندسية حدها الثانى ١٠٠ ، حدها الرابع ١

«(١٠٠٠ ، ١٠٠ ، ١٠ ، .....) أ (-١٠٠٠ ، ١٠٠ ، -١٠ ، .....)»

(٥) المتتابعة الهندسية التى فيها : $ح_٢ + ح_٥ = ٣٦$ ، $ح_٣ + ح_٦ = ١٨$ «(٦٤ ، ٣٢ ، ١٦ ، .....)»

(٦) المتتابعة الهندسية التى فيها : $ح_٢ - ح_٤ = ١٨$ ، $ح_٢ - ح_١ = ٩$ «(٣ ، -٦ ، ١٢ ، .....)»

(٧) متتابعة هندسية حدها الثانى = ٨ ومجموع حديها الأول والثالث يساوى ٢٠

«(١٦ ، ٨ ، ٤ ، .....) أ (٤ ، ٨ ، ١٦ ، .....)»

(٨) متتابعة هندسية جميع حدودها موجبة ، وحدها الأول يساوى أربعة أمثال حدها الثالث ، مجموع حديها الثانى والخامس = ٣٦ «(٦٤ ، ٣٢ ، ١٦ ، .....)»

(٩) متتابعة هندسية حدودها موجبة فيها : $ح_١ + ح_٣ = ٢٠$ ، $ح_٣ + ح_٥ = ٥ ح_٢^٢$ «(٢ ، ٦ ، ١٨ ، .....)»

(١٠) متتابعة هندسية تزايدية فيها الحد الثالث يزيد عن مجموع الحدين الأولين بمقدار ١٠ والحد الثانى ينقص عن مجموع الحدين الأول والثالث بمقدار ١٤ «(٢ ، ٦ ، ١٨ ، .....)»

(١١) متتابعة هندسية ثلاثة أمثال مجموع حديها الأول والثالث يساوى مجموع حديها الثانى والرابع ، وحدها الخامس يزيد عن ضعف مجموع حدودها الأربعة الأولى بمقدار ٢ «(٢ ، ٦ ، ١٨ ، .....)»

(١٢) متتابعة هندسية حدودها موجبة ومجموع الحدود الأربعة الأولى منها يساوى ٤٥ وحدها السادس يزيد عن حدها الثانى بمقدار ٢٧٠ «($\frac{٩}{٨}$ ، $\frac{٢٧}{٨}$ ، $\frac{٨١}{٨}$ ، .....)»

(١٣) متتابعة هندسية حدودها موجبة ومجموع الحدود الخمسة الأولى منها يساوى ٢٤٢ وحدها الرابع يساوى حدها الثالث مضافًا إليه ستة أمثال حدها الثانى. «(٢ ، ٦ ، ١٨ ، .....)»

(١٤) متتابعة هندسية فيها : $ح_٢ + ح_٤ = ٥$ ، $ح_١^٢ + ح_٢^٢ = ٨٠$

«(٨ ، ٤ ، ٢ ، ...) أ، (-٨ ، ٤ ، -٢ ، ...)»

---

٦ ثلاثة أعداد من متتابعة هندسية مجموعها ٢١ وحاصل ضربها ٦٤ فما هى الأعداد الثلاثة ؟ «١ ، ٤ ، ١٦»

---

٧ مجموع ثلاثة أعداد متتالية موجبة من متتابعة هندسية يساوى ١٤ وحاصل ضرب مربعات هذه الأعداد يساوى ٤٠٩٦ فما هى تلك الأعداد ؟ «٨ ، ٤ ، ٢»

---

٨ اكتشف الخطأ :

(١) تمثل حدود المتتابعة الهندسية بمجموعة من النقاط المنفصلة التى تقع على استقامة واحدة.

(٢) تسمى المتتابعة $(ح_ن)$ هندسية إذا كان $\frac{ح_ن}{ح_{ن+١}}$ يساوى مقدارًا ثابتًا يعرف بأساس المتتابعة (لكل $ن \leq ١$)

تمارين على الأوساط الهندسية

٩ عددان موجبان الفرق بينهما ٦٠ ، وسطهما الهندسى ١٦ فما العددان ؟ «٦٤ ، ٤»

---

١٠ أوجد العددين اللذين وسطهما الحسابى ٥ ووسطهما الهندسى ٣ «٩ ، ١»

---

١١ عددان موجبان الفرق بينهما ٨ ووسطهما الهندسى ٣ فما العددان ؟ «٩ ، ١»

---

١٢ أوجد عددين موجبين وسطهما الهندسى الموجب يزيد عن أحدهما بمقدار ٢ ويقل عن الآخر بمقدار ٣ «٤ ، ٩»

---

١٣ الوسط الحسابى لعددين يساوى $\frac{٥}{٣}$ وسطهما الهندسى وأصغر العددين يساوى ٩ أوجد العدد الآخر. «٨١»

---

١٤ عددان وسطهما الهندسى يزيد ٦ عن أصغر العددين ووسطهما الحسابى ينقص ٩ عن أكبر العددين. أوجد العددين. «٦ ، ٢٤»

15 أدخل ستة أوساط هندسية بين $\frac{1}{4}$ ، ٣٢

16 أدخل خمسة أوساط هندسية بين ٤ ، ٢٩١٦

17 إذا كان الوسط الهندسى بين : س + ٢ ، ص − ٦ هو ٥ والوسط الحسابى بين س ، ص هو ٧

فأوجد قيمة كل من : س ، ص «٣ ، ١١»

18 أدخلت عدة أوساط هندسية موجبة بين العددين ٢ ، ٤٨٦ فإذا كان مجموع الوسطين الأخيرين يساوى تسعة أمثال مجموع الوسطين الأولين فأوجد عدد هذه الأوساط. «٤»

19 إذا أدخلنا عدة أوساط هندسية بين ٣ ، ٣٨٤ كان حاصل ضرب الوسطين الثانى والأخير يساوى ٢٣٠٤ أوجد عدد الأوساط. «٦»

20 إذا أدخلت عدة أوساط هندسية بين ٢ ، ١٤٥٨ وكانت النسبة بين مجموع الوسطين الأولين إلى مجموع الوسطين الأخيرين هى ١ : ٢٧ فأوجد عدد تلك الأوساط. «٥»

21 إذا كان : (١ ، س ، ص) فى تتابع حسابى ، (١ ، ص ، س) فى تتابع هندسى

فاحسب قيمة كل من : س ، ص حيث : س ≠ ص ≠ ١ «$\frac{1}{4}$ ، $-\frac{1}{2}$»

22 إذا كانت ٤ ، ب ، جـ فى تتابع حسابى ، وكانت ٢ ، ب + ٣ ، ٥ جـ فى تتابع هندسى

فأوجد قيمة كل من : ب ، جـ «٧ ، ١٠»

23 إذا كانت لو أ ، لو ب ، لو جـ فى تتابع حسابى **فأثبت أن : أ ، ب ، جـ فى تتابع هندسى.**

24 اكتشف الخطأ :

(١) تعرف الأوساط الهندسية بأنها الحدود الواقعة بين حدين متتالين من متتابعة هندسية ويمكن إيجادها متى علم عدد الأوساط.

(٢) الوسط الحسابى لعددين حقيقيين مختلفين أكبر من وسطهما الهندسى.

ثالثًا مسائل تقيس مهارات التفكير

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

(١) إذا كانت $(ح_ن)$ ، $(حَ_ن)$ متتابعتين هندسيتين فأى مما يأتى يمثل متتابعة هندسية ؟

(أ) $(ح_ن)^{ك}$ (ب) $(ك حَ_ن)$ (جـ) $(ح_ن حَ_ن)$ (د) كل ما سبق.



(٢) إذا كان أ ، ب وسطين حسابيين بين س ، ص وكان ل ، م وسطين هندسيين بين س ، ص

فإن : $\frac{أ + ب}{ل م}$ = ...

(أ) $\frac{س + ص}{٢ س ص}$ (ب) $\frac{٢ س ص}{س + ص}$ (جـ) $\frac{س + ص}{س ص}$ (د) $\frac{س ص}{س + ص}$

(٣) إذا كانت : (أ ، ب ، حـ) متتابعة حسابية أساسها (م) فإن : ($٣^{أ}$ ، $٣^{ب}$ ، $٣^{حـ}$) تكون ....

(أ) متتابعة حسابية أساسها = ٣ (ب) متتابعة هندسية أساسها = ٣

(جـ) متتابعة حسابية أساسها = $٣^{م}$ (د) متتابعة هندسية أساسها = $٣^{م}$

تطبيقات على المتتابعة الهندسية

١ سيارة ثمنها ١٥٠ ألف جنيه فإذا كان ثمن السيارة يتناقص سنويًا بنسبة ١٠٪

فكم يكون ثمن السيارة بعد ٤ سنوات ؟ «٩٨٤١٥ جنيهًا»

---

٢ موظف راتبه الشهرى ١٢٠٠ جنيه ويحصل على علاوة سنوية ثابتة بنسبة ١٠٪ زيادة عن راتبه فى السنة السابقة مباشرة. فكم يكون راتبه بالجنيه بعد مرور ٤ سنوات ؟ «١٧٥٦,٩٢ جنيه»

---

٣ يصب الماء فى خزان بمعدل ضعف اليوم السابق له مباشرة ، فإذا صب فى اليوم الأول ١٢ لترًا فبعد كم يومًا يصب فيه ١٥٣٦ لترًا ؟ «٨ أيام»

---

٤ إذا كان عدد الطلاب المقبولين بالمرحلة الثانوية فى إحدى الإدارات التعليمية يزداد بمعدل ٤٪ سنويًا ، وكان عدد الطلاب حاليا ٢٤٠٠ طالب. فكم من المتوقع أن يكون عددهم بعد ٦ سنوات ؟ «٣٠٣٧ طالبًا»

---

٥ **الربط باللياقة البدنية :** يمارس كمال رياضة المشى سيرًا على الأقدام ، لتجديد لياقته البدنية وإنقاص وزنه الزائد ، فإذا قطع فى اليوم الأول مسافة ٥٠ مترًا ، وكان يقطع فى كل يوم تالٍ ضعف المسافة التى يقطعها فى اليوم السابق مباشرة.

(أ) اكتب متتابعة المسافات التى يقطعها يوميًا.

(ب) أوجد المسافة التى يقطعها فى اليوم السابع. «(٥٠ ، ١٠٠ ، ٢٠٠ ، ...) ، ٣٢٠٠ متر»



الدرس

5

المتسلسلات الهندسية

المتسلسلة الهندسية

هى مجموع حدود المتتابعة الهندسية.

أى أنه : إذا كانت ($أ ، أ ر ، أ ر^٢ ، ..... ، أ ر^{ن-١}$) متتابعة هندسية

فإن : $أ + أ ر + أ ر^٢ + ... + أ ر^{ن-١} = \sum_{ر=١}^{ن} أ ر^{ر-١}$ (حيث ن عدد حدود المتتابعة)

يسمى متسلسلة هندسية فمثلًا المتسلسلة : $٣ + ٦ + ١٢ + ٢٤ + ٤٨ + ٩٦ = \sum_{ر=١}^{٦} ٣ (٢)^{ر-١}$ هى مجموع حدود المتتابعة الهندسية (٣ ، ٦ ، ١٢ ، ٢٤ ، ٤٨ ، ٩٦) التى حدها الأول أ = ٣ ، وأساسها ر = ٢

وحدها العام : $ح_ن = أ ر^{ن-١} = ٣ (٢)^{ن-١}$ وعدد حدودها = ٦ حدود.

مجموع ن حدًا الأولى من متسلسلة هندسية ($جـ_ن$)

١ إيجاد مجموع ن حدًا من متسلسلة هندسية بمعلومية حدها الأول (أ) وأساسها (ر) :

لأى متسلسلة هندسية حدها الأول = أ ، وأساسها = ر يكون :

$جـ_ن = أ + أ ر + أ ر^٢ + ... + أ ر^{ن-١}$ (١)

وبضرب الطرفين فى ر : ∴ $ر جـ_ن = أ ر + أ ر^٢ + أ ر^٣ + ... + أ ر^ن$ (٢)

وبطرح (٢) من (١) : ∴ $جـ_ن - ر جـ_ن = أ - أ ر^ن$ ∴ $جـ_ن (١ - ر) = أ (١ - ر^ن)$

∴ $جـ_ن = \frac{أ (١ - ر^ن)}{١ - ر}$ ، ر ≠ ١

ملاحظات

١ يمكن كتابة قانون المجموع على الصورة $حـ_ن = \frac{أ(ر^ن - ١)}{ر - ١}$ ، ر ≠ ١

٢ إذا كانت : ر = ١ فإن : حـ$_ن$ = أ + أ + أ + أ + ... + أ (ن حدًا) = ن أ

أى أن : $حـ_ن = \sum_{ر=١}^{ن} أ = ن أ$

٣ $حـ_ن = \sum_{ر=١}^{ن} أ ر^{ر-١} = \frac{أ(١ - ر^ن)}{١ - ر}$ حيث ر ≠ ١

مثال ١

أوجد مجموع الحدود الستة الأولى من المتتابعة الهندسية : (٤ ، ١٢ ، ٣٦ ، .....)

الحل

أ = ٤ ، ر = $\frac{١٢}{٤}$ = ٣ ، ن = ٦

∵ $حـ_ن = \frac{أ(١ - ر^ن)}{١ - ر}$ ∴ $حـ_٦ = \frac{٤(١ - ٣^٦)}{١ - ٣} = ١٤٥٦$

٢ إيجاد مجموع ن حدًا من متسلسلة هندسية بمعلومية حدها الأول (أ) وحدها الأخير (ل) :

∵ $حـ_ن = \frac{أ(١ - ر^ن)}{١ - ر} = \frac{أ - أ ر^ن}{١ - ر}$ (١) ، ∵ ل = أ $ر^{ن-١}$

∴ ل ر = أ $ر^ن$ وبالتعويض فى (١) : ∴ $حـ_ن = \frac{أ - ل ر}{١ - ر}$ ، ر ≠ ١

ويمكن استخدام القانون على الصورة : $حـ_ن = \frac{ل ر - أ}{ر - ١}$ ، ر ≠ ١

مثال ٢

أوجد قيمة : ٢ + ٦ + ١٨ + ... + ٤٨٦

الحل

أ = ٢ ، ر = $\frac{٦}{٢}$ = ٣ ، ل = ٤٨٦

∵ $حـ_ن = \frac{أ - ل ر}{١ - ر}$ ∴ $حـ_ن = \frac{٢ - ٤٨٦ \times ٣}{١ - ٣} = ٧٢٨$

∴ ٢ + ٦ + ١٨ + ... + ٤٨٦ = ٧٢٨

استخدام رمز التجميع $\sum$

مثال ٣

أوجد : ١ $\sum_{ر=٤}^{١٠} ٥ (٢)^{ر-١}$ ٢ $\sum_{ر=١}^{٥} ١٢٥ (٥)^{١-ر}$

الحـــل

١ $\sum_{ر=٤}^{١٠} ٥ (٢)^{ر-١} = ح_٤ + ح_٥ + ح_٦ + ... + ح_{١٠}$ من متتابعة هندسية حدها الأول أ = ٥

وأساسها ر = ٢ بدءًا من $ح_٤$ إلى $ح_{١٠}$

، ∵ $ح_٤ = أ ر^٣ = ٥ × ٢^٣ = ٤٠$ ، $ح_{١٠} = أ ر^٩ = ٥ × ٢^٩ = ٢٥٦٠$

، ∵ $حـ_ن = \frac{أ - ل ر}{١ - ر}$ وبوضع أ = ٤٠ ، ل = ٢٥٦٠ ، ر = ٢

∴ $حـ_ن = \frac{٤٠ - ٢٥٦٠ × ٢}{١ - ٢} = ٥٠٨٠$ ∴ $\sum_{ر=٤}^{١٠} ٥ (٢)^{ر-١} = ٥٠٨٠$

* لاحظ أنه : فى المثال السابق يمكن إيجاد عدد الحدود المطلوب جمعها :

ن = ١٠ - ٤ + ١ = ٧ حدود.

واستخدام القانون : $حـ_ن = \frac{أ (١ - ر^ن)}{١ - ر}$ فيكون $حـ_٧ = \frac{٤٠ (١ - ٢^٧)}{١ - ٢} = ٥٠٨٠$

٢ ∵ $\sum_{ر=١}^{٥} ١٢٥ (٥)^{١-ر} = \sum_{ر=١}^{٥} ١٢٥ \left(\frac{١}{٥}\right)^{ر-١}$ وهى مجموع حدود متتابعة هندسية

حدها الأول أ = ١٢٥ وأساسها ر = $\frac{١}{٥}$ بدءًا من $ح_١$ إلى $ح_٥$

، ∵ $ح_١ = أ = ١٢٥$ ، $ح_٥ = أ ر^٤ = ١٢٥ × \left(\frac{١}{٥}\right)^٤ = \frac{١}{٥}$

، ∵ $حـ_ن = \frac{أ - ل ر}{١ - ر}$ ∴ $حـ_٥ = \frac{١٢٥ - \frac{١}{٥} × \frac{١}{٥}}{١ - \frac{١}{٥}} = \frac{٧٨١}{٥}$

∴ $\sum_{ر=١}^{٥} ١٢٥ (٥)^{١-ر} = \frac{٧٨١}{٥}$

مثال ٤

أثبت أن المتتابعة $(ح_ن) = \left(٢ (-٣)^{ن-١}\right)$ متتابعة هندسية وأوجد مجموع الحدود الثمانية الأولى منها.

الحـــل

∵ $\frac{ح_{ن+١}}{ح_ن} = \frac{٢ (-٣)^ن}{٢ (-٣)^{ن-١}} = -٣$ = مقدار ثابت هو أساس المتتابعة. ∴ المتتابعة هندسية.

بوضع ن = ١ ∴ $ح_١ = ٢ (-٣)^{١-١} = ٢ (-٣)^٠ = ٢$ ∴ أ = ٢ ، ر = -٣

، ∵ $حـ_ن = \frac{أ (١ - ر^ن)}{١ - ر}$ ∴ $حـ_٨ = \frac{٢ \left[١ - (-٣)^٨\right]}{١ + ٣} = -٣٢٨٠$

مثال ٥

كم حدًا يلزم أخذه من المتتابعة الهندسية (٠,١ ، -٠,٤ ، ١,٦ ، ...) ابتداء من الحد الأول ليكون المجموع -٨١,٩ ؟

الحل

$ا = ٠,١$ ، $ر = \frac{-٠,٤}{٠,١} = -٤$

، ∵ $ح_ن = \frac{ا(١ - ر^ن)}{١ - ر}$ ∴ $-٨١,٩ = \frac{٠,١ [١ - (-٤)^ن]}{١ + ٤}$

∴ $-٨١,٩ = \frac{١ - (-٤)^ن}{٥ × ١٠}$ ∴ $-٨١,٩ × ٥٠ = ١ - (-٤)^ن$

∴ $(-٤)^ن = ٤٠٩٦ = (-٤)^٦$ ∴ $ن = ٦$ ∴ عدد الحدود اللازم أخذها = ٦ حدود.

مثال ٦

أوجد أقل عدد من حدود المتتابعة الهندسية (٧ ، ١٤ ، ٢٨ ، ...) يؤخذ ابتداء من الحد الأول ليكون المجموع أكبر من ٧٠٠٠

الحل

$ا = ٧$ ، $ر = \frac{١٤}{٧} = ٢$

، ∵ $ح_ن = \frac{ا(١ - ر^ن)}{١ - ر}$ ∴ $ح_ن = \frac{٧(١ - ٢^ن)}{١ - ٢}$ ∴ $ح_ن = ٧(٢^ن - ١)$

ويكون $ح_ن > ٧٠٠٠$ إذا كان $٧(٢^ن - ١) > ٧٠٠٠$ ∴ $٢^ن - ١ > ١٠٠٠$

∴ $٢^ن > ١٠٠١$ وبأخذ لوغاريتم الطرفين : ∴ $ن$ لو ٢ > لو ١٠٠١

∴ $ن > \frac{لو ١٠٠١}{لو ٢}$ وباستخدام الآلة الحاسبة $ن > ٩,٩٦٧٢٢٦٢٥٩$

∴ $ن = ١٠$ أ، ١١ أ، ١٢ أ، ..... ∴ أقل عدد من الحدود يمكن أخذه هو ١٠ حدود.

مثال ٧

إذا كان مجموع الخمسة حدود الأولى من متتابعة هندسية يساوي ٣١ ومجموع الخمسة حدود التالية يساوي ٩٩٢ فأوجد المتتابعة وأوجد حاصل ضرب حدودها العشرة الأولى.

الحل

∵ $ح_٥ = ٣١$ ∴ $٣١ = \frac{ا(١ - ر^٥)}{١ - ر}$ (١)

، ∵ مجموع الحدود العشرة الأولى = ٣١ + ٩٩٢ = ١٠٢٣ ∴ $١٠٢٣ = \frac{ا(١ - ر^{١٠})}{١ - ر}$ (٢)

بقسمة (٢) على (١) : ∴ $\frac{١٠٢٣}{٣١} = \frac{١ - ر^{١٠}}{١ - ر^٥}$ ∴ $\frac{١٠٢٣}{٣١} = \frac{(١ - ر^٥)(١ + ر^٥)}{١ - ر^٥}$

∴ $1 + ر^{5} = ٣٣$ ∴ $ر^{5} = ٣٢ = (٢)^{5}$ ∴ ر = ٢

وبالتعويض فى (١) :

∴ $٣١ = \frac{أ(٣٢ - ١)}{٢ - ١}$ ∴ ٣١ = ٣١ أ

∴ أ = ١ ∴ المتابعة هى (١ ، ٢ ، ٤ ، ...)

لاحظ أن :

إذا كان : $ح_{1}$ = مجموع ن حدًا الأولى من حدود متتابعة هندسية ، $ح_{2}$ = مجموع ن حدًا التالية لها

فإن : $ر^{ن} = \frac{ح_{2}}{ح_{1}}$

، حاصل ضرب الحدود العشرة الأولى = أ × أ ر × أ $ر^{2}$ × ... × أ $ر^{9}$

= (أ × أ × أ × ... إلى ١٠ عوامل) × (ر × $ر^{2}$ × $ر^{3}$ × ... × $ر^{9}$)

= $أ^{10} ر^{1 + 2 + 3 + ... + 9} = أ^{10} ر^{\frac{9}{2}(1 + 9)} = أ^{10} ر^{45}$

، ∵ أ = ١ ، ر = ٢ ∴ حاصل ضرب الحدود العشرة الأولى = $(١)^{10} × (٢)^{45} = ٢^{45}$

حل آخر :

∵ ح الأولى = ٣١ ∴ أ + أ ر + أ $ر^{2}$ + أ $ر^{3}$ + أ $ر^{4}$ = ٣١

∴ أ (١ + ر + $ر^{2}$ + $ر^{3}$ + $ر^{4}$) = ٣١ (١)

∵ ح التالية = ٩٩٢ ∴ أ $ر^{5}$ + أ $ر^{6}$ + أ $ر^{7}$ + أ $ر^{8}$ + أ $ر^{9}$ = ٩٩٢

∴ أ $ر^{5}$ (١ + ر + $ر^{2}$ + $ر^{3}$ + $ر^{4}$) = ٩٩٢ (٢)

وبقسمة (٢) على (١) : ∴ $ر^{5} = ٣٢ = ٢^{5}$ ∴ ر = ٢

وبالتعويض فى (١) : ∴ أ (١ + ٢ + ٤ + ٨ + ١٦) = ٣١ ∴ ٣١ أ = ٣١ ∴ أ = ١

∴ المتابعة هى (١ ، ٢ ، ٤ ، ...) ثم يكمل الحل.

ملاحظة

إذا كان : $ح_{ن}$ هو مجموع حدود المتتابعة بدءًا من $ح_{1}$ إلى $ح_{ن}$ فإن : $ح_{ن} = ح_{ن} - ح_{ن-1}$ لكل ن > ١

فمثلًا : $ح_{2} = ح_{2} - ح_{1}$ ، $ح_{3} = ح_{3} - ح_{2}$ وهكذا.

مثال ٨

إذا كان مجموع ن حدًا الأولى من متتابعة هندسية يعطى بالقانون $ح_{ن} = ٢٥٦ - ٢^{8 - ن}$ فأوجد المتتابعة وأوجد كذلك حدها السابع.

الحـل

$ح_ن = ٢٥٦ - ٢^{٨ - ن}$

* بوضع $ن = ١$ ∴ $ح_١ = ٢٥٦ - ٢^٧ = ٢٥٦ - ١٢٨ = ١٢٨$ ∴ $ع_١ = ١٢٨$

* بوضع $ن = ٢$ ∴ $ح_٢ = ٢٥٦ - ٢^٦ = ٢٥٦ - ٦٤ = ١٩٢$

∴ $ع_١ + ع_٢ = ١٩٢$ ∴ $ع_٢ = ١٩٢ - ١٢٨ = ٦٤$

* بوضع $ن = ٣$ ∴ $ح_٣ = ٢٥٦ - ٢^٥ = ٢٥٦ - ٣٢ = ٢٢٤$

∴ $ع_١ + ع_٢ + ع_٣ = ٢٢٤$ ∴ $ع_٣ = ٢٢٤ - ١٩٢ = ٣٢$

∴ المتتابعة هى (١٢٨ ، ٦٤ ، ٣٢ ، ...)

، ∵ $ع_٧ = ح_٧ - ح_٦$ ∴ $ع_٧ = [٢٥٦ - ٢^١] - [٢٥٦ - ٢^٢] = ٢٥٤ - ٢٥٢ = ٢$

مثال ٩

صهريج مياه سعته ٦٣٠٥ لترًا كان فارغًا ثم مُلئ بالماء بواسطة صنبور يصب فى الساعة الأولى ١٢٨ لترًا ، ويصب فى كل ساعة تالية مرة ونصف مرة قدر ما صبه فى الساعة السابقة. بعد كم ساعة يمتلئ الصهريج ؟

الحـل

مقدار ما صبه فى الساعة الأولى = ١٢٨ ∴ ما يصب فى الساعة الثانية = $١٢٨ \left(\frac{٣}{٢}\right)$

، ما يصب فى الساعة الثالثة = $١٢٨ \left(\frac{٣}{٢}\right) \times \frac{٣}{٢} = ١٢٨ \left(\frac{٣}{٢}\right)^٢$ وهكذا ...

∴ ما يصب فى الصهريج فى الساعات المتتالية يكون متتابعة هندسية هى :

$\left(١٢٨ ، ١٢٨ \left(\frac{٣}{٢}\right) ، ١٢٨ \left(\frac{٣}{٢}\right)^٢ ، ...\right)$

وعندما يمتلئ الصهريج يكون مجموع ن حدًا من هذه المتتابعة = سعة الصهريج أى ٦٣٠٥ .

، ∵ $ح_ن = \frac{أ(١ - ر^ن)}{١ - ر}$ ∴ $٦٣٠٥ = \frac{١٢٨ \left[١ - \left(\frac{٣}{٢}\right)^ن\right]}{١ - \frac{٣}{٢}}$

∴ $٦٣٠٥ = ١٢٨ \times ٢ \left[\left(\frac{٣}{٢}\right)^ن - ١\right]$ ∴ $\frac{٦٣٠٥}{١٢٨ \times ٢} = \left(\frac{٣}{٢}\right)^ن - ١$

∴ $\left(\frac{٣}{٢}\right)^ن = \frac{٦٣٠٥}{١٢٨ \times ٢} + ١$ ∴ $\left(\frac{٣}{٢}\right)^ن = \frac{٦٥٦١}{٢٥٦} = \left(\frac{٣}{٢}\right)^٨$

∴ $ن = ٨$ ∴ الصهريج يمتلئ بعد ٨ ساعات.

المتسلسلات الهندسية غير المنتهية

تعريـــف

المتسلسلة الهندسية غير المنتهية هى التى لها عدد لا نهائى من الحدود.

- وإذا كان مجموعها يقترب من عدد حقيقى (أى يساوى تقريبًا عددًا حقيقيًا) فإنها تكون متقاربة (تقاربية).
- وإذا كان ليس لها مجموع فإنها تكون غير متقاربة (تباعدية).

أى أن : المتسلسلة الهندسية : $أ + أ ر + أ ر^٢ + ... + أ ر^{ن - ١} + ... = \sum_{ر=١}^{\infty} أ ر^{ر - ١}$ متسلسلة غير منتهية.

وتكون : (١) متقاربة (يمكن إيجاد مجموعها) إذا كان : |ر| < ١ **أى :** -١ < ر < ١

(٢) غير متقاربة (لا يمكن إيجاد مجموعها) إذا كان : |ر| > ١ **أى :** ر > ١ أ، ر < -١

مجموع المتتابعة الهندسية غير المنتهية

∵ مجموع المتتابعة الهندسية يعطى بالقانون : $ح_ن = \frac{أ(١ - ر^ن)}{١ - ر}$

وعندما ن ← ∞ ، |ر| < ١ فإن : $ر^ن$ ← صفر

حينئذ يصبح مجموع عدد لا نهائى من حدود المتتابعة الهندسية : $ح_\infty = \frac{أ}{١ - ر}$

مثال ٩

بين أى من المتسلسلات الهندسية الآتية يمكن جمع عدد لا نهائى من حدودها وأوجد هذا المجموع إن أمكن :

١ ٨١ - ٢٧ + ٩ - ٣ + ...

٢ -١ - ٢ - ٤ - ٨ - .....

٣ $\sum_{ر=١}^{\infty} (٢ \times ٣^{١ - ر})$

الحل

١ ∵ $ر = \frac{-٢٧}{٨١} = \frac{-١}{٣}$ ∴ $|ر| = |\frac{-١}{٣}| = \frac{١}{٣} < ١$

∴ المتسلسلة تقاربية ويمكن جمع عدد لا نهائى من حدودها.

، ∵ أ = ٨١ ∴ $ح_\infty = \frac{أ}{١ - ر} = \frac{٨١}{١ - (-\frac{١}{٣})} = \frac{٣}{٤} ٦٠$

٢ ∵ $ر = \frac{-٢}{-١} = ٢$ ∴ $|ر| = |٢| = ٢ > ١$

∴ المتسلسلة غير تقاربية ولا يمكن جمع عدد لا نهائى من حدودها.

٣ ∵ $\sum_{ر=١}^{\infty} (٢ \times ٣^{١ - ر}) = \sum_{ر=١}^{\infty} \left(٢ \times \left(\frac{١}{٣}\right)^{ر - ١}\right)$ ∴ أ = ٢ ، ر = $\frac{١}{٣}$

، ∵ $|ر| = |\frac{١}{٣}| = \frac{١}{٣} < ١$

∴ المتسلسلة تقاربية ويمكن جمع عدد لا نهائى من حدودها.

∴ $ح_\infty = \frac{أ}{١ - ر} = \frac{٢}{١ - \frac{١}{٣}} = ٣$

مثال ١٠

مجموع عدد غير منته من حدود متتابعة هندسية يساوى ٤ وحدها الثانى -٣ أوجد المتتابعة.

الحل

∵ $ح_\infty = ٤$ ∴ $\frac{أ}{١ - ر} = ٤$ (١)

∵ $ع_٢ = -٣$ ∴ أ ر = -٣ (٢)

وبقسمة (٢) على (١) : ∴ $أ ر \times \frac{١ - ر}{أ} = \frac{-٣}{٤}$

∴ $ر (١ - ر) = \frac{-٣}{٤}$ ∴ $٤ ر^{٢} - ٤ ر - ٣ = ٠$

∴ $(٢ ر - ٣)(٢ ر + ١) = ٠$ ∴ $ر = \frac{٣}{٢}$ (مرفوض) أ، $ر = -\frac{١}{٢}$

وبالتعويض فى (٢) : ∴ $أ = ٦$ ∴ المتتابعة هى $(٦ ، -٣ ، \frac{٣}{٢} ، ...)$

مثال ١٢

متتابعة هندسية أى حد من حدودها يساوى ضعف مجموع الحدود التالية له إلى ∞ من الحدود أوجد أساسها، وإذا كان حدها الثالث = ٩ فأوجد المتتابعة.

الحـــل

نفرض أن المتتابعة هى $(أ ، أ ر ، أ ر^{٢} ، ...)$

، ∵ أى حد من حدودها = ضعف مجموع الحدود التالية له إلى ∞

∴ $أ = ٢ (أ ر + أ ر^{٢} + أ ر^{٣} + ...)$ ∴ $أ = ٢ \times \frac{أ ر}{١ - ر}$

[لاحظ أن المتتابعة $(أ ر ، أ ر^{٢} ، أ ر^{٣} ، ...)$ متتابعة هندسية حدها الأول أ ر وأساسها ر]

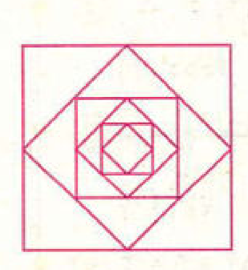
∴ $أ (١ - ر) = ٢ أ ر$ وبالقسمة على أ ∴ $١ - ر = ٢ ر$ ∴ $٣ ر = ١$

∴ $ر = \frac{١}{٣}$ ، ∵ $ح_{٣} = ٩$ ∴ $أ ر^{٢} = ٩$

∴ $أ \left(\frac{١}{٣}\right)^{٢} = ٩$ ∴ $أ = ٨١$

∴ المتتابعة هى : (٨١ ، ٢٧ ، ٩ ، ٣ ، ...)

مثال ١٣



الشكل المقابل يبين ستة مربعات فى متتابعة لا نهائية فيها كل مربع أصغر مكون من توصيل منتصفات أضلاع المربع الأكبر منه مباشرة فإذا كانت مساحة المربع الأكبر ١٦ وحدة مربعة أوجد مجموع مساحات هذه المربعات إلى ∞



الحـــل

∵ مساحة المربع الناتج من توصيل منتصفات أضلاع مربع تساوى $\frac{١}{٢}$ مساحة المربع الأكبر

∴ مجموع مساحات المربعات إلى ∞ يكون متسلسلة هندسية لا نهائية حدها الأول ١٦ وأساسها $\frac{١}{٢}$

∴ $ح_{\infty} = \frac{١٦}{١ - \frac{١}{٢}} = ٣٢$ وحدة مربعة.

تمـارين 5 على المتسلسلات الهندسية

اختبر نفسك

من أسئلة الكتاب المدرسى • فهـم • تطبيق • مستويات عليا

أولًا أسئلة الاختيار من متعدد

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

تمارين على المتسلسلة الهندسية ومجموع ن حدًا الأولى من متسلسلة هندسية

(١) مجموع المتتابعة الهندسية التى فيها أ = $\frac{1}{2}$ ، ر = −٢ ، ن = ١٠ يساوى ....

(أ) −١٧٠,٥ (ب) ١٥٨ (جـ) ١٦٤ (د) −١٦٤

(٢) المتتابعة الهندسية التى حدها الأول أ = ٢ ، وأساسها ر = ١

يكون مجموع ١٠ حدود الأولى منها = ...

(أ) ٢٠ (ب) ٢ (جـ) ١٠ (د) ١٠٢٤

(٣) مجموع المتتابعة الهندسية التى فيها أ = ٩ ، ر = ٣ ، ل = ٦٥٦١ هو ....

(أ) ٢٩٥٢٤ (ب) ٩٨٣٧ (جـ) ٢٩٥٤ (د) ٨٩٣٧

(٤) مجموع ٨ حدود الأولى من المتسلسلة الهندسية : $\left(\frac{1}{4} + \frac{1}{2} + 1 + 2 + \cdots\right)$ يساوى ....

(أ) $63\frac{3}{4}$ (ب) ٣٢ (جـ) $31\frac{3}{4}$ (د) ٦٤

(٥) $\sum_{ر=1}^{8} 5\,(2)^{ر-1} =$ ....

(أ) ٢٥٥٥ (ب) ٦٣٥ (جـ) ١٢٧٥ (د) ٥١٢٧

(٦) مجموع المتتابعة الهندسية (١ ، $-\frac{1}{2}$ ، $\frac{1}{4}$ ، ... إلى ٩ حدود) يساوى ....

(أ) $\frac{171}{256}$ (ب) $\frac{-85}{128}$ (جـ) $\frac{-85}{256}$ (د) $\frac{178}{256}$

(٧) ٣ + ٦ + ١٢ + ... + ١٩٢ = ...

(أ) ١٩٢ (ب) ٣٨١ (جـ) ١٨٩ (د) ٧٦٥

(٨) مجموع المتتابعة الهندسية (٣ ، −٦ ، ١٢ ، ... ، ٧٦٨) يساوى ....

(أ) −٩٨ (ب) −٣١٤ (جـ) ٤٩٨ (د) ٥١٣

(٩) مجموع الثمانية حدود الأولى من المتتابعة الهندسية ($ح_ن$) حيث $ح_ن = 2\,(3)^{ن+1}$

يساوى ....

(أ) ٥٦٠١٤ (ب) ٥٨٠٩٤ (جـ) ٥٩٠٤٠ (د) ٤٩٥٠

(١٠) مجموع ٥ حدود من المتتابعة الهندسية (١ ، ٣ ، ٩ ، ...) ابتداءً من حدها الثالث يساوى ....

(أ) ١٠٨٩ (ب) ٢٠١٣ (جـ) ٩٩٨ (د) ١٠٥٤

(١١) فى المتسلسلة الهندسية التى حدها الأول أ = ٢ ، أساسها ر = $\frac{١}{٢}$ يكون $\sum_{ن=١}^{٦}$ أ ر$^{ن-١}$ = ...

(أ) $٣\frac{١٥}{١٦}$ (ب) $\frac{١}{١٦}$ (جـ) $٣\frac{٧}{٨}$ (د) $\frac{١}{٣٢}$

(١٢) $\sum_{ن=٢}^{٧}$ (٢ × ٣$^{ن-١}$) = ...

(أ) ٢٤٢ (ب) ١٤٥٨ (جـ) ٧٣٨ (د) ٢١٧٨

(١٣) متتابعة هندسية مجموع ن حدًا الأولى منها يعطى بالعلاقة : حـ$_ن$ = ٣^ن − ١

فإن الحد الخامس منها يساوى ....

(أ) ١٦٢ (ب) ٢٤٣ (جـ) ٨١ (د) ٧٢٩

(١٤) مجموع الستة حدود الأولى فى المتتابعة الهندسية (ح$_ن$) حيث ح$_ن$ = ٣ (٢)^ن يساوى ....

(أ) ٧٦٢ (ب) ١٨٦ (جـ) ٣٧٨ (د) ٧٥٦

(١٥) عدد الحدود الذى يلزم أخذها من المتتابعة الهندسية (٣ ، ٦ ، ١٢ ، ...) ابتداءً من حدها الأول ليكون مجموع هذه الحدود = ٣٨١ هو .... حدًا.

(أ) ٨ (ب) ٦ (جـ) ٩ (د) ٧

(١٦) عدد الحدود التى يجب أخذها من المتتابعة الهندسية (٢ ، ٦ ، ١٨ ، ...) ابتداءً من حدها الثانى ليكون مجموع هذه الحدود مساويًا ٦٥٥٨ هو .... حدًا.

(أ) ٧ (ب) ٨ (جـ) ٩ (د) ١٠

(١٧) المتتابعة الهندسية التى حدها الأول = ٢٤٣ ، حدها الأخير = ١

، مجموع حدودها ٣٦٤ هى ....

(أ) (٢٤٣ ، ٢٧ ، ٣ ، ...) (ب) (٧٢٩ ، ٢٤٣ ، ... ، ١)

(جـ) (٢٤٣ ، ٨١ ، ... ، ١) (د) (٢٤٣ ، ١٢١,٥ ، ٦٠,٧٥ ، ... ، ١)

(١٨) المتتابعة الهندسية التى مجموعها ١٠٩٣ ، وحدها الأخير ٧٢٩ وأساسها ٣ هى ....

(أ) (١ ، ٣ ، ٩ ، ... ، ٧٢٩) (ب) (٢ ، ٦ ، ١٨ ، ... ، ٧٢٩)

(جـ) (٣ ، ٩ ، ٢٧ ، ... ، ٧٢٩) (د) (−٣ ، ٩ ، −٢٧ ، ... ، ٧٢٩)

(١٩) أقل عدد من حدود المتتابعة الهندسية (٥ ، ١٥ ، ٤٥ ، ...) يلزم أخذه ابتداءً من حدها الأول ليكون المجموع أكبر من ٦٤٠٠ هو .... حدًا.

(أ) ٥ (ب) ٦ (جـ) ٧ (د) ٨

(٢٠) متتابعة هندسية مجموع الخمسة حدود الأولى منها = ٧,٧٥ ومجموع الخمسة حدود التالية لها = ٢٤٨ فإن المتتابعة هى ....

(أ) (٤ ، ٢ ، ١ ، ...) (ب) ($\frac{١}{٤}$ ، $\frac{١}{٢}$ ، ١ ، ...)

(جـ) (٢ ، ٤ ، ٨ ، ...) (د) ($\frac{١}{٨}$ ، $\frac{١}{٤}$ ، $\frac{١}{٢}$ ، ...)

(٢١) متتابعة هندسية مجموع حديها الرابع والسادس = ١٢٠ ومجموع حديها الخامس والسابع = ٢٤٠ فإن مجموع ١٠ حدود الأولى منها = ...

(أ) ٧٢٠ (ب) ١٠٢٣ (جـ) ٣٠٦٩ (د) ٦١٣٨

تمارين على المتسلسلات الهندسية غير المنتهية - مجموع المتتابعة الهندسية غير المنتهية

(٢٢) يمكن إيجاد مجموع عدد غير منته من حدود متتابعة هندسية إذا وفقط إذا كان ....

(أ) ر > ١ (ب) ر < ١ (جـ) | ر | > ١ (د) | ر | < ١

(٢٣) مجموع حدود المتتابعة الهندسية : (٨١ ، ٢٧ ، ٩ ، ...) يساوى ....

(أ) $\frac{٢٤٣}{٤}$ (ب) ١١٧ (جـ) ١١٨ (د) $\frac{٢٤٣}{٢}$

(٢٤) مجموع المتتابعة الهندسية (٢٥ ، −٥ ، ١ ، ...) إلى ∞ يساوى ....

(أ) ٢٢ (ب) ٢١ (جـ) $٢٠\frac{٥}{٦}$ (د) $٢١\frac{٣}{٤}$

(٢٥) $\sum_{ر=١}^{\infty} ٤ \left(\frac{١}{٢}\right)^{ر-١}$ = ...

(أ) ٨ (ب) ٤ (جـ) $٤\frac{١}{٢}$ (د) ٢

(٢٦) $\sum_{ن=١}^{\infty} ٢٤ \left(\frac{-١}{٥}\right)^{ن-١}$ = ...

(أ) ٥٠ (ب) ٤٠ (جـ) ٢٠ (د) ١٠

(٢٧) $\sum_{ر=١}^{\infty} ٢٧ \left(٣\right)^{١-ر}$ = ...

(أ) ٤٠ (ب) $\frac{٨١}{٥}$ (جـ) ٣٩ (د) $\frac{٨١}{٢}$

(٢٨) المتسلسلة الهندسية : ٤٨ + ٢٤ + ١٢ + ... باستخدام رمز التجميع تساوى ....

(أ) $\sum_{ر=١}^{\infty} ٤٨ \times ٢^{ر-١}$ (ب) $\sum_{ر=١}^{\infty} ٢٤^{ر-١}$

(جـ) $\sum_{ر=١}^{\infty} ٤٨ \times ٢^{١-ر}$ (د) $\sum_{ر=١}^{\infty} ٢٤ \times \left(\frac{١}{٢}\right)^{ر-١}$

(٢٩) إذا كان مجموع عدد غير منته من حدود متتابعة هندسية أساسها $\frac{١}{٣}$ هو $١٣\frac{١}{٢}$

فإن حدها الأول يساوى ....

(أ) ٦ (ب) ٨ (جـ) ٩ (د) ١٢

(٣٠) إذا كان مجموع عدد غير منته من حدود المتتابعة الهندسية التى حدها الأول ١٢ هو ٩٦

فإن أساسها يساوى ....

(أ) $\frac{١}{٣}$ (ب) $\frac{١}{٢}$ (جـ) $\frac{٧}{٨}$ (د) $\frac{٣}{٤}$

(٣١) مجموع عدد لا نهائى من حدود المتتابعة الهندسية ($ح_ن$) التى حدها الأول

$ح_١ = ١$ ، $ح_ن = ٢ ح_{ن+١}$ يساوى ....

(أ) ∞ (ب) ٢ (جـ) ٣ (د) ٤

(٣٢) مجموع مربعات حدود متتابعة هندسية غير منتهية حدها الأول = ١ وأساسها

يساوى ص هو ....

(أ) $\frac{١}{١ - ص}$ (ب) $\frac{١}{١ - ص^٢}$ (جـ) $\frac{١}{ص^٢}$ (د) $\frac{١}{ص}$

(٣٣) مجموع المتسلسلة $(١ + \frac{١}{س} + \frac{١}{س^٢} + \cdots)$ يساوى .... (حيث $|س| > ١$)

(أ) $\frac{١}{١ - س}$ (ب) $\frac{س}{١ - س}$ (جـ) $\frac{س}{س - ١}$ (د) $\frac{س}{س^٢ - ١}$

(٣٤) متتابعة هندسية حدها الأول يساوى مجموع الحدود التالية إلى ما لا نهاية

فإن أساس هذه المتتابعة يساوى ....

(أ) ٠,٥ (ب) ٠,٣٣٣ (جـ) ٠,٢٥ (د) ٠,٦٦٦

(٣٥) إذا كان الحد الأول من متتابعة هندسية لا نهائية يساوى ضعف مجموع الحدود التالية له

فإن أساس المتتابعة = ...

(أ) ١ (ب) ٢ (جـ) $\frac{١}{٣}$ (د) $\frac{-١}{٣}$

(٣٦) إذا كانت : (٩٦ ، س ، ص ، ع ، ٦ ، ...) هى متتابعة هندسية حدودها موجبة

فإن مجموع عدد غير منته من حدودها = ...

(أ) ١٨٠ (ب) ١٩٢ (جـ) ٣٨٤ (د) ٧٦٨

(٣٧) متتابعة هندسية فيها $ح_٢ = ٢٤٠$ ، $ح_٥ = ٣٠$ فإن مجموع عدد غير منته من حدودها = ...

(أ) ١٩٢٠ (ب) ٩٦٠ (جـ) ٤٨٠ (د) ٣٦٠

(٣٨) مجموع عدد غير منته من حدود متتابعة هندسية = ٥٤ وحدها الأول = ١٨ فإن المتتابعة هى ....

(أ) (١٨ ، ٦ ، ٢ ، ...) (ب) (١٨ ، ٩ ، $\frac{٩}{٢}$ ، ...)

(جـ) (١٨ ، ١٣,٥ ، $\frac{٨١}{٨}$ ، ...) (د) (١٨ ، ١٢ ، ٨ ، ...)

(٣٩) متتابعة هندسية غير منتهية ، حدودها موجبة ، يزيد حدها الأول عن حدها الثانى بمقدار ٣٠ ، ومجموع عدد غير منته من حدودها يساوى $\frac{١٣٥}{٢}$ فإن هذه المتتابعة هى ....

(أ) (٤٥ ، ١٥ ، ٥ ، ...) (ب) (٦٠ ، ٣٠ ، ١٥ ، ...)

(جـ) (٩٠ ، ٦٠ ، ٢٠ ، ...) (د) (٣٢ ، ٢ ، $\frac{٢}{١٦}$ ، ...)

(٤٠) متتابعة هندسية مجموع حدودها إلى ∞ يساوى ٤ ومجموع مكعبات حدودها إلى ∞ يساوى ١٩٢ فإن المتتابعة هى ....

(أ) (٦ ، ٣ ، $\frac{٣}{٢}$ ، ...) (ب) (٨ ، ٦ ، ٤$\frac{١}{٢}$ ، ...)

(جـ) (٦ ، -٢ ، -$\frac{٢}{٣}$ ، ...) (د) (٦ ، -٣ ، $\frac{٣}{٢}$ ، ...)

(٤١) متتابعة هندسية كل حد من حدودها يساوى نصف مجموع الحدود التالية له مباشرة إلى ∞ فإذا كان مجموع حديها الثانى والرابع ٨ $\frac{٢}{٣}$ فإن المتتابعة هى ....

(أ) ($\frac{٢٧}{٨}$ ، $\frac{٩}{٤}$ ، $\frac{٣}{٢}$ ، ...) (ب) (١ ، $\frac{٣}{٢}$ ، $\frac{٩}{٤}$ ، ...)

(جـ) (٩ ، ٦ ، ٤ ، ...) (د) (١ ، $\frac{٢}{٣}$ ، $\frac{٤}{٩}$ ، ...)

(٤٢) متتابعة هندسية حدودها موجبة ، مجموع حديها الثانى والثالث يساوى ٢٠ ومجموع حدودها الثلاثة الأولى يساوى ٦٥ فإن مجموع حدودها إلى ما لا نهاية يساوى ....

(أ) ٤٢,٥ (ب) ٦٧,٥ (جـ) ٧٨,٥ (د) ١٧٠

(٤٣) حاصل ضرب $٩^{\frac{١}{٣}} \times ٩^{\frac{١}{٩}} \times ٩^{\frac{١}{٢٧}} \times$ ... إلى ∞ يساوى ....

(أ) ٣ (ب) ٦ (جـ) ٩ (د) ١

ثانيًا الأسئلة المقالية

تمارين على المتسلسلة الهندسية ومجموع ن حدًا الأولى من متسلسلة هندسية

١ أوجد مجموع كل من المتسلسلتين الهندسيتين الآتيتين :

(١) ١ + ٣ + ٩ + ... + ٦٥٦١ (٢) ٢٠ - ١٠ + ٥ - ..... - $\frac{٥}{٣٢}$

٢ أوجد مجموع كل من المتتابعتين الهندسيتين اللتين فيهما :

(١) أ = ٤ ، ر = ٣ ، ن = ٦ (٢) أ = -٤ ، ر = -$\frac{١}{٢}$ ، ل = $\frac{١}{٨}$

٣ أوجد :

(١) $\sum_{ر=١}^{٥} ٢ \times \left(\frac{١}{٢}\right)^{ر-١}$ «$\frac{٣١}{٨}$» (٢) 📖 $\sum_{ر=٥}^{١٢} ٣ (٢)^{ر-١}$ «١٢٢٤٠»

---

٤ 📖 **أثبت أن :** المتتابعة $(ح_ن) = (١٠ \times ٢^{ن-٢})$ هى متتابعة هندسية ، وأوجد عدد الحدود ابتداءً من الحد الأول التى يجب أخذها من المتتابعة ليكون مجموعها ٢٥٥٥ «٩»

---

٥ متتابعة هندسية حدها الأول ٢ وحدها الرابع ٥٤ أوجد أقل عدد من حدودها يلزم أخذه ابتداءً من الحد الأول ليكون مجموعها أكبر من ٥٠٠٠ «٨»

---

٦ متتابعة هندسية حدها الرابع يساوى ٨ وحدها السابع يساوى ٦٤ أوجد المتتابعة ومجموع العشرة حدود الأولى منها. «(١ ، ٢ ، ٤ ، .....) ، ١٠٢٣»

---

٧ 📖 متتابعة هندسية جميع حدودها موجبة فيها $ح_٢ = ١٢$ ، $ح_٤ = ٢ ح_٣$

أوجد مجموع السبعة حدود الأولى منها. «٧٦٢»

---

٨ 📖 $(ح_ن)$ متتابعة هندسية حدودها موجبة فيها : $ح_٢ = ٦$ ، $ح_٣ - ح_١ = ٩$

أوجد هذه المتتابعة ومجموع الاثنى عشر حدًا الأولى منها. «(٣ ، ٦ ، ١٢ ، ...) ، ١٢٢٨٥»

---

٩ متتابعة هندسية حدودها موجبة وحدها الأول يساوى أربعة أمثال حدها الثالث ومجموع حديها الثانى والخامس = ٣٦ أوجد المتتابعة ومجموع العشرة حدود الأولى منها. «(٦٤ ، ٣٢ ، ١٦ ، .....) ، $١٢٧\frac{٧}{٨}$»

---

١٠ متتابعة هندسية جميع حدودها موجبة فإذا كان : $ح_٣ + ح_٤ = ٦ ح_٢$ ، $ح_٧ = ٣٢٠$

أوجد المتتابعة ثم أوجد مجموع الثمانية حدود الأولى منها. «(٥ ، ١٠ ، ٢٠ ، .....) ، ١٢٧٥»

---

١١ 📖 متتابعة هندسية جميع حدودها موجبة فإذا كان $ح_١ + ح_٢ = ٤٨$ ، $ح_٣ + ح_٤ = ١٩٢$

(١) اكتب هذه المتتابعة. (٢) أوجد مجموع العشرة حدود الأولى منها.

«(١٦ ، ٣٢ ، ٦٤ ، .....) ، ١٦٣٦٨»

---

١٢ متتابعة هندسية مجموع حدودها الثلاثة الأولى يساوى ١٣ ، مجموع حدودها الثلاثة التالية لها يساوى ٣٥١ ، أوجد المتتابعة ومجموع الحدود العشرة الأولى منها. «(١ ، ٣ ، ٩ ، .....) ، ٢٩٥٢٤»

---

١٣ متتابعة هندسية مجموع الأربعة حدود الأولى منها يساوى ٦٠ ومجموع الحدود الأربعة التالية يساوى ١٦ مرة مجموع الحدود الأربعة الأولى. أوجد المتتابعة. «(٤ ، ٨ ، ١٦ ، .....) أ، (-١٢ ، ٢٤ ، -٤٨ ، .....)»

---

١٤ إذا كان مجموع $ن$ حدًا الأولى من متتابعة هندسية يعطى بالقانون : $ج_ن = ١٢٨ - ٢^{٧-ن}$

فأوجد المتتابعة ثم أوجد حدها السابع. «(٦٤ ، ٣٢ ، ١٦ ، .....) ، ١»

تمارين على المتسلسلات الهندسية غير المنتهية - مجموع المتتابعة الهندسية غير المنتهية

١٥ بين أى المتسلسلات الهندسية الآتية يمكن جمع عدد لا نهائى من حدودها ، وأوجد هذا المجموع إن أمكن :

① ٧ + ٢١ + ٦٣ + ...
② ٧٥ + ٤٥ + ٢٧ + ...
③ ١٥ − ٥ + $\frac{٥}{٣}$ − $\frac{٥}{٩}$ + ...
④ ٩٦ − ٤٨ + ٢٤ − ١٢ + ...

١٦ بين أى المتتابعات الهندسية الآتية يمكن إيجاد مجموعها إلى ∞ من الحدود وأوجد هذا المجموع إن أمكن :

① (٢٤ ، ١٢ ، ٦ ، .....)
② (٣ ، −٦ ، ١٢ ، .....)
③ $(ح_ن) = (٥ \times ٢^{ن})$
④ $(ح_ن) = (٢ \times ٥^{١ - ن})$

١٧ أوجد :

① $\sum_{ن=١}^{\infty} ٥٦ \left(\frac{٣}{٤}\right)^{ن-١}$ «٢٢٤»
② $\sum_{ن=٢}^{\infty} \frac{١}{٨١} (٣)^{١-ن}$ «$\frac{١}{١٦٢}$»

١٨ إذا كان الحد الأول من متتابعة هندسية عدد حدودها غير منته = ١٨
، الحد الرابع منها = $\frac{١٦}{٣}$ ، فما مجموعها ؟ «٥٤»

١٩ إذا كان الحد الأول من متتابعة هندسية يساوى ٨١ ، حدها السادس يساوى $\frac{١}{٣}$
أوجد مجموع عدد غير منته من حدودها ابتداء من حدها الثالث. «$\frac{٢٧}{٢}$»

٢٠ متتابعة هندسية مجموع عدد لا نهائى من حدودها ابتداء من حدها الأول يساوى ١٠٨ ، ويزيد حدها الأول عن حدها الثانى بمقدار ١٢ ، أوجد المتتابعة ومجموع حدودها السبعة الأولى.
«(٣٦ ، ٢٤ ، ١٦ ، .....) ، $\frac{٨٢٣٦}{٨١}$»

٢١ أوجد المتتابعة الهندسية التى مجموع حديها الأول والثانى = ١٦ ، ومجموع عدد غير منته من حدودها = ٢٥
«(١٠ ، ٦ ، $\frac{١٨}{٥}$ ، .....) أ (٤٠ ، −٢٤ ، $\frac{٧٢}{٥}$ ، .....)»

٢٢ متتابعة هندسية غير منتهية ، حدها الأول = مجموع الحدود التالية له إلى ما لا نهاية ، مجموع حديها الأول والثانى = ٩ ، أوجد هذه المتتابعة.
«(٦ ، ٣ ، $\frac{٣}{٢}$ ، .....)»

٢٣ متتابعة هندسية حدودها موجبة وكل حد من حدودها يساوى ضعف مجموع الحدود التالية له مباشرة إلى ∞ من الحدود فإذا كان حدها الثالث يساوى المعكوس الضربى لحدها الخامس فأوجد المتتابعة ومجموع الخمسة حدود الأولى منها.
«(٢٧ ، ٩ ، ٣ ، .....) ، $\frac{١٢١}{٣}$»

٢٤ متتابعة هندسية كل حد من حدودها يساوى ٧ أمثال مجموع الحدود التالية له مباشرة إلى ∞
فإذا كان حدها الثالث يساوى $\frac{٣}{٨}$ فأوجد المتتابعة.
«(٢٤ ، ٣ ، $\frac{٣}{٨}$ ، .....)»

٢٥ إذا كان مجموع متتابعة هندسية غير منتهية $\frac{٣٧٥}{٤}$ ، مجموع حديها الأول والثاني يساوى ٩٠ ، فاثبت أنه توجد متتابعتان وأوجدهما. «(٧٥ ، ١٥ ، ٣ ، .....) أ، (١١٢,٥ ، −٢٢,٥ ، ٤,٥ ، .....)»

---

٢٦ متتابعة هندسية فيها $ح_٢ = ٢٤٠$ ، $ح_٥ = ٣٠$ أوجد المتتابعة ثم أوجد مجموع عدد غير منته من حدودها. «(٤٨٠ ، ٢٤٠ ، ١٢٠ ، .....) ، ٩٦٠»

---

٢٧ $(ح_ر)$ متتابعة هندسية فيها : $ح_٢ - ح_٦ = ٤٥$ ، $ح_٤$ الأولى = ١٨٠ ، أوجد المتتابعة ، وبين أنه يمكن جمع عدد لا نهائى من حدودها وأوجد هذا المجموع. «(٩٦ ، ٤٨ ، ٢٤ ، .....) ، ١٩٢»

---

٢٨ متتابعة هندسية مجموع حديها الثانى والثالث يساوى ٢٠ ومجموع حدودها الثلاثة الأولى يساوى ٦٥ بين أن هناك متتابعتين ، وأن إحداهما يمكن جمعها إلى ∞ وأوجد هذا المجموع.

«(٤٥ ، ١٥ ، ٥ ، .....) أ، (٤٥ ، −٦٠ ، ٨٠ ، .....) ، ٦٧,٥»

---

٢٩ 📖 متتابعة هندسية حدودها موجبة غير منتهية مجموع حديها الأول والثانى ٣٦ ومربع حدها الثالث ٣٦ أوجد المتتابعة ثم أوجد مجموعها ابتداء من الحد الأول. «(٢٤ ، ١٢ ، ٦ ، .....) ، ٤٨»

---

٣٠ متتابعة هندسية حدودها موجبة ، مجموع حديها الأول والثانى يساوى ١٠٨ ومجموع حديها الثالث والرابع يساوى ١٢ أوجد المتتابعة وبين أنه يمكن إيجاد مجموع عدد غير منته من حدودها وأوجد ذلك المجموع. «(٨١ ، ٢٧ ، ٩ ، .....) ، ١٢١,٥»

---

٣١ 📖 اكتشف الخطأ :

(١) يمكن إيجاد مجموع متسلسلة هندسية لا نهائية عندما يكون $|ر| \geq ١$

(٢) مجموع عدد غير منته من حدود المتتابعة (١٦ ، ٨ ، ٤ ، ...) أكبر من ضعف حدها الأول.

ثالثاً مسائل تقيس مهارات التفكير

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

(١) متتابعة هندسية غير منتهية فيها الحدان الأول و الثاني عددان صحيحان موجبان مجموعهما = ٣ فإن : $ح_\infty$ = ...

(أ) ٤　　(ب) ٨　　(جـ) ٦٤　　(د) ١٠٢٤

(٢) مجموع المتسلسلة (حا ٦٠° + $حا^٢$ ٦٠° + $حا^٣$ ٦٠° + ...) يساوى ....

(أ) $\frac{١}{٢}$　　(ب) $\frac{١}{٤}$　　(جـ) $\frac{١}{٨}$　　(د) ١

(٣) إذا كان : $\sum_{ر=٠}^{\infty} \frac{أ}{(٤)^ر} = ١٦$ فإن : أ = ...

(أ) ٤　　(ب) ٨　　(جـ) ١٢　　(د) ١٦

تطبيقات حياتية

١ **الربط بالأحياء :** إذا تضاعفت زراعة البكتيريا كل يوم (فى أحد الأوساط الغذائية) ، فكم يكون عدد البكتيريا بعد عشرة أيام إذا كان عددها فى اليوم الأول ٨٠٠ «٨١٨٤٠٠»

---

٢ خزان به ٦١٣٨ لترًا من الماء ، يتسرب منه فى أول يوم ٦ لترات وفى اليوم الثانى ١٢ لترًا وفى اليوم الثالث ٢٤ لترًا وهكذا فبعد كم يوم يصبح الخزان فارغًا ؟ «١٠»

---

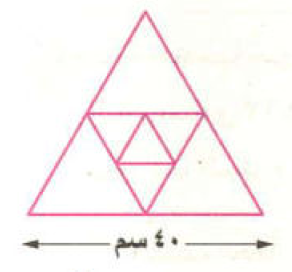
٣ **الربط بالدخل :** بدأ شخص العمل فى مصنع بمرتب سنوى قدره ٧٢٠٠ جنيه على أن يحصل على علاوة سنوية قدرها ٦ ٪ من مرتب السنة السابقة. احسب مرتبه فى السنة السابعة ، ومجموع ما يحصل عليه فى السنوات السبع الأولى. «١٠٢١٣ ، ٦٠٤٣٦ جنيهًا»

---

٤ **الربط بالتعدين :** منجم للذهب ينتج فى العام الأول ٤٢٠٠ كجم من الذهب ، ويتناقص إنتاج المنجم بمعدل ١٠ ٪ سنويًا من إنتاج السنة السابقة لها مباشرة. أوجد إنتاج المنجم فى السنة الثامنة ، ثم احسب إنتاج المنجم خلال الثمان سنوات الأولى. «٢٠٠٨,٨ ، ٢٣٩٢٠ كجم»

---

٥ **الربط بالهندسة :**



يبين الشكل المقابل مثلثًا متساوى الأضلاع طول ضلعه ٤٠ سم ، رسم مثلث آخر نحو الداخل عن طريق توصيل النقاط التى تمثل منتصفات أضلاع المثلث الأكبر ، ويتم تكرار رسم المثلثات الداخلية بنفس الطريقة فأوجد لأقرب عدد صحيح مجموع محيطات الـ ١٠ مثلثات الأولى فى هذا النمط. «٢٤٠ سم»

---

٦ يتناقص إنتاج بئر بترول سنويًا بمعدل ٥٪ عن إنتاج السنة السابقة له مباشرة فإذا كان إنتاج البترول فى السنة الأولى ٤٨٠٠٠ برميل فأوجد مجموع ما ينتجه البئر فى الخمسة سنوات الأولى ، وكذلك أقصى ما يمكن إنتاجه من هذا البئر. «٢١٧١٧٠ ، ٩٦٠٠٠٠ برميل»

---

٧ **الربط بالفيزياء :** دحرجت كرة صغيرة من الحديد على مستوى أفقى فإذا قطعت الكرة فى الدقيقة الأولى ٢٥ مترًا ثم بدأت تقطع ٦٠ ٪ فقط فى كل دقيقة تالية من المسافة التى قطعتها فى الدقيقة السابقة. فأوجد المسافة الكلية التى قطعتها الكرة حتى تقف. «$\frac{١٢٥}{٢}$ متر»

---

٨ كرة من المطاط تسقط من ارتفاع ١٠ أمتار على الأرض وترتد رأسيًا إلى نصف الارتفاع الذى سقطت منه فى كل مرة ترتد فيها لأعلى ، أوجد مجموع المسافات التى قطعتها الكرة حتى تسكن. «٣٠ مترًا»

الوحدة الثانية

التباديل والتوافيق

الدرس 1 · مبدأ العد - التباديل.

الدرس 2 · التوافيق.



الدرس

1

مبدأ العد - التباديل

مبدأ العد الأساسي

تعريف

إذا كان عدد طرق إجراء عمل ما يساوى $م_١$ طريقة وعدد طرق إجراء عمل ثان $م_٢$ طريقة وعدد طرق إجراء عمل ثالث $م_٣$ طريقة وهكذا ... فإن : عدد طرق إجراء هذه الأعمال معًا = $م_١ \times م_٢ \times م_٣ \times ... \times م_ر$

مثال ١

بكم طريقة يمكن لشخص الدخول والخروج من محل له ثلاثة أبواب مرقمة بالأرقام ١ ، ٢ ، ٣ ؟

الحل

عدد طرق الدخول = ٣ طرق (يمكن الدخول من الباب رقم ١ أو ٢ أو ٣ أى بثلاث طرق)

عدد طرق الخروج = ٣ طرق (يمكن الخروج من الباب رقم ١ أو ٢ أو ٣ أى بثلاث طرق)

وبحسب مبدأ العد يكون :

عدد طرق إجراء عمليتى الدخول والخروج معًا = عدد طرق الدخول × عدد طرق الخروج = ٣ × ٣ = ٩ طرق.

ملاحظـة

مبدأ العد ينتج لنا عدد الطرق التى يمكن بها إجراء عمليتين أو أكثر معًا ويمكن توضيح هذه الطرق باستخدام المخطط البيانى المقابل الذى يعرف باسم الشجرة البيانية :



لاحظ أن :

(١ ، ٢) يعبر عن دخول من الباب ١ وخروج من الباب ٢ بينما (٢ ، ١) يعبر عن دخول من الباب ٢ وخروج من الباب ١ ولذلك فإن : (١ ، ٢) ، (٢ ، ١) يعبران عن طريقتين مختلفتين للدخول والخروج.

مبدأ العد المشروط

مثال ٢

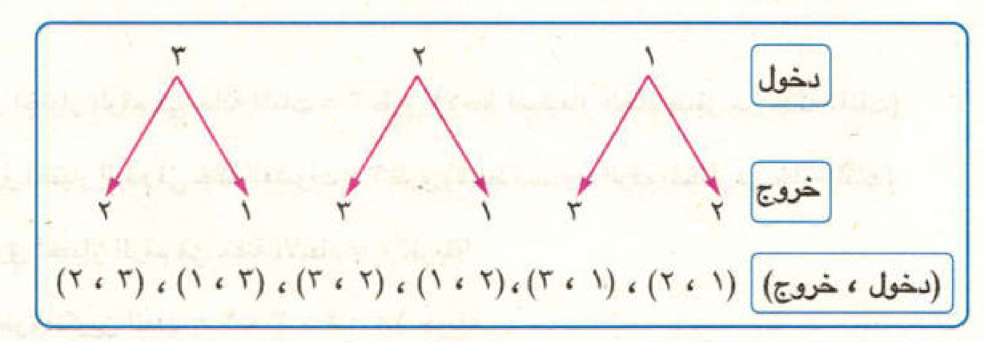
فى المثال السابق إذا أضفنا شرطًا ألا يخرج الشخص من نفس الباب الذى دخل منه فكم يكون عدد طرق دخول وخروج هذا الشخص ؟

الحـــل

عدد طرق الدخول = ٣ طرق (يمكن الدخول من الباب رقم ١ أو ٢ أو ٣ أى بثلاث طرق) عدد طرق الخروج = ٢ طريقة (يمكن الخروج من بابين فقط بعد استبعاد الباب الذى دخل منه) وبحسب مبدأ العد يكون :

عدد طرق إجراء عمليتى الدخول والخروج معًا = ٣ × ٢ = ٦ طرق.

والشجرة البيانية التالية توضح طرق الدخول والخروج



مثال ٣

إذا كان لدى شخص ٤ بدل ، ٦ قمصان ، ٣ أربطة عنق. بكم طريقة يمكن لهذا الشخص الظهور فى زى مكون من بدلة وقميص ورابطة عنق ؟

الحــل

عدد طرق اختيار البدلة = ٤ طرق ، عدد طرق اختيار القميص = ٦ طرق

، عدد طرق اختيار رابطة العنق = ٣ طرق.

∴ عدد طرق اختيار الزى = ٤ × ٦ × ٣ = ٧٢ طريقة.

مثال ٤

كم عدد مكون من رقمين يمكن تكوينه من الأرقام ٢ ، ٤ ، ٥ ، ٦ ، ٨ إذا كان :

١ غير مسموح بتكرار أى رقم فى العدد　　٢ مسموحًا بتكرار الأرقام فى العدد

الحــل

١ عدد طرق اختيار الرقم فى خانة العشرات = ٥ طرق ، عدد طرق اختيار الرقم فى خانة الآحاد = ٤ طرق.

(لاحظ استبعاد الرقم الذى تم اختياره فى خانة العشرات)

∴ عدد طرق تكوين العدد = ٥ × ٤ = ٢٠ طريقة.

٢ عدد طرق اختيار الرقم فى خانة العشرات = ٥ طرق ، عدد طرق اختيار الرقم فى خانة الآحاد = ٥ طرق.

(لاحظ عدم استبعاد الرقم الذى تم اختياره فى خانة العشرات)

∴ عدد طرق تكوين العدد = ٥ × ٥ = ٢٥ طريقة.

مثال ٥

بكم طريقة يمكن تكوين عدد مكون من ٣ أرقام مختلفة من الأرقام {٠ ، ١ ، ٢ ، ٣} ؟

الحــل

عدد طرق اختيار الرقم فى خانة المئات = ٣ طرق (لاحظ استبعاد العدد صفر من خانة المئات)

، عدد طرق اختيار الرقم فى خانة العشرات = ٣ طرق (لاحظ استبعاد الرقم المختار فى خانة المئات)

، عدد طرق اختيار الرقم فى خانة الآحاد = ٢ طريقة

∴ عدد طرق تكوين العدد = ٣ × ٣ × ٢ = ١٨ طريقة.

مثال ⑥

كم عدد الأعداد المكون كل منها من ثلاثة أرقام مختلفة من مجموعة الأرقام {٢ ، ٣ ، ٧ ، ٨} بحيث يكون العدد أصغر من ٨٠٠ ؟

الحـــل

لاحظ أنه لكى يكون العدد أصغر من ٨٠٠ يجب اختيار الرقم فى خانة المئات أقل من ٨

∴ عدد طرق اختيار الرقم فى خانة المئات = ٣ طرق (لاحظ استبعاد الرقم ٨ من الاختيار)

، عدد طرق اختيار الرقم فى خانة العشرات = ٣ طرق.

(لاحظ اختيارنا للرقم ٨ والرقمان الباقيان من الاختيار السابق)

، عدد طرق اختيار الرقم فى خانة الآحاد = ٢ طريقة.

∴ عدد طرق تكوين العدد الأصغر من ٨٠٠ = ٣ × ٣ × ٢ = ١٨ طريقة.

مضروب العدد

مضروب العدد الصحيح الموجب ن يكتب على الصورة |ن ويساوي حاصل ضرب جميع الأعداد الصحيحة الموجبة الأصغر من أو تساوى ن

أى أن |ن = ن(ن − ١) × (ن − ٢) × ... × ٣ × ٢ × ١ ويكون عدد عوامل المضروب = ن من العوامل

فمثلًا : • |٥ = ٥ × ٤ × ٣ × ٢ × ١ (خمسة عوامل)

• |٩٩ = ٩٩ × ٩٨ × ٩٧ × ... × ٣ × ٢ × ١ (٩٩ عاملًا)

ملاحظات

١ أصغر عوامل |ن يساوى واحد وأكبرهم يساوى ن

٢ |٠ = |١ = ١ ومن ذلك إذا كان |ن = ١ فإن : ن = صفر أ، ن = ١

٣ يمكن كتابة مضروب العدد بدلالة مضروب عدد أقل منه أى أن :

|ن = ن |ن − ١ = ن(ن − ١) |ن − ٢ = ... حيث ن ∈ ص$^+$

فمثلًا : |٥ = ٥ |٤ = ٥ × ٤ |٣ = ...

٤ مضروب أى عدد صحيح موجب يقبل القسمة على مضروب أى عدد صحيح موجب أقل منه

فمثلًا : $\frac{|٥}{|٤} = \frac{٥ |٤}{|٤} = ٥$ ، $\frac{|١٢}{|١٠} = \frac{١٢ \times ١١ |١٠}{|١٠} = ١٣٢$

مثال ٧

أوجد بدون استخدام الآلة الحاسبة كلاً مما يأتى :

١) $\frac{١٢!}{١٣!}$ ٢) ٥! − ٤! − ٣! ٣) $\frac{٨!}{٦!} - \frac{٧!}{٥!}$

الحل

١) $\frac{١٢!}{١٣!} = \frac{١٢!}{١٣ \times ١٢!} = \frac{١}{١٣}$

٢) ٥! − ٤! − ٣! = ٥ × ٤ ٣! − ٤ ٣! − ٣! = ٢٠ ٣! − ٤ ٣! − ٣! = ١٥ ٣! = ١٥ × (٣ × ٢ × ١) = ٩٠

٣) $\frac{٨!}{٦!} - \frac{٧!}{٥!} = \frac{٨ \times ٧ \times ٦!}{٦!} - \frac{٧ \times ٦ \times ٥!}{٥!}$ = ٥٦ − ٤٢ = ١٤

ملاحظة

يمكن استخدام الآلة الحاسبة فى إيجاد مضروب العدد بكتابة العدد ثم الضغط على SHIFT



ثم $x!$ ثم =

فمثلاً : لحساب ٥! نضغط 5 ثم SHIFT ثم $x!$ ثم = فيظهر الناتج ١٢٠

مثال ٨

أوجد قيمة ن إذا كان :

١) ن! = ٧٢٠

٢) $\frac{(ن - ١)!}{(ن - ٣)!} = ٣٠$

٣) ن (٢ن − ١)! = ١٢

٤) $\frac{١}{ن!} + \frac{٢}{(ن + ١)!} - \frac{٥٦}{(ن + ٢)!} = ٠$

الحل

١) ∵ ن! = ٧٢٠

∴ ن! = ٦ × ٥ × ٤ × ٣ × ٢ × ١

∴ ن! = ٦!

∴ ن = ٦

لاحظ أنه :

لمعرفة العدد الذى مضروبه	٧٢٠ ÷ ١ = ٧٢٠
= ٧٢٠ نبدأ بقسمة ٧٢٠ ÷ ١	٧٢٠ ÷ ٢ = ٣٦٠
ثم نقسم العدد الناتج ÷ ٢	٣٦٠ ÷ ٣ = ١٢٠
ثم على ٣ ثم على ٤ وهكذا	١٢٠ ÷ ٤ = ٣٠
إلى أن نصل إلى العدد ١ من	٣٠ ÷ ٥ = ٦
ناتج القسمة :	٦ ÷ ٦ = ١

٢) ∵ $\frac{(ن - ١)!}{(ن - ٣)!} = ٣٠$

∴ $\frac{(ن - ١)(ن - ٢)(ن - ٣)!}{(ن - ٣)!} = ٣٠$

∴ (ن − ١) (ن − ٢) = ٦ × ٥

∴ ن − ١ = ٦

∴ ن = ٧

٣) ∵ ن (٢ن − ١)! = ١٢

(بضرب الطرفين × ٢)

∴ ٢ن (٢ن − ١)! = ٢٤

∴ (٢ن)! = ٢٤

∴ (٢ن)! = ٤!

∴ ٢ن = ٤

∴ ن = ٢

٤ $\because \frac{١}{|\underline{ن}} + \frac{٢}{|\underline{ن+١}} - \frac{٥٦}{|\underline{ن+٢}} = ٠$

$\therefore \frac{١}{|\underline{ن}} + \frac{٢}{(ن+١)\,|\underline{ن}} - \frac{٥٦}{(ن+٢)(ن+١)\,|\underline{ن}} = ٠$ (بالضرب × $|\underline{ن}$)

$\therefore ١ + \frac{٢}{ن+١} - \frac{٥٦}{(ن+٢)(ن+١)} = ٠$

$\therefore ١ + \frac{٢}{ن+١} = \frac{٥٦}{(ن+٢)(ن+١)}$

$\therefore \frac{ن+١+٢}{ن+١} = \frac{٥٦}{(ن+٢)(ن+١)}$

$\therefore ن+٣ = \frac{٥٦}{ن+٢}$

$\therefore (ن+٣)(ن+٢) = ٥٦$

$\therefore (ن+٣)(ن+٢) = ٨ \times ٧$

$\therefore ن+٣ = ٨$

$\therefore ن = ٥$

الترتيب فى صف - الترتيب فى دائرة

١ ترتيب ن من الأشياء فى صف واحد

الأول	الثانى	الثالث	الرابع	....	النونى

- عدد طرق اختيار الشىء فى المكان الأول = ن
- عدد طرق اختيار الشىء فى المكان الثانى = (ن - ١)

«لاحظ أن عدد الطرق نقص بمقدار واحد بعد وضع أحد الأشياء فى المكان الأول».

- عدد طرق اختيار الشىء فى المكان الثالث = (ن - ٢) ... وهكذا

إلى أن نصل إلى عدد طرق اختيار الشىء فى المكان النونى = ١

∴ عدد طرق ترتيب ن من الأشياء في صف واحد = ن(ن - ١) (ن - ٢) (ن - ٣) ... × ٣ × ٢ × ١ = $|\underline{ن}$

أى أن عدد طرق ترتيب ن من الأشياء فى صف واحد = $|\underline{ن}$

٢ ترتيب ن من الأشياء على دائرة

حيث إنه ليس للدائرة نقطة بداية أو نقطة نهاية فإن الترتيب يظهر بعد وضع الشىء الأول فى أى مكان على الدائرة ثم :

- اختيار الشىء فى المكان الثانى بطرق عددها (ن - ١)
- اختيار الشىء فى المكان الثالث بطرق عددها (ن - ٢) ... وهكذا إلى أن نصل إلى عدد طرق اختيار الشىء فى المكان النونى وهو ١

∴ عدد طرق ترتيب ن من الأشياء على دائرة = (ن - ١) (ن - ٢) (ن - ٣) ... × ٣ × ٢ × ١ = $|\underline{ن - ١}$

أى أن عدد طرق ترتيب ن من الأشياء على دائرة = $|\underline{ن - ١}$

مثال ٩

بكم طريقة يمكن لمجموعة من ٦ أشخاص فى حفل أن يرتبوا أنفسهم بحيث يجلسون :

[١] فى صف واحد. [٢] حول مائدة مستديرة.

الحـــل

[١] يمكن للأشخاص الستة أن يجلسوا فى صف بطرق عددها = ⌊٦ = ٦ × ٥ × ٤ × ٣ × ٢ × ١ = ٧٢٠ طريقة.

[٢] يمكن للأشخاص الستة أن يجلسوا حول مائدة مستديرة بطرق عددها

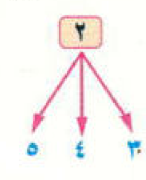
= ⌊٦ − ١ = ⌊٥ = ٥ × ٤ × ٣ × ٢ × ١ = ١٢٠ طريقة.

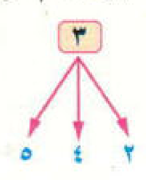
التبـاديـل

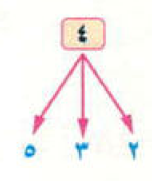
عند تكوين عدد مكون من رقمين مختلفين من الأرقام ٢ ، ٣ ، ٤ ، ٥ فإن عدد طرق تكوين العدد = عدد طرق اختيار الرقم فى خانة العشرات × عدد طرق اختيار الرقم فى خانة الآحاد = ٤ × ٣ = ١٢ طريقة.

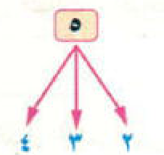
رقم العشرات

رقم الآحاد









الأعداد هى ٢٣ ، ٢٤ ، ٢٥ ، ٣٢ ، ٣٤ ، ٣٥ ، ٤٢ ، ٤٣ ، ٤٥ ، ٥٢ ، ٥٣ ، ٥٤

وهذه الأعداد تمثل كل التبديلات الممكنة للأرقام ٢ ، ٣ ، ٤ ، ٥ باختيار رقمين منهم فى كل مرة وعدد هذه الأعداد (التبديلات) يرمز له بالرمز $^{٤}ل_{٢}$ وتقرأ (٤ لام ٢)

أى أن : $^{٤}ل_{٢}$ = ٤ × ٣ = ١٢ طريقة.

تعريـــف

يرمز لعدد تباديل $ن$ من العناصر المتمايزة مأخوذ منها $ر$ من العناصر فى كل مرة بالرمز $^{ن}ل_{ر}$ حيث :

[١] $^{ن}ل_{ر}$ = $ن(ن - ١)(ن - ٢) ... (ن - ر + ١)$ حيث $١ \leq ر \leq ن$ ، $ن$ ، $^{ن}ل_{ر}$ $\in ص^{+}$

[٢] $^{ن}ل_{ر}$ = ١ عندما $ر = ٠$.

فمثلًا :

- $^{٩}ل_{٦}$ = حاصل ضرب ٦ عوامل أكبرهم ٩ وأصغرهم (٩ − ٦ + ١) = ٤ وكل عامل ينقص بمقدار ١ عن سابقه

أى أن : $^{٩}ل_{٦}$ = ٩ × ٨ × ٧ × ٦ × ٥ × ٤

- $^{ن}ل_{٧}$ = $ن(ن - ١)(ن - ٢) × ... × (ن - ٧ + ١)$

= $ن(ن - ١)(ن - ٢) × ... × (ن - ٦)$ (٧ عوامل أكبرهم $ن$ وأصغرهم $ن - ٦$)

ملاحظات

١ $^{ن}ل_{ر} = \frac{ن!}{(ن-ر)!}$ فمثلًا : $^{7}ل_{3} = \frac{7!}{(7-3)!} = \frac{7!}{4!}$ ، $^{ن}ل_{ر-1} = \frac{ن!}{(ن-(ر-1))!} = \frac{ن!}{(ن-ر+1)!}$

٢ $^{ن}ل_{0} = 1$ الإثبات : $^{ن}ل_{0} = \frac{ن!}{(ن-0)!} = \frac{ن!}{ن!} = 1$ فمثلًا : $^{5}ل_{0} = 1$ ، $^{(ن-1)}ل_{0} = 1$

٣ $^{ن}ل_{ن} = ن!$ الإثبات : $^{ن}ل_{ن} = \frac{ن!}{(ن-ن)!} = \frac{ن!}{0!} = \frac{ن!}{1} = ن!$ فمثلًا : $^{5}ل_{5} = 5!$ ، $^{3}ل_{3} = 3!$

مثال ١٠

أوجد : ١ $^{8}ل_{2}$ ٢ $^{12}ل_{3}$ ٣ $^{ن}ل_{4}$ ٤ $^{ن+2}ل_{3}$ ٥ $^{ن-3}ل_{5}$ ٦ $^{ن+1}ل_{ر+1}$

الحل

١ $^{8}ل_{2} = 8 \times 7 = 56$

٢ $^{12}ل_{3} = 12 \times 11 \times 10 = 1320$

٣ $^{ن}ل_{4} = ن(ن-1)(ن-2)(ن-3)$

٤ $^{ن+2}ل_{3} = (ن+2)(ن+1)ن$

٥ $^{ن-3}ل_{5} = (ن-3)(ن-4)(ن-5)(ن-6)(ن-7)$

٦ $^{ن+1}ل_{ر+1} = (ن+1)(ن)(ن-1)(ن-2) \dots ((ن+1)-(ر+1)+1)$

$= (ن+1)(ن)(ن-1)(ن-2) \dots (ن+1-ر-1+1)$

$= (ن+1)(ن)(ن-1)(ن-2) \dots (ن-ر+1)$

ملاحظة (استخدام الآلة الحاسبة)

يمكن استخدام الآلة الحاسبة فى إيجاد ناتج التبديل كما يلى :

١ $^{7}ل_{5} = 2520$

ابدأ ← 7 SHIFT × 5 = 2520

٢ $^{4}ل_{4} = 4! = 24$



مثال ١١

إذا كان : $^{13}ل_{ر} = 17160$ فأوجد قيمة : ر ثم أوجد : $^{2ر+1}ل_{3}$

الحل

نوجد مجموعة من العوامل المتتالية التى أكبرها ١٣ وذلك بقسمة العدد ١٧١٦٠ على ١٣ ثم بقسمة الناتج على ١٢ ثم بقسمة الناتج على ١١ وهكذا حتى نصل إلى الواحد الصحيح.

فنجد أن $١٧١٦٠ = ١٣ \times ١٢ \times ١١ \times ١٠ = {}^{١٣}ل_{٤}$

$١٧١٦٠ \div ١٣ = ١٣٢٠$
$١٣٢٠ \div ١٢ = ١١٠$
$١١٠ \div ١١ = ١٠$
$١٠ \div ١٠ = ١$

$\therefore {}^{١٣}ل_{س} = {}^{١٣}ل_{٤}$ $\therefore س = ٤$

$\therefore {}^{٢س+١}ل_{٣} = {}^{٢(٤)+١}ل_{٣} = {}^{٩}ل_{٣} = ٩ \times ٨ \times ٧ = ٥٠٤$

مثال ١٢

إذا كان : ${}^{٢ن+١}ل_{٤} : {}^{٢ن-١}ل_{٣} = ٧٢ : ٥$ **فأوجد قيمة :** ${}^{٢ن}ل_{ن}$

الحل

$\because {}^{٢ن+١}ل_{٤} = \frac{|٢ن+١}{|٢ن+١-٤} = \frac{|٢ن+١}{|٢ن-٣}$

، $\because {}^{٢ن-١}ل_{٣} = \frac{|٢ن-١}{|٢ن-١-٣} = \frac{|٢ن-١}{|٢ن-٤}$

$\because {}^{٢ن+١}ل_{٤} : {}^{٢ن-١}ل_{٣} = ٧٢ : ٥$

$\therefore \frac{|٢ن+١}{|٢ن-٣} \div \frac{|٢ن-١}{|٢ن-٤} = \frac{٧٢}{٥}$

$\therefore \frac{|٢ن+١}{|٢ن-٣} \times \frac{|٢ن-٤}{|٢ن-١} = \frac{٧٢}{٥}$

$\therefore \frac{(٢ن+١)\, ٢ن\, |٢ن-١}{(٢ن-٣)\, |٢ن-٤} \times \frac{|٢ن-٤}{|٢ن-١} = \frac{٧٢}{٥}$

$\therefore \frac{٤ن^{٢}+٢ن}{٢ن-٣} = \frac{٧٢}{٥}$

$\therefore ٢٠ن^{٢} + ١٠ن = ١٤٤ن - ٢١٦$

$\therefore ٢٠ن^{٢} - ١٣٤ن + ٢١٦ = ٠$

$\therefore ١٠ن^{٢} - ٦٧ن + ١٠٨ = ٠$

$\therefore (ن - ٤)(١٠ن - ٢٧) = ٠$

$\therefore ن = ٤$ أ، $ن = ٢,٧$ (مرفوض)

$\therefore {}^{٢ن}ل_{ن} = {}^{٨}ل_{٤} = ٨ \times ٧ \times ٦ \times ٥ = ١٦٨٠$

مثال ١٣

إذا كان : ${}^{٨}ل_{س} = ٥ \times {}^{٨}ل_{س-١}$ **فأوجد قيمة :** $\frac{|س}{|س+١} + \frac{|س-١}{|س} + \frac{|س-٣}{|س-٢}$

الحل

$\because {}^{٨}ل_{س} = ٥ \times {}^{٨}ل_{س-١}$

$\therefore \frac{|٨}{|٨-س} = ٥ \times \frac{|٨}{|٨-(س-١)}$

$\therefore \frac{|٨}{|٨-س} = \frac{٥\,|٨}{|٩-س}$

$\therefore \frac{|٨}{|٨-س} \times \frac{|٩-س}{|٨} = ٥$

$\therefore \frac{(٩-س)\,|٨-س}{|٨-س} = ٥$

$\therefore ٩ - س = ٥$

$\therefore س = ٤$

$\therefore \frac{|س}{|س+١} + \frac{|س-١}{|س} + \frac{|س-٣}{|س-٢} = \frac{|٤}{|٥} + \frac{|٣}{|٤} + \frac{|١}{|٢} = \frac{|٤}{٥\,|٤} + \frac{|٣}{٤\,|٣} + \frac{١}{٢} = \frac{١}{٥} + \frac{١}{٤} + \frac{١}{٢} = \frac{١٩}{٢٠}$

مثال ١٤

إذا كان : $^{م+ن}ل_{٣} = ٢١٠$ ، $^{م-ن}ل_{٢} = ٦$ فأوجد قيمتى : م ، ن

الحـــل

$\because\ ^{م+ن}ل_{٣} = ٢١٠$ $\therefore\ ^{م+ن}ل_{٣} = ٧ \times ٦ \times ٥ = {}^{٧}ل_{٣}$ $\therefore$ م + ن = ٧ (١)

، $\because\ ^{م-ن}ل_{٢} = ٦$ $\therefore\ ^{م-ن}ل_{٢} = ٣ \times ٢ = {}^{٣}ل_{٢}$ $\therefore$ م − ن = ٣ (٢)

بجمع (١) ، (٢) : $\therefore$ ٢ م = ١٠ $\therefore$ م = ٥

وبالتعويض فى (١) : $\therefore$ ن = ٢ .

مثال ١٥

أثبت أن : $^{ن}ل_{ر} + ر \times {}^{ن}ل_{ر-١} = {}^{ن+١}ل_{ر}$

الحـــل

$$\because\ ^{ن}ل_{ر} + ر \times {}^{ن}ل_{ر-١} = \frac{\underline{|ن}}{\underline{|ن-ر}} + ر \times \frac{\underline{|ن}}{\underline{|ن-ر+١}} = \underline{|ن}\left(\frac{١}{\underline{|ن-ر}} + \frac{ر}{\underline{|ن-ر+١}}\right)$$

$$= \underline{|ن}\left(\frac{١}{\underline{|ن-ر}} + \frac{ر}{(ن-ر+١)\underline{|ن-ر}}\right) = \underline{|ن}\left(\frac{ن-ر+١+ر}{(ن-ر+١)\underline{|ن-ر}}\right)$$

$$= \frac{(ن+١)\underline{|ن}}{\underline{|ن-ر+١}} = \frac{\underline{|ن+١}}{\underline{|ن-ر+١}} \quad (١)$$

$$،\ \because\ ^{ن+١}ل_{ر} = \frac{\underline{|ن+١}}{\underline{|ن+١-ر}} = \frac{\underline{|ن+١}}{\underline{|ن-ر+١}} \quad (٢)$$

من (١) ، (٢) ينتج أن : $^{ن}ل_{ر} + ر\,{}^{ن}ل_{ر-١} = {}^{ن+١}ل_{ر}$

مثال ١٦

أوجد أقل قيمة للعدد ن تحقق المتباينة : $^{ن}ل_{٧} > {}^{ن}ل_{٦}$

الحـــل

$\because\ ^{ن}ل_{٧} > {}^{ن}ل_{٦}$ $\therefore\ \frac{\underline{|ن}}{\underline{|ن-٧}} > \frac{\underline{|ن}}{\underline{|ن-٦}}$

$\therefore\ \underline{|ن-٦} > \underline{|ن-٧}$ $\therefore\ (ن-٦)\underline{|ن-٧} > \underline{|ن-٧}$

$\therefore$ ن − ٦ > ١ $\therefore$ ن > ٧ $\therefore$ ن $\in$ {٨ ، ٩ ، ١٠ ، ...}

$\therefore$ أقل قيمة للعدد ن تحقق المتباينة هى ن = ٨

مثال ١٧

من مجموعة الأرقام {١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ ، ٥ ، ٦ ، ٧} أوجد :

١ كم عددًا مكونًا من ٤ أرقام مختلفة يمكن تكوينه.

٢ كم عددًا مكونًا من ٧ أرقام مختلفة يمكن تكوينه.

٣ كم عددًا رقم آحاده ٤ ويتكون من خمسة أرقام مختلفة يمكن تكوينه.

٤ كم عددًا فرديًا مكونًا من ٧ أرقام مختلفة يمكن تكوينه.

٥ كم عددًا أكبر من ٤٠٠ ويتكون من ٣ أرقام مختلفة يمكن تكوينه.

الحـــل

بفرض أن : س = {١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ ، ٥ ، ٦ ، ٧} ∴ ن(س) = ٧

١ عدد الأعداد = $^{٧}ل_{٤}$ = ٧ × ٦ × ٥ × ٤ = ٨٤٠ عددًا.

٢ عدد الأعداد = $^{٧}ل_{٧}$ = $\underline{|٧}$ = ٧ × ٦ × ٥ × ٤ × ٣ × ٢ × ١ = ٥٠٤٠ عددًا.

٣ ∵ رقم الآحاد = ٤ ∴ عدد طرق اختيار رقم الآحاد = ١ طريقة.

ويتبقى ٦ عناصر (أرقام) نختار منهم ٤ أرقام لتكوين باقى العدد.

∴ عدد الأعداد = ١ × $^{٦}ل_{٤}$ = ١ × ٦ × ٥ × ٤ × ٣ = ٣٦٠ عددًا.

٤ لكى يكون العدد فرديًا يجب أن يكون رقم آحاده عددًا فرديًا أى من الأرقام ١ ، ٣ ، ٥ ، ٧

∴ عدد طرق اختيار رقم الآحاد = $^{٤}ل_{١}$ = ٤ طرق.

ويتبقى لنا من عناصر س ٦ أرقام نختار منهم ٦ أرقام لتكوين باقى العدد.

∴ عدد الأعداد = ٤ × $^{٦}ل_{٦}$ = ٤ × ٦ × ٥ × ٤ × ٣ × ٢ × ١ = ٢٨٨٠ عددًا.

٥ لكى يكون العدد أكبر من ٤٠٠ يجب أن يكون الرقم المختار فى خانة المئات أكبر من أو يساوى ٤ أى من الأرقام ٤ ، ٥ ، ٦ ، ٧

∴ عدد طرق اختيار رقم المئات = $^{٤}ل_{١}$ = ٤ طرق.

ويتبقى لنا من عناصر س ٦ أرقام نختار منهم رقمين بخانتى الآحاد والعشرات

∴ عدد الأعداد = ٤ × $^{٦}ل_{٢}$ = ٤ × ٦ × ٥ = ١٢٠ عددًا.

تمارين 6 على مبدأ العد - التباديل



اختبر نفسك

من أسئلة الكتاب المدرسى — • فهم • تطبيق • مستويات عليا

أولًا أسئلة الاختيار من متعدد

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

① $\underline{٠|} + \underline{١|} + \underline{٢|} + \underline{٣|} =$ ....

(أ) ٦ (ب) ٨ (جـ) ٩ (د) ١٠

② ${}^{٩}ل_{٠} + {}^{٧}ل_{١} + {}^{٣}ل_{٢} =$ ....

(أ) ١٤ (ب) ٢٥ (جـ) ٩٦ (د) ١٨٩

③ إذا كان : $\frac{١}{٢}\ \underline{ن|} = ١$ فإن : $\underline{ن - ٢|} =$ ....

(أ) ٤ (ب) ٢ (جـ) ١ (د) صفر

④ $\frac{\underline{ن|}}{ن} =$ ....

(أ) ١ (ب) $\underline{ن|}$ (جـ) $\underline{ن - ١|}$ (د) $\frac{ن}{ن - ١}$

⑤ ${}^{ن}ل_{٢}$ يمكن أن تساوى ....

(أ) ١٥ (ب) ١٦ (جـ) ١٧ (د) ٢٠

⑥ إذا كان : ${}^{٥}ل_{ر} = ٦٠$ فإن : $ر =$ ....

(أ) ٤ (ب) ٣ (جـ) ٢ (د) ٥

⑦ إذا كان : ${}^{ن}ل_{٢} = ١٢٠$ فإن : $ن =$ ....

(أ) ٦ (ب) ٥ (جـ) ٤ (د) ٣

⑧ مجموعة الحل فى ح للمعادلة : $\underline{س|} = ١$ هى ....

(أ) $\{١\}$ (ب) $\{٠\}$ (جـ) $\{٠ ، ١\}$ (د) $\{١ ، -١\}$

⑨ إذا كان : $\underline{ن|} = ٢٤$ فإن : $ن =$ ....

(أ) ٢٤ (ب) ٦ (جـ) ٤ (د) ١٢

⑩ ${}^{٨}ل_{٦} =$ ....

(أ) $٨ \times ٧ \times ٦$ (ب) $٨ \times ٧ \times ٦ \times ٥ \times ٤ \times ٣$

(جـ) $\frac{\underline{٨|}}{\underline{٦|}}$ (د) $\underline{٦|}$

⑪ إذا كان : $\frac{١}{\underline{س|}} = \frac{٢}{\underline{س + ١|}}$ فإن : $س =$ ....

(أ) صفر (ب) ١ (جـ) ٢ (د) ٣

(١٢) $\frac{{}^{7}ل_{ر}}{{}^{7}ل_{ر-1}}$ = ...

(أ) ر (ب) ر - ١ (جـ) ٧ - ر (د) ٨ - ر

(١٣) إذا كان : $^{9}ل_{ر-1}$ = ٥٠٤ فإن : $\underline{|ر + 1}$ = ...

(أ) ٥ (ب) ٢٤ (جـ) ١٢٠ (د) ٧٢٠

(١٤) إذا كان : $\underline{|\frac{1}{2} ن}$ = ١٢٠ فإن : $^{ن}ل_{2}$ = ...

(أ) ٣٠ (ب) ٦٠ (جـ) ١٢٠ (د) ٧٢٠

(١٥) إذا كان : $\frac{1}{\underline{|9}} + \frac{1}{\underline{|10}} = \frac{س}{\underline{|11}}$ فإن : س = ...

(أ) ١ (ب) ١١ (جـ) ١٢١ (د) ١٣٢

(١٦) $ن\underline{|ن} + \underline{|ن} = \underline{|..........}$

(أ) ن (ب) ن + ١ (جـ) ن + ٢ (د) ن - ١

(١٧) إذا كان : $\underline{|ن} = م \underline{|ن - ر}$ فإن : م = ...

(أ) ن

(ب) ن (ن - ١) (ن - ٢) .... (ن - ر + ١)

(جـ) (ن - ر)

(د) ن - ر + ١

(١٨) عدد الأزواج المرتبة (أ ، ب) التى يمكن تكوينها من عناصر المجموعة {١ ، ٢ ، ٣} حيث أ ≠ ب هو ....

(أ) ٢ (ب) ٣ (جـ) ٦ (د) ٩

(١٩) عدد طرق ترتيب ٥ أشخاص فى دائرة يساوى ....

(أ) ١ (ب) ٥ (جـ) ٢٤ (د) ١٢٠

(٢٠) عدد طرق جلوس ٤ طلاب على أربعة مقاعد فى صف يساوى ....

(أ) ١ (ب) ٤ + ٤ (جـ) ٤ × ٤ (د) ٤ × ٣ × ٢ × ١

(٢١) عدد طرق اختيار وجبة ومشروب من قائمة بها ٥ وجبات و ٤ مشروبات هى ....

(أ) ٩ (ب) ٢٠ (جـ) ٥ (د) ١

(٢٢) يحتوى رف أحد المكتبات على ٤ كتب مختلفة للكيمياء و ٣ كتب مختلفة للتاريخ وكتابين مختلفين للشعر فبكم طريقة يمكن أختيار كتاب من كل مادة ؟

(أ) ٤ + ٣ + ٢ (ب) ٤ × ٣ × ٢ (جـ) ١ + ١ + ١ (د) ١ × ١ × ١

(٢٣) إذا أراد رجل شراء سيارة من بين الموديلات {أوبل - كيا - هوندا} وأراد أن يختار من بين الألوان {أبيض ، أسود ، فضى ، أحمر} بكم طريقة يمكن اختيار السيارة ؟

(أ) ٧ (ب) ١٢ (جـ) ١٤ (د) ٢٤

(٢٤) عدد الأعداد التى كل منها مكون من ثلاثة أرقام مختلفة من الأرقام ١ ، ٣ ، ٥ ، ٦ هو ....

(أ) ٩ (ب) ١٢ (جـ) ٢٤ (د) ٦٤

(٢٥) لجنة مؤلفة من ١٢ عضوًا ، بكم طريقة يمكن اختيار رئيس ونائب لهذه اللجنة ؟

(أ) ٢ (ب) ٢٣ (جـ) ٦٦ (د) ١٣٢

(٢٦) عدد طرق ترتيب حروف كلمة مصنع يساوى ....

(أ) ٤ (ب) ٩ (جـ) ١٠ (د) ٢٤

(٢٧) عدد الأعداد المكونة من رقمين مختلفين مأخوذة من مجموعة الأرقام {٥ ، ٣ ، ٠ ، ٤} يساوى ....

(أ) ٣ × ٢ (ب) ٤ × ٢ (جـ) ٣ × ٣ (د) ٣ × ٤

(٢٨) عدد الأعداد الفردية المكونة من ثلاثة أرقام مختلفة مأخوذة من الأرقام {٢ ، ٣ ، ٤ ، ٦} يساوى ....

(أ) ٨ × ٦ × ٣ (ب) ٤ × ٣ × ٣ (جـ) ٤ × ٣ × ٢ (د) ١ × ٣ × ٢

(٢٩) عدد طرق تكوين عدد أولى مكون من ٣ أرقام مختلفة من مجموعة الأرقام ٣ ، ٤ ، ٥ هو ....

(أ) ٦ (ب) ٣ (جـ) ١ (د) صفر

(٣٠) عدد طرق تكوين العدد ١٤٥٣ من الأعداد ١ ، ٣ ، ٤ ، ٥ هو ....

(أ) ٢٤ (ب) ١٦ (جـ) ١ (د) صفر

(٣١) عدد طرق تكوين عدد مكون من ٣ أرقام من بين ٦ أرقام غير صفرية هو ....

(أ) ٦ × ٥ × ٤ (ب) ٦ + ٥ + ٤ (جـ) ٦ × ٦ × ٦ (د) ٣ × ٢ × ١

(٣٢) كم عدد زوجى مكون من أربعة أرقام مختلفة يمكن تكوينه من مجموعة الأرقام {١ ، ٣ ، ٤ ، ٥} ؟

(أ) ٥٤٣١ (ب) ٦٠ (جـ) ١٢ (د) ٦

(٣٣) كم عدد مكون من ٣ أرقام مختلفة يمكن تكوينه من مجموعة الأرقام {٢ ، ٤ ، ٥ ، ٧} ويكون أصغر من ٥٠٠ ؟

(أ) ٦ (ب) ٨ (جـ) ١٢ (د) ٢٤

(٣٤) عدد طرق الإجابة عن ١٠ أسئلة من نوع الصواب والخطأ يساوى .... طريقة.

(أ) $\lfloor$١٠ (ب) ١٠ (جـ) $٢^{١٠}$ (د) $١٠^{٢}$

(٣٥) عدد كل الأعداد المكونة من ٥ أرقام باستخدام ٠ ، ١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ يساوى ....

(أ) ٢٥٠٠ (ب) ٩٦ (جـ) ١٢٠ (د) ٣١

(٣٦) عدد طرق تكوين عدد مكون من أربعة أرقام مختلفة من الأرقام {٢ ، ٣ ، ٤ ، ٧} بحيث يكون رقم العشرات زوجيًا هو ....

(أ) ١٥ (ب) ٢٤ (جـ) ١٢ (د) ٨

(٣٧) $\frac{\lfloor ر - ٢}{\lfloor ر - ٣} =$ ....

(أ) ر − ٢ (ب) ر − ٣ (جـ) ر (د) ر − ١

(٣٨) إذا كان : $^{ن}ل_{ر} = ٥٠٤٠$ فإن : ن = ...

(أ) ١٠ (ب) ٥ (جـ) ٧ (د) ٣

(٣٩) إذا كان : $\lfloor ن + ١ = ٣٠ \lfloor ن - ١$ فإن : ن = ...

(أ) ٥ (ب) ٦ (جـ) ٢٩ (د) ٣٠

(٤٠) إذا كان : $\lfloor ن - ١ = ١٢٠$ ، $\lfloor ن - ر = ٦$ فإن : $^{ن}ل_{ر} =$ ....

(أ) ٧٢٠ (ب) ٦ × ٥ × ٤ (جـ) ٣ × ٤ × ٥ (د) ٦ × ٥

(٤١) إذا كان : $\frac{\lfloor ن - ٢}{\lfloor ٣} = \frac{\lfloor ٥}{ن - ٢}$ فإن : $^{ن}ل_{٢} =$ ....

(أ) ٨ (ب) ٢٨ (جـ) ٥٦ (د) ٣٣٦

(٤٢) إذا كان : $ن \lfloor ٢ن - ١ = ٦٠$ فإن : ن = ...

(أ) ٢ (ب) ٢,٥ (جـ) ٤ (د) ٥

(٤٣) إذا كان : $٨ × ٧ × ٦ = {}^{س}ل_{ص}$ فإن : س + ص يمكن أن يساوى ....

(أ) ٣٥ (ب) ١٨ (جـ) ١٣ (د) ١١

(٤٤) إذا كان : $\frac{\lfloor ٢ن \lfloor ن - ١}{\lfloor ٢ن - ١ \lfloor ن + ١} = \frac{١}{٣}$ فإن : ن = ...

(أ) ٣ (ب) ٥ (جـ) ٧ (د) ٩

(٤٥) مجموعة حل المعادلة : $\lfloor ن - ١ = ن$ فى ص هى ....

(أ) {٠} (ب) {١} (جـ) {٠ ، ١} (د) {١ ، ٢}

(٤٦) $\frac{٢ × ٤ × ٦ × \cdots × (٢ن - ٢) × (٢ن)}{٢^{ن}} =$ ....

(أ) $\lfloor ٢ن$ (ب) $\lfloor ن$ (جـ) $ن \lfloor ن$ (د) $٢ \lfloor ن$

(٤٧) إذا كانت : س = {س : س ∈ ط ، ١ ≤ س ≤ ٥}

وكانت : ص = {(أ ، ب) : أ ، ب ∈ س ، أ ≠ ب} فإن عدد عناصر ص ....

(أ) ٧ (ب) ١٠ (جـ) ٢٠ (د) ٢٥

(٤٨) $(ن^{٢} + ٣ن + ٢)\ \underline{|ن} = \underline{|\quad\quad}$ ....

(أ) $ن^{٢}$　　(ب) $ن + ١$　　(جـ) $ن + ٢$　　(د) $ن(ن + ٢)$

(٤٩) إذا كان : $ن^{٢} + ٩ن + ٢٠ = \frac{\underline{|ن + ٥}}{\underline{|س}}$ فإن : س = ...

(أ) $ن + ٣$　　(ب) $\underline{|ن + ٣}$　　(جـ) $\underline{|ن + ٤}$　　(د) $^{ن+٥}ل_{٢}$

(٥٠) مجموعة حل المعادلة : $\frac{\underline{|س}}{١٠} = {}^{س-١}ل_{س-٢}$ هي ....

(أ) {٥}　　(ب) {٦}　　(جـ) {٧}　　(د) {٨}

(٥١) $(ن + ١)(ن + ٢)(ن + ٣) \times \cdots \times (٢ن) =$ ....

(أ) $\underline{|٢ن - ١}$　　(ب) $\frac{\underline{|٢ن}}{\underline{|ن}}$　　(جـ) $\underline{|٢ن + ١}$　　(د) $\frac{\underline{|٢ن}}{\underline{|ن + ١}}$

(٥٢) إذا كان : $\underline{|ن} < ١٠٠$ ، $\underline{|ن + ١} > ١٠٠$ فإن : ن = ...

(أ) ٤　　(ب) ٥　　(جـ) ٦　　(د) ٧

(٥٣) إذا كان : $\underline{|ن}$ عددًا أوليًا فإن : ن = ...

(أ) صفر　　(ب) ١　　(جـ) ٢　　(د) ٣

(٥٤) $ن(ن^{٢} - ١)(ن^{٢} - ٤) =$ ....

(أ) $^{ن-٤}ل_{٣}$　　(ب) $^{ن+٢}ل_{٣}$　　(جـ) $^{ن+٢}ل_{٥}$　　(د) $^{ن-٢}ل_{٥}$

(٥٥) $(\underline{|ن})(\underline{|ن})$ .... $\underline{|ن^{٢}}$

(أ) $<$　　(ب) $\geq$　　(جـ) $\leq$　　(د) $=$

(٥٦) إذا كان : $^{ن}ل_{٥} = {}^{ن}ل_{٤}$ فإن : ن = ...

(أ) ٢٠　　(ب) ٩　　(جـ) ٤　　(د) ٥

(٥٧) إذا كان : $٢\ {}^{ن}ل_{٢} = {}^{ن+١}ل_{٢}$ فإن : ن = ...

(أ) ٤　　(ب) ٥　　(جـ) ٦　　(د) ٧

(٥٨) إذا كان : $\underline{|٧} = {}^{٧}ل_{س}$ فإن : س = ...

(أ) ٦ أ، ٧　　(ب) ٧ فقط.　　(جـ) ١ أ، صفر　　(د) ٥٠٤٠

(٥٩) إذا كان : $\underline{|٥}\ \underline{|٩} = ١٢\ \underline{|ن}$ فإن : ن = ...

(أ) ١٠　　(ب) ١١　　(جـ) ١٢　　(د) ١٣

(٦٠) إذا كان : أ ، ب عددين متتاليين حيث أ > ب فإن : $\underline{|أ}\ \underline{|ب}$ = ...

(أ) $^{أ}ل_{٢}$　　(ب) $^{ب}ل_{٢}$　　(جـ) $^{٢}ل_{أ}$　　(د) $^{٢}ل_{ب}$

(٦١) إذا كانت : $ن \in ص^{+}$ فإن : $ن\ \underline{|ن} =$ ....

(أ) $\underline{|ن^{٢}}$　　(ب) $\underline{|ن + ١}$　　(جـ) $ن^{٢}\ \underline{|ن - ١}$　　(د) $\underline{|٢ن}$

ثانيًا الأسئلة المقالية

١ أوجد قيمة ن التي تحقق كلًا مما يأتي :

① $|\underline{ن} = ٧٢٠$

② $^{١٠}ل_{ن} = ٢٧٣٠$

③ $^{ن}ل_{٣} = ٥٠٤$

④ $^{(ن-١)}ل_{٤} = ١٢٠$

⑤ $^{ن}ل_{٠} + {}^{ن}ل_{١} + {}^{ن}ل_{٢} = ٥٠$

⑥ $|\underline{ن - ٤} = ١٢٠$

⑦ $ن\,|\underline{٢ن - ١} = ١٢$

⑧ $\dfrac{|\underline{ن + ١}}{|\underline{ن}} = ٥$

---

٢ أوجد مجموعة حل كل من المعادلات الآتية :

① $|\underline{ن - ٥} = ١$ «{٥ ، ٦}»

② $\dfrac{|\underline{ن + ١}}{|\underline{ن - ١}} = ٤٢$ «{٦}»

③ $١٢ \times |\underline{ن} = |\underline{ن + ٢}$ «{٢}»

④ $|\underline{ن} = ٣٠\ |\underline{ن - ٢}$ «{٦}»

---

٣ أجب عن الأسئلة الآتية :

① إذا كان : $^{ن}ل_{٤} = ١٤ \times {}^{ن-٢}ل_{٢}$ فأوجد قيمة : ن «٨ أ ٧»

② إذا كان : $^{٥}ل_{ر} = ٢ \times {}^{٦}ل_{ر-١}$ فأوجد قيمة : ر «٣»

③ إذا كان : $١٥ \times {}^{ن}ل_{٠}\ |\underline{س} = |\underline{١٥}$ فما قيمة : $|\underline{س - ١٤}$ «١»

④ إذا كان : $^{ن-١}ل_{٣} : {}^{ن+١}ل_{٣} = ٥ : ١٢$ فأوجد قيمة : $|\underline{ن - ٣}$ «١٢٠»

⑤ إذا كان : $^{٢ن+١}ل_{ن-١} : {}^{٢ن-١}ل_{ن} = ٣ : ٥$ فما قيمة : ن «٤»

⑥ إذا كان : $^{ن}ل_{ر} = ٦٠٤٨٠٠$ ، $|\underline{ر} = ٥٠٤٠$ فأوجد قيمة : ن ، ر

ثم أوجد قيمة : $^{ن+ر}ل_{ن-ر}$ «١٠ ، ٧ ، ٤٠٨٠»

⑦ إذا كان العامل الأوسط فى مفكوك $^{ن}ل_{١١}$ يساوى ١٥ فأوجد قيمة : ن «٢٠»

---

٤ أثبت أن :

① $\dfrac{|\underline{ن + ١}}{|\underline{ن - ١}} - \dfrac{|\underline{ن}}{|\underline{ن - ٢}} = ٢ن$

② $\dfrac{|\underline{ن + ٣}}{|\underline{ن}} = (ن + ٣)\ {}^{ن+٢}ل_{٢}$

③ $\dfrac{٢}{|\underline{٦}} + \dfrac{٣}{|\underline{٧}} + \dfrac{٤}{|\underline{٨}} = \dfrac{٢٣}{|\underline{٧}}$

④ $^{ن+١}ل_{ر+١} = (ن + ١) \times {}^{ن}ل_{ر}$

⑤ $^{ن}ل_{ر} : {}^{ن-١}ل_{ر-١} = ن$ ومن ذلك استنتج قيمة : $^{٩٧}ل_{٤٠} : {}^{٩٦}ل_{٣٩}$ «٩٧»

---

٥ أوجد قيمة ن إذا كان :

① $\dfrac{١}{|\underline{ن}} + \dfrac{٢}{|\underline{ن + ١}} = \dfrac{٥٦}{|\underline{ن + ٢}}$ «٥»

② $\dfrac{|\underline{ن + ١}}{|\underline{ن + ٢}} + \dfrac{|\underline{ن}}{|\underline{ن + ١}} = \dfrac{١٣}{٤٢}$ «٥»

٦ أوجد :

(١) عدد الطرق المختلفة لجلوس ٥ طلاب على ٧ مقاعد فى صف واحد. «٢٥٢٠»

(٢) عدد طرق ترتيب ٩ أشخاص حول مائدة على شكل دائرة. «٤٠٣٢٠»

(٣) عدد طرق اختيار رئيس ونائب رئيس وسكرتير من لجنة مكونة من عشرة أشخاص. «٧٢٠»

(٤) بكم طريقة يمكن لحسام أن يتناول وجبة ومشروبًا من ثلاث وجبات (كفتة – فراخ – سمك) ومشروبين (عصير – مياه غازية) (مثّل ذلك بمخطط الشجرة البيانية). «٦»

(٥) كم يبلغ عدد الترتيبات التى يمكن أن يتشكل كل منها من خمسة حروف مختلفة من الأبجدية العربية. «١١٧٩٣٦٠٠»

(٦) بكم طريقة يمكن تكوين عددًا مكونًا من ثلاثة أرقام بحيث يكون رقم الآحاد من العناصر {٣ ، ٧} ورقم العشرات من العناصر {٢ ، ٤ ، ٩} ورقم المئات من العناصر {١ ، ٥} «١٢»

(٧) كم عددًا مكونًا من رقمين مختلفين يمكن تكوينه من الأرقام ١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ «١٢»

(٨) كم عدد الأعداد المكونة من ثلاثة أرقام مأخوذة من العناصر {٢ ، ٣ ، ٥} «٢٧»

(٩) كم عددًا مكونًا من رقمين يمكن تكوينه من الأرقام ١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ «١٦»

(١٠) بكم طريقة يمكن تكوين عدد مكون من ٣ أرقام مختلفة من الأرقام {٠ ، ١ ، ٢ ، ٣ ، ٤} «٤٨»

(١١) كم عددًا زوجيًا مكونًا من ٣ أرقام مختلفة يمكن تكوينه من مجموعة الأرقام {٢ ، ٣ ، ٤ ، ٥ ، ٧} «٢٤»

(١٢) بكم طريقة يمكن تكوين عدد مكون من أربعة أرقام مختلفة من الأرقام {٢ ، ٣ ، ٤ ، ٧} بحيث يكون رقم العشرات زوجيًا. «١٢»

---

٧ **بكم طريقة يمكن تكوين عدد من الأرقام ٣ ، ٤ ، ٥ ، ٦ ، ٧ ، ٨ ، ٩ ؟**

(١) إذا كان كل عدد يتألف من ٣ أرقام مختلفة. «٢١٠»

(٢) إذا كان كل عدد يتألف من الأرقام جميعًا دون تكرار لأى رقم منها. «٥٠٤٠»

(٣) إذا كان كل عدد يتألف من ٥ أرقام مختلفة ويقبل القسمة على ٢ «١٠٨٠»

(٤) إذا كان كل عدد يتألف من ٤ أرقام مختلفة ورقم آحاده ٧ «١٢٠»

(٥) إذا كان كل عدد يتألف من ٤ أرقام مختلفة ويكون أصغر من ٦٠٠٠ «٣٦٠»

---

٨ إذا كانت : س = {٢ ، ٣ ، ٥ ، ٧ ، ٩}

(١) كم عددًا مكونًا من رقمين مختلفين يمكن تكوينه من هذه الأرقام ؟ «٢٠»

(٢) كم عددًا مكونًا من رقمين يمكن تكوينه من هذه الأرقام ؟ «٢٥»

(٣) كم عددًا مكونًا من ثلاثة أرقام مختلفة يمكن تكوينه من هذه الأرقام ؟ «٦٠»

(٤) كم عددًا مكونًا من ثلاثة أرقام مختلفة وأصغر من ٥٠٠ يمكن تكوينه من هذه الأرقام ؟ «٢٤»

(٥) كم عددًا مكونًا من أربعة أرقام مختلفة ورقم آحاده ٢ يمكن تكوينه من هذه الأرقام ؟ «٢٤»

---

٩ من مجموعة الحروف {أ ، ب ، حـ ، ء ، هـ ، و} أوجد :

(١) عدد طرق اختيار حرف واحد. «٦»

(٢) عدد طرق اختيار حرفين مختلفين مع مراعاة الترتيب. «٣٠»

---

١٠ إذا كانت : س = {س : س عدد طبيعى ، ١ ≤ س ≤ ٧}

، ص = {(أ ، ب) حيث أ ، ب ∈ س ، أ ≠ ب} فأوجد عدد عناصر كل من : س ، ص «٧ ، ٤٢»

---

١١ إذا كان : $^{س+ص}ل_{٢} = ٥٠٤$ ، $^{س-ص}ل_{٤} = ١٢٠$ فأوجد قيمة : $^{س}ل_{ص}$ «٤٢»

---

١٢ حل كلاً من المعادلات الآتية :

(١) $^{س+٢}ل_{٢} = ٤٢$ س «٥»

(٢) $^{٧}ل_{س} - س \times {}^{٧}ل_{س-١} = ٠$ «٤»

(٣) $\underline{|س - ٣} \times {}^{س}ل_{٢} = ٢٠ \underline{|س - ٢}$ «٥»

(٤) $\underline{|س + ٢} = ١٨٢ \times {}^{س}ل_{١١} \underline{|س - ١١}$ «١٢»

---

١٣ أوجد مجموعة حل المعادلة : $٣٠ \times {}^{س+٢}ل_{٢} = {}^{س+٥}ل_{٥}$ إذا كانت : س ∈ ط «{١}»

---

١٤ إذا كان : $^{ن}ل_{١٠} > {}^{ن}ل_{١٤}$ فأوجد أقل قيمة للعدد : ن تحقق هذه المتباينة. «١٦»

---

١٥ إذا كان : $^{أ+ب}ل_{٤} = ٨٤٠$ ، $\underline{|أ - ب} = ٦$ فأوجد قيمة كل من : أ ، ب ، $\underline{|٢أ - ٥ب}$ «٥ ، ٢ ، ١»

---

١٦ إذا كان : $^{ن}ل_{ر} = ٢٥٢٠$ ، $\underline{|ر} = ١٢٠$ فأوجد قيمة : $\underline{|٣ر - ٢ن}$ «١»

---

١٧ إذا كان : $^{ن}ل_{٤} = ١٤ \times {}^{ن-٢}ل_{٢}$ فأوجد قيمة : $\underline{|٣ن - ٢٤}$ «١»

ثالثًا مسائل تقيس مهارات التفكير

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

(١) إذا كان : $^{ن}ل_{٢}$ ، $^{ن}ل_{٢}$ ، $^{ن+١}ل_{٢}$ فى تتابع حسابى فإن : $ن + \underline{|ن - ٣} = $ ....

(أ) ٤ (ب) ٥ (جـ) ١٢ (د) ٣١

(٢) عدد حلول المعادلة : $س = \underline{|س}$ فى ص يساوى ....

(أ) صفر (ب) ١ (جـ) ٢ (د) عدد لا نهائى.

(٣) إذا كان : $\underline{|ن}$ يقبل القسمة على كل من ٧ ، ١٣ فإن : ....

(أ) ن ≤ ٧ (ب) ن = ١٠ (جـ) ٧ ≤ ن ≤ ١٣ (د) ن ≥ ١٣

(٤) إذا كان رقم الآحاد فى |ن لا يساوى الصفر فإن : ....

(أ) ٤ < ن　　(ب) ٥ > ن　　(جـ) ٩ < ن　　(د) ن عدد فردى.

(٥) إذا كان : |ر = ن ، |ن = ر فإن : ر + ن = ...

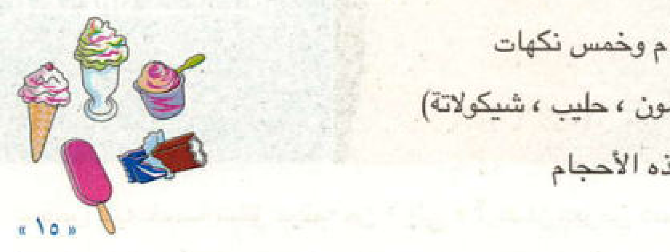
(أ) ٢　　(ب) صفر أ، ١　　(جـ) ٢ أ، ٣　　(د) ٢ أ، ٤

(٦) إذا كانت أطوال أضلاع مثلث هى $\frac{١}{٢}$ |ن ، |ن − ٢ ، |٢ − ن من السنتيمترات فإن القيمة العددية لمساحة المثلث = ... سم^٢

(أ) $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$　　(ب) $\frac{\sqrt{٣}}{٤}$　　(جـ) $\frac{\sqrt{٣}}{٨}$　　(د) $\frac{\sqrt{٣}}{١٦}$

تطبيقات حياتية

١ يقدم أحد محلات الآيس كريم ثلاثة أحجام وخمس نكهات (صغير ، متوسط ، كبير) (فراولة ، مانجو ، ليمون ، حليب ، شيكولاتة) كم عدد الاختيارات المتاحة لشراء واحد من هذه الأحجام بإحدى هذه النكهات ؟



«١٥»

٢ إذا طلب منك عمل رقم سرى لإحدى الخزن مكون من ٤ أرقام ليس من بينهم الصفر فأوجد عدد الطرق التى يمكن بها تكوين هذا الرقم السرى.　«٦٥٦١»

٣ رقم تليفون يتكون من ٨ منازل | .... | .... | .... | .... | .... | .... | ح | ٩ | ح يجب أن تكون أحد الأرقام ٣ ، ٤ ، ٥ ، ٨ بينما باقى المنازل تتألف من أى رقم دون قيد.
كم عدد أرقام التليفونات المختلفة المتاحة ؟　«٤٠٠٠٠٠٠»

٤ إذا علمت أن مجموعة أرقام شبكات المحمول فى إحدى الدول تتكون من إحدى عشر رقم ، فإذا كان الرقم (٠٢٥) ثابت من اليسار.
أوجد أكبر عدد من الخطوط يمكن أن تتحملها شبكات هذا المحمول.　«١٠٠٠٠٠٠٠٠»

٥ تبدأ لوحات ترخيص السيارات فى إحدى المحافظات بثلاثة من الحروف الأبجدية يتبعها ثلاثة أرقام غير الصفر. كم عدد اللوحات التى يمكن الحصول عليها ؟ بفرض أنه لا يوجد تكرار لأى من الحروف أو الأرقام فى أى من لوحات التراخيص ؟　«٩٩٠٦٦٢٤»



الدرس

2

التوافيق

شخص لديه خمسة شقق مرقمة من ١ إلى ٥ أراد أن يعرض شقتين منهم للبيع فبكم طريقة يمكن اختيار الشقتين ؟

للإجابة عن هذا السؤال نلاحظ ما يلى :

- اختيار الشقتين ١ ، ٤ مثلًا هو نفسه اختيار الشقتين ٤ ، ١ أى أنه ليس هناك أهمية للترتيب ولذلك نختار صيغة المجموعات {٤ ، ١} للتعبير عن هذا الاختيار وليس الأزواج المرتبة.
- استخدام التباديل يتم فى حالة أن يكون هناك أهمية للترتيب فى الاختيار ولذا فالتباديل لا تصلح فى الحالة السابقة.

لذلك توجد هناك صيغة رياضية تعبر عن الحالة السابقة تسمى التوافيق.

تعريف التوفيق

هو كل مجموعة يمكن تكوينها من مجموعة من الأشياء بأخذ بعضها أو كلها بصرف النظر عن ترتيبها.

وفى المثال السابق فإن طرق اختيار الشقتين (التوفيقات الممكنة) هى :

{١ ، ٢} ، {١ ، ٣} ، {١ ، ٤} ، {١ ، ٥} ، {٢ ، ٣} ، {٢ ، ٤} ، {٢ ، ٥}

، {٣ ، ٤} ، {٣ ، ٥} ، {٤ ، ٥}

- يرمز لعدد التوفيقات السابقة بالرمز $^{٥}ق_{٢}$ «وتقرأ ٥ قاف ٢» أو بالرمز $\binom{٥}{٢}$ وتقرأ ٥ فوق ٢ وتستخدم للتعبير عن عدد جميع المجموعات الجزئية المكونة من عنصرين والتى يمكن تكوينها من مجموعة تحتوى خمسة عناصر.

بصفة عامة

$^{ن}ق_{ر}$ هو عدد التوافيق المكون كل منها من $ر$ من الأشياء المختارة معًا من بين $ن$ من العناصر حيث : $٠ \leq ر \leq ن$

مثال توضيحى

إذا كانت : س = {٣ ، ٥ ، ٧ ، ٩} حيث عدد عناصر س = ٤ فيكون :

١ جميع المجموعات الجزئية من س هى :

* المجموعة الخالية : «∅» وعددها = ١ ∴ $^{٤}ق_{٠} = ١$

* المجموعات الأحادية العنصر : {٣} ، {٥} ، {٧} ، {٩} وعددها = ٤ ∴ $^{٤}ق_{١} = ٤$

* المجموعات الثنائية العناصر : {٣ ، ٥} ، {٣ ، ٧} ، {٣ ، ٩}
، {٥ ، ٧} ، {٥ ، ٩} ، {٧ ، ٩} وعددها = ٦ ∴ $^{٤}ق_{٢} = ٦$

* المجموعات الثلاثية العناصر : {٣ ، ٥ ، ٧} ، {٣ ، ٥ ، ٩}
، {٣ ، ٧ ، ٩} ، {٥ ، ٧ ، ٩} وعددها = ٤ ∴ $^{٤}ق_{٣} = ٤$

* المجموعات الرباعية العناصر : {٣ ، ٥ ، ٧ ، ٩} وعددها = ١ ∴ $^{٤}ق_{٤} = ١$

∴ عدد جميع المجموعات الجزئية = ١ + ٤ + ٦ + ٤ + ١ = ١٦ = $٢^{٤}$

∴ $^{٤}ق_{٠} + {}^{٤}ق_{١} + {}^{٤}ق_{٢} + {}^{٤}ق_{٣} + {}^{٤}ق_{٤} = ٢^{٤}$ وبصفة عامة $^{ن}ق_{٠} + {}^{ن}ق_{١} + {}^{ن}ق_{٢} + ... + {}^{ن}ق_{ن} = ٢^{ن}$

لاحظ أنه :
إذا كانت : س تحتوى على ن عنصر فإن عدد جميع المجموعات الجزئية منها = $٢^{ن}$

٢ جميع الأعداد ذات الرقمين التى يمكن تكوينها من عناصر س هى

٩٧	٩٥	٧٥	٩٣	٧٣	٥٣
٧٩	٥٩	٥٧	٣٩	٣٧	٣٥

، عددهم = $^{٤}ل_{٢} = ١٢$

لاحظ أنه :
فى التوافيق نعتبر الاختيار {٣ ، ٥} هو نفس الاختيار {٥ ، ٣} لأننا لا نراعى الترتيب داخل المجموعة أما فى التباديل نعتبر التبديل ٥٣ يختلف عن ٣٥ إذ أن كلًا منهما يعطى عددًا مخالفًا للآخر.

أما جميع المجموعات الجزئية الثنائية العنصر التى يمكن تكوينها من عناصر س هى

{٣ ، ٥} ، {٣ ، ٧} ، {٣ ، ٩} ، {٥ ، ٧} ، {٥ ، ٩} ، {٧ ، ٩} ، عددهم = $^{٤}ق_{٢} = ٦$

∴ عدد المجموعات الجزئية الثنائية × ٢ = عدد الأعداد ذات الرقمين. ∴ $^{٤}ق_{٢} \times \underline{|٢} = {}^{٤}ل_{٢}$

∴ $^{٤}ق_{٢} = \frac{^{٤}ل_{٢}}{\underline{|٢}}$ وبالمثل يمكن إثبات أن $^{٤}ق_{٣} = \frac{^{٤}ل_{٣}}{\underline{|٣}}$ وبصفة عامة $^{ن}ق_{ر} = \frac{^{ن}ل_{ر}}{\underline{|ر}}$

قوانين التوافيق

* إذا كان : $ن$ ، $ر \in$ ط ، $ر \le ن$ فإن :

[١] $^{ن}ق_{ر} = \frac{^{ن}ل_{ر}}{\underline{|ر}} = \frac{\underline{|ن}}{\underline{|ر}\ \underline{|ن - ر}}$

[٢] $^{ن}ق_{ر} = {^{ن}ق_{ن-ر}}$ «قانون التبسيط»

[٣] $^{ن}ق_{ن} = {^{ن}ق_{٠}} = ١$ ، $^{ن}ق_{١} = ن$

[٤] إذا كان : $^{ن}ق_{س} = {^{ن}ق_{ص}}$ فإن : $س = ص$ أ، $س + ص = ن$

ملاحظات

[١] $^{ن}ل_{ر}$ ، $^{ن}ق_{ر} \in ص^{+}$

[٢] التبديل يكون «بدون تكرار» و «يراعى الترتيب» أما التوفيق يكون «بدون تكرار» و «لا يراعى الترتيب».

[٣] لكتابة رمز التوافيق ($^{n}c_{r}$) على الحاسبة نضغط على المفاتيح [SHIFT] [÷] من اليسار لليمين.

[٤] يستخدم قانون التبسيط لتبسيط التوافقات العددية إذا كانت : $ر > \frac{١}{٢} ن$

[٥] $\because$ $ر \in$ ط ، $ر \le ن$ لذلك لا معنى للحديث عن $^{١٦}ق_{٢.}$ ، $^{٦}ق_{-٢}$ ، $^{٦}ق_{٥.٠}$

مثال ١

باستخدام الحاسبة أوجد قيمة : $^{٧}ق_{١} + {^{٥}ق_{٢}} - {^{٣٠}ق_{٠}}$

الحل

بالضغط على المفاتيح التالية بالتتابع من اليسار إلى اليمين.

ابدأ → [7] [SHIFT] [÷] [1] [+] [5] [SHIFT] [÷] [2] [−] [30] [SHIFT] [÷] [0] [=]

يظهر على الشاشة 16 $\therefore$ $^{٧}ق_{١} + {^{٥}ق_{٢}} - {^{٣٠}ق_{٠}} = ١٦$

مثال ٢

إذا كان : $^{ن}ق_{٩} = {^{ن}ق_{١١}}$ **أوجد قيمة :** $^{ن}ق_{١٨}$

الحل

$\because$ $^{ن}ق_{٩} = {^{ن}ق_{١١}}$

$\therefore$ $ن = ٩ + ١١ = ٢٠$

$\therefore$ $^{ن}ق_{١٨} = {^{٢٠}ق_{١٨}} = {^{٢٠}ق_{٢}} = \frac{^{٢٠}ل_{٢}}{\underline{|٢}} = \frac{٢٠ \times ١٩}{٢ \times ١} = ١٩٠$

مثال ٣

إذا كان : $^{18}ق_{س+9} = {}^{18}ق_{2س+1}$ أوجد قيمة : س

الحل

∵ $^{18}ق_{س+9} = {}^{18}ق_{2س+1}$

∴ س + ٩ = ٢ س + ١ ومنها ٢ س = ٨ ∴ س = ٤

أ، س + ٩ + ٢ س + ١ = ١٨ ومنها ٤ س = ٨ ∴ س = ٢

مثال ٤

إذا كان : $^{16}ق_{س+5} = {}^{16}ق_{2س-10}$ أوجد قيمة : س

الحل

∵ $^{16}ق_{س+5} = {}^{16}ق_{2س-10}$ ∴ س + ٥ = ٢ س − ١٠

ومنها س = ١٥ (مرفوض) [لأنه يجب أن يكون س + ٥ ≤ ١٦]

أ، س + ٥ + ٢ س − ١٠ = ١٦ ومنها ٣ س = ٢١ ∴ س = ٧

مثال ٥

إذا كان : $^{ن}ق_{ن-2} = 45$ فما قيمة : ن

الحل

∵ $^{ن}ق_{ن-2} = {}^{ن}ق_{ن-(ن-2)} = {}^{ن}ق_{2}$ ∴ $^{ن}ق_{2} = 45$

∴ $\frac{^{ن}ل_{2}}{\underline{|2}} = 45$ ∴ $^{ن}ل_{2} = 45 \times \underline{|2} = 90 = 10 \times 9 = {}^{10}ل_{2}$

∴ ن = ١٠

حل آخر : ∵ $^{ن}ق_{2} = 45$ ∴ $\frac{^{ن}ل_{2}}{\underline{|2}} = 45$ ∴ $\frac{ن(ن-1)}{2 \times 1} = 45$

∴ ن (ن − ١) = ٩٠ = ١٠ × ٩ ∴ ن = ١٠

مثال ٦

إذا كان : $^{ن}ق_{3} = 35$ أوجد قيمة : ن

الحل

∵ $^{ن}ق_{3} = 35$ ∴ $\frac{ن(ن-1)(ن-2)}{3 \times 2 \times 1} = 35$

∴ ن (ن − ١) (ن − ٢) = ٣٥ × ٦ = ٧ × ٦ × ٥ ∴ ن = ٧

مثال ٧

إذا كان : $^{ن}ل_{ر} = ٧٢٠$ ، $^{ن}ق_{ر} = ١٢٠$ **أوجد قيمة كل من : ن ، ر**

ثم أوجد قيمة كل من : $^{ن-٢}ق_{ر٢}$ ، $^{ن-٢}ق_{ر٤}$

الحل

$\because \; ^{ن}ق_{ر} = \frac{^{ن}ل_{ر}}{\underline{|ر}}$ $\quad \therefore \; ١٢٠ = \frac{٧٢٠}{\underline{|ر}}$

$\therefore \; \underline{|ر} = ٦ = ٣ \times ٢ \times ١ = \underline{|٣}$ $\quad \therefore \; ر = ٣$

$\therefore \; ^{ن}ل_{٣} = ٧٢٠$ $\quad \therefore \; ن(ن - ١)(ن - ٢) = ١٠ \times ٩ \times ٨$

$\therefore \; ن = ١٠$ $\quad \therefore \; ^{ن-٢}ق_{ر٢} = {}^{١٠-٢}ق_{٦} = {}^{٨}ق_{٦} = {}^{٨}ق_{٢} = \frac{٨ \times ٧}{\underline{|٢}} = ٢٨$

، $^{ن-٢}ق_{ر٤} = {}^{١٠-٢}ق_{١٢} = {}^{٨}ق_{١٢}$ غير معرف [لأنه لابد أن يكون ن ≥ ر]

مثال ٨

إذا كان : $^{ن}ق_{٥} > {}^{ن}ق_{٤}$ **أثبت أن :** ن يجب أن تكون أكبر من ٩

الحل

$\because \; ^{ن}ق_{٥} > {}^{ن}ق_{٤}$ $\quad \therefore \; \frac{\underline{|ن}}{\underline{|٥}\;\underline{|ن - ٥}} > \frac{\underline{|ن}}{\underline{|٤}\;\underline{|ن - ٤}}$

$\therefore \; \frac{\underline{|ن}}{٥\;\underline{|٤}\;\underline{|ن - ٥}} > \frac{\underline{|ن}}{\underline{|٤}\;(ن - ٤)\;\underline{|ن - ٥}}$ $\quad \therefore \; \frac{١}{٥} > \frac{١}{ن - ٤}$

$\therefore \; ن - ٤ > ٥$ $\quad \therefore \; ن > ٩$

مثال ٩

بكم طريقة يمكن اختيار لجنة من ٥ أشخاص من بين ١٣ شخصًا ؟

الحل

عدد الطرق = $^{١٣}ق_{٥} = ١٢٨٧$ طريقة.

> **لاحظ أنه :**
> لا يهمنا ترتيب الأشخاص فى اللجنة التى نختارها لذلك فإن هذه اللجان هى توفيقات.

مثال ١٠

لدينا ١٢ طالبًا ، ٨ طالبات بكم طريقة يمكن تكوين مجموعة :

١ مكونة من ٣ طلاب وطالبتين. ٢ مكونة من ٣ طلاب أو طالبتين.

الحل

عدد طرق اختيار ٣ طلاب من بين ١٢ طالبًا = $^{١٢}ق_{٣} = ٢٢٠$ طريقة

، عدد طرق اختيار طالبتين من بين ٨ طالبات = $^{٨}ق_{٢} = ٢٨$ طريقة.

1 عدد طرق اختيار ٣ طلاب (و) طالبتين

= ٢٢٠ × ٢٨ = ٦١٦٠ طريقة.

2 عدد طرق اختيار ٣ طلاب (أو) طالبتين

= ٢٢٠ + ٢٨ = ٢٤٨ طريقة.

لاحظ أنه :

* إذا كان الربط بين اختيارين بحرف «و» فإننا نضرب ناتجى الاختيارين.
* إذا كان الربط بين اختيارين بحرف «أو» فإننا نجمع ناتجى الاختيارين.

مثال ١١

١٠ أساتذة يراد ترشيح ٣ منهم للسفر لحضور مؤتمر علمى فى أمريكا و٣ آخرين منهم لحضور مؤتمر آخر يعقد فى نفس الوقت فى إنجلترا ، بكم طريقة يمكن اختيار البعثتين ؟

الحل

البعثة المسافرة إلى أمريكا نختارها من الأساتذة العشرة بطرق عددها = $^{١٠}ق_{٣}$ = ١٢٠ طريقة.

البعثة المسافرة إلى إنجلترا نختارها من الأساتذة السبعة المتبقين بطرق عددها = $^{٧}ق_{٣}$ = ٣٥ طريقة.

وحسب مبدأ العد يكون : عدد طرق اختيار البعثتين = ١٢٠ × ٣٥ = ٤٢٠٠ طريقة.

مثال ١٢

بكم طريقة يمكن انتخاب ٣ لجان كل منها تتكون من شخصين من بين ٨ أشخاص بحيث لا يشترك الشخص فى أكثر من لجنة واحدة ؟

الحل

عدد طرق انتخاب اللجنة الأولى = $^{٨}ق_{٢}$ = ٢٨ طريقة.

نلاحظ أنه باختيارنا شخصين للجنة الأولى فيتبقى ٦ أشخاص ننتخب منهم ٢ للجنة الثانية فيكون : عدد طرق انتخاب اللجنة الثانية = $^{٦}ق_{٢}$ = ١٥ طريقة وبعد ذلك يتبقى ٤ أشخاص ننتخب من بينهم ٢ للجنة الثالثة فيكون :

عدد طرق انتخاب اللجنة الثالثة = $^{٤}ق_{٢}$ = ٦ طرق.

∴ عدد الطرق التى يتم بها انتخاب اللجان الثلاث = ٢٨ × ١٥ × ٦ = ٢٥٢٠ طريقة.

مثال ١٣

بكم طريقة يمكن لمدرس أن يختار طالبًا أو أكثر من بين خمسة طلاب ؟

الحل

يتم اختيار إما ١ أو ٢ أو ٣ أو ٤ أو ٥ من الطلاب وبذلك يكون عدد الطرق

= $^{٥}ق_{١}$ + $^{٥}ق_{٢}$ + $^{٥}ق_{٣}$ + $^{٥}ق_{٤}$ + $^{٥}ق_{٥}$ = ٥ + ١٠ + ١٠ + ٥ + ١ = ٣١

مثال ١٤

إذا كانت : س = {١ ، ٢ ، ٣ ، ٤} ، ص = {(أ ، ب ، حـ) : أ ، ب ، حـ ∈ س ، أ ≠ ب ≠ حـ}

، ع = {{أ ، ب ، حـ} : أ ، ب ، حـ ∈ س} **أوجد عدد عناصر كل من : ص ، ع**

الحل

١ يتم اختيار ثلاثيات مرتبة (٣ عناصر)

من المجموعة س (٤ عناصر)

∴ عدد عناصر (ص) = $^{٤}ل_{٣}$ = ٢٤

لاحظ أننا :
نستخدم التباديل لأن ص تتكون من ثلاثيات مرتبة.

٢ يتم اختيار مجموعات يتكون كل منها

من (٣ عناصر) مأخوذة من المجموعة

س (٤ عناصر)

∴ عدد عناصر (ع) = $^{٤}ق_{٣}$ = ٤

لاحظ أننا :
نستخدم التوافيق لأن ع تتكون من مجموعات.

مثال ١٥

إذا كانت النقط أ ، ب ، حـ ، ء ، هـ تقع على دائرة **فأوجد :**

١ عدد القطع المستقيمة التى يمكن رسمها بين هذه النقط.

٢ عدد المثلثات التى يمكن رسمها ورؤوسها من هذه النقط.

٣ عدد المضلعات التى يمكن رسمها ورؤوسها من هذه النقط.

الحل

∵ عدد النقط = ٥

١ عدد القطع المستقيمة = $^{٥}ق_{٢}$ = ١٠

٢ عدد المثلثات = $^{٥}ق_{٣}$ = ١٠

٣ عدد المضلعات = $^{٥}ق_{٣}$ + $^{٥}ق_{٤}$ + $^{٥}ق_{٥}$ = ١٠ + ٥ + ١ = ١٦

ملاحظة

إذا كان عدد أضلاع شكل هندسى = ن ضلع فإن عدد جميع القطع المستقيمة الممثلة فى الشكل = $^{ن}ق_{٢}$

، ∵ قطر الشكل الهندسى هو القطعة المستقيمة التى تصل بين رأسين غير متتاليين

∴ عدد أقطار الشكل الهندسى = عدد جميع القطع المستقيمة − عدد أضلاع الشكل = $^{ن}ق_{٢}$ − ن

فمثلًا : عدد أقطار الشكل الثلاثى = $^{٣}ق_{٢}$ − ٣ = صفر ، عدد أقطار الشكل الرباعى = $^{٤}ق_{٢}$ − ٤ = ٢

، عدد أقطار الشكل الخماسى = $^{٥}ق_{٢}$ − ٥ = ٥ ، عدد أقطار الشكل السداسى = $^{٦}ق_{٢}$ − ٦ = ٩

تمارين 7 على التوافيق

اختبر نفسك

من أسئلة الكتاب المدرسى — فهم — تطبيق — مستويات عليا

أولًا أسئلة الاختيار من متعدد

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

(١) ${}^{9}ق_{1} + {}^{100}ق_{0} + {}^{5}ق_{5} =$ ....

(أ) ١ (ب) ٩ (جـ) ١١ (د) ١١٤

(٢) إذا كان : $|\underline{3ن - 7} = 120$ فإن : ${}^{ن}ق_{ن-1} =$ ....

(أ) ٣ (ب) ٤ (جـ) ٥ (د) ٦

(٣) إذا كان : $|\underline{س - 3} = 1$ فإن : ${}^{س+2}ق_{س-1} =$ ....

(أ) ٣ أ، ٤ (ب) ٩ أ، ٢٠ (جـ) ١٠ أ، ٢٠ (د) ٩ أ، ١٠

(٤) إذا كان : ${}^{ن}ق_{ن-2} = 36$ فإن : $ن =$ ....

(أ) ٦ (ب) ٩ (جـ) ١٢ (د) ٢٤

(٥) إذا كان : ${}^{ن}ق_{2} = 120$ فإن : ${}^{ن}ق_{ن-8} =$ ....

(أ) ٩٠ (ب) ٦٠ (جـ) ٤٥ (د) ٣٠

(٦) إذا كان : ${}^{2ن-1}ق_{2} = 84$ فإن : $|\underline{ن - 5} =$ ....

(أ) ١ (ب) ٢ (جـ) ٦ (د) ٢٤

(٧) إذا كان : ${}^{8}ل_{ر+1} = 336$ فإن : ${}^{2ر}ق_{4} =$ ....

(أ) ١٦ (ب) ٤ (جـ) ٢ (د) ١

(٨) إذا كان : ${}^{ن+1}ل_{2} = 24 \times {}^{ن-1}ق_{2}$ فإن قيم ن هى ....

(أ) ٣ فقط. (ب) ٥ فقط. (جـ) ٨ فقط. (د) ٣ أو ٨

(٩) إذا كان : ${}^{م+ن}ل_{2} = 380$ ، ${}^{ن-1}ق_{ن-2} = 4$ فإن : $\frac{م}{ن} =$ ....

(أ) ٣ (ب) $\frac{1}{2}$ (جـ) ٤ (د) $\frac{1}{4}$

(١٠) إذا كان : ${}^{ن}ل_{ن-2} = 20$ ، ${}^{م}ق_{ن} = {}^{م}ق_{2ن+1}$ فإن : $م \times ن =$ ....

(أ) ٢٠ (ب) ٤٠ (جـ) ٦٠ (د) ٨٠

(١١) إذا كان : ${}^{6}ق_{س} = {}^{4}ق_{س}$ فإن : $س =$ ....

(أ) صفر (ب) ١ (جـ) ٢ (د) ٣

(١٢) إذا كان : $^{40}ق_{4} = \frac{\underline{|40}}{\underline{|4}\ \underline{|س}}$ فإن : س = ...

(أ) ٤ (ب) ٤٤ (جـ) ٣٦ (د) ٤٠

(١٣) إذا كان : $^{ن}ل_{ر} = \underline{|ر} \times {}^{ن}ق_{س}$ فإن : س يمكن أن تساوي ....

(أ) ن (ب) ن − ر (جـ) ن + ر (د) ر − ن

(١٤) إذا كان : $^{4}ل_{ن} = 24\ {}^{4}ق_{ن}$ فإن : ن = ...

(أ) ١ (ب) ٣ (جـ) ٤ (د) ٦

(١٥) إذا كان : $^{15}ق_{ر} = {}^{15}ق_{6}$ فإن : ر = ...

(أ) ٦ فقط. (ب) ٩ فقط. (جـ) ٨ فقط. (د) ٦ أ، ٩

(١٦) إذا كان : $\underline{|س} = {}^{5}ق_{2} \times {}^{9}ل_{2}$ فإن : س = ...

(أ) ٦ (ب) ٩ (جـ) ١٠ (د) ١٢٠

(١٧) إذا كان : $^{6}ق_{ر} > 1$ ، $^{ر}ق_{4} > 1$ فإن : $\underline{|ر}$ = ...

(أ) ٦ (ب) ٢٤ (جـ) ١٢٠ (د) ٧٢٠

(١٨) إذا كان : $^{ن}ل_{ر} = {}^{ن}ق_{ر}$ فإن : ر = ...

(أ) صفر (ب) ١ (جـ) صفر أ، ١ (د) ١ أ، ٢

(١٩) إذا كان : $^{ن}ل_{1} + {}^{ن}ق_{2} = 36$ فإن : ن = ...

(أ) ٩ (ب) −٩ أ، ٨ (جـ) ٨ (د) ٩ أ، −٨

(٢٠) إذا كان : $^{12}ق_{ر^2} = {}^{12}ق_{2ر+2}$ فإن : ر ∈ ....

(أ) {٠ ، ٢} فقط (ب) {٠ ، −٢} فقط (جـ) {٢ ، −٢} فقط (د) {٠ ، ٢ ، −٢}

(٢١) إذا كان : $^{ن}ل_{2} = 42$ ، $\underline{|ن - ر} = 120$ فإن : $^{ن}ق_{ر+2}$ = ...

(أ) ٢ (ب) ٧ (جـ) ٢١ (د) ٤٢

(٢٢) إذا كان : $\frac{^{ن}ل_{2}}{^{ن-1}ل_{2}} = {}^{ن}ق_{2}$ فإن : ن = ...

(أ) ٣ (ب) ٤ (جـ) ٥ (د) ٤ أ، ٣

(٢٣) إذا كان : $^{ن+1}ق_{ن-2} = 56$ فإن : ن = ...

(أ) ٥ (ب) ٦ (جـ) ٧ (د) ٨

(٢٤) إذا كان : $^{ن}ق_{2} + {}^{ن}ق_{ن-3} = 2\ {}^{ن}ق_{4}$ فإن : ن = ...

(أ) ٨ (ب) ٧ (جـ) ٢ (د) ١١

(٢٥) ${}^{ن}ل_{ر} \div {}^{ن}ق_{ر} =$ ....

(أ) $\lfloor ن - ١$ (ب) $\lfloor ر$ (ج) $\lfloor ن$ (د) ١

(٢٦) إذا كان : ${}^{١٣}ق_{ر+٢} : {}^{١٣}ق_{ر+١} = ٩ : ٥$ فإن : ر = ...

(أ) ٢ (ب) ٣ (ج) ٤ (د) ٥

(٢٧) إذا كان : ${}^{ن-م}ل_{٣} = ٢١٠$ ، ${}^{ن+م}ق_{٤} = ٧١٥$ فإن : م × ن = ...

(أ) ١٥ (ب) ٣٠ (ج) ٣٥ (د) ٥٠

(٢٨) إذا كان : ${}^{ن}ل_{ر} = ١٢٠ \times {}^{ن}ق_{ن-ر}$ فإن : ر = ...

(أ) ٢ (ب) ٣ (ج) ٤ (د) ٥

(٢٩) إذا كان : ${}^{ن}ق_{١٠} = {}^{ن}ق_{١٤}$ فإن : ${}^{٢٥}ق_{ن} =$ ....

(أ) ٢٤ (ب) ٢٥ (ج) ١ (د) ٤٩

(٣٠) إذا كان : ${}^{٢٧}ق_{٢ر+١} = {}^{٢٧}ق_{٥ر-٨}$ فإن : ${}^{٥}ق_{ر} =$ ....

(أ) ١٠ (ب) ١٢ (ج) ١٣ (د) ١٥

(٣١) إذا كان : ${}^{ن}ق_{١٠} > {}^{ن}ق_{٩}$ فإن : ن ....

(أ) $= ١٩$ (ب) > ١٩ (ج) < ١٩ (د) ≤ ١٩

(٣٢) إذا كان : ${}^{٢ن+١}ق_{٢ن-١} - ٢ \times {}^{ن+٢}ق_{ن} = ٤٦$ فإن : ن = ...

(أ) ٥ (ب) ٦ (ج) ٧ (د) ٨

(٣٣) أصغر قيمة للعدد (ن) تجعل ${}^{ن}ل_{ر-٢} = ٢٤ \times {}^{ن}ق_{ر-٢}$ هى ....

(أ) ٤ (ب) ٥ (ج) ٦ (د) ٨

(٣٤) إذا كان : ${}^{٤}ق_{٠} + {}^{٤}ق_{١} + {}^{٤}ق_{٢} + {}^{٤}ق_{٣} + {}^{٤}ق_{٤} = ٢^{ن}$ فإن : ن = ...

(أ) ١ (ب) ٢ (ج) ٣ (د) ٤

(٣٥) ${}^{١}ق_{٠} + {}^{٢}ق_{١} + {}^{٣}ق_{٢} + ... + {}^{ن}ق_{ن-١} =$ ....

(أ) $\frac{ن^{٢}}{٢}$ (ب) $\frac{ن^{٢} + ن}{٢}$ (ج) $\frac{ن^{٢} - ن}{٣}$ (د) $\frac{ن^{٢} + ٢ن}{٢}$

(٣٦) إذا كان : ${}^{ن}ق_{٥} \geq {}^{ن}ق_{٤}$ فإن : ن ∈ ....

(أ) {٥ ، ٤} (ب) {٤ ، ٩}

(ج) {٥ ، ٦ ، ٧ ، ٨ ، ٩} (د) {٤ ، ٥ ، ٦ ، ٧ ، ٨ ، ٩}

(٣٧) إذا كان : ${}^{ن}ق_{ر} = {}^{ن}ق_{٢ر}$ حيث : ن ، ر ∈ $ص^{+}$ فإن : ن مضاعف للعدد ....

(أ) ٢ (ب) ٣ (ج) ٤ (د) ٥

(٣٨) إذا كان : $^{س+ص}ل_{٤} = ٣٦٠$ ، $\lfloor ٢ س + ص = ٥٠٤٠$ فإن : $^{ص}ق_{٢س}$ = ...

(أ) ٦ (ب) ٨ (جـ) ١٠ (د) ١٢

(٣٩) إذا كان $^{ن}ق_{ر} : {}^{ن}ق_{ر-١} = ٧ : ٤$ ، $^{ن}ل_{ر} : {}^{ن-١}ل_{ر} = ٥ : ٣$ فإن : ن + ر = ...

(أ) ٧ (ب) ٨ (جـ) ١١ (د) ١٤

(٤٠) إذا كان : $^{ن^٢+ن}ق_{٣} = {}^{ن^٢+ن}ق_{٩}$ فإن : ن يمكن أن تساوى ....

(أ) ١٢ (ب) ٦ (جـ) ٣ (د) ٤

(٤١) إذا كان : $^{ن}ق_{٢}$ ، $^{ن}ل_{٢}$ ، $\lfloor ن$ فى تتابع هندسى فإن : ن = ...

(أ) ٥ (ب) ٦ (جـ) ٨ (د) ١٢

(٤٢) $^{٧}ق_{٠} + {}^{٧}ق_{٢} + {}^{٧}ق_{٣} + {}^{٧}ق_{٤} + {}^{٧}ق_{٥} + {}^{٧}ق_{٦} + {}^{٧}ق_{٧} = ٢^{٧} +$ ....

(أ) ١ (ب) −١ (جـ) −٧ (د) ٧

(٤٣) عدد التبديلات التى يمكن تكوينها من (ن) عنصر يساوى ....

(أ) ن $\lfloor ن$ (ب) $^{ن+١}ل_{ن}$ (جـ) $^{ن}ق_{ن}$ (د) $^{ن}ق_{ن} \lfloor ن$

(٤٤) إذا كان عدد طرق اختيار ٣ عناصر معًا من ن عنصر يساوى ١٠ فإن : ن = ...

(أ) ٣٠ (ب) ١٠ (جـ) ٦ (د) ٥

(٤٥) إذا التقى ٤ أصدقاء فصافح كل منهم الآخر. كم مصافحة تمت بين الأصدقاء ؟

(أ) ١٦ (ب) ٨ (جـ) ٦ (د) ٤

(٤٦) اشترك ٧ أشخاص فى مسابقة الشطرنج بحيث تجرى مباراة واحدة بين كل شخصين فإن عدد مباريات المسابقة = ... مباراة.

(أ) ٤٢ (ب) ٢٨ (جـ) ٢١ (د) ١٨

(٤٧) عدد أقطار الشكل الثمانى = ...

(أ) ٨ (ب) ٢٠ (جـ) ٣٢ (د) ١٨

(٤٨) مضلع له ٤٤ قطر فإن عدد أضلاعه = ...

(أ) ٧ (ب) ٨ (جـ) ١١ (د) ١٢

(٤٩) عدد طرق اختيار ٤ عناصر معًا من ١٠ عناصر دون مراعاة الترتيب هو ....

(أ) $(١٠)^{٤}$ (ب) $^{١٠}ل_{٤}$ (جـ) $^{١٠}ق_{٤}$ (د) $\lfloor ٤$

(٥٠) عدد الطرق التى يمكن بها اختيار سبعة طلاب من بين ١٠ طلاب للذهاب إلى رحلة تاريخية = ... طريقة.

(أ) ٨٠ (ب) ١٢٠ (جـ) ١٤٤ (د) ٧٠

(٥١) عدد طرق اختيار كرة حمراء وأخرى بيضاء من بين ٦ كرات حمراء مرقمة من ١ إلى ٦ و ٨ كرات بيضاء مرقمة من ١ إلى ٨ = ...

(أ) ٢ (ب) ١٤ (جـ) ٢٤ (د) ٤٨

(٥٢) إذا كان عدد طرق اختيار ٣ عناصر معًا من مجموعة ما يساوى عدد طرق اختيار ٥ عناصر معًا من نفس المجموعة فإن عدد عناصر هذه المجموعة يساوى ....

(أ) $^{5}ق_{3}$ (ب) $^{5}ل_{3}$ (جـ) ٨ (د) ١٥

(٥٣) فصل به عدد الأولاد ضعف عدد البنات فإذا كان عدد طرق اختيار ولد وبنت هو ٧٢ فإن عدد الأولاد يساوى ....

(أ) ٤ (ب) ٦ (جـ) ١٢ (د) ١٨

(٥٤) بكم طريقة يمكن انتخاب لجنة مكونة من رجلين وسيدة من بين ٧ رجال و٥ سيدات ....

(أ) ٢١٠ (ب) ١٠٥ (جـ) ٢٦ (د) ٧٥

(٥٥) من بين أربعة معلمين يراد اختيار معلم لتدريب طلبة الأولمبياد فى مادة الرياضيات ، ثم معلم آخر لإعداد الاختبار. فإن عدد طرق الاختيار = ...

(أ) ١٦ (ب) ٨ (جـ) ١٢ (د) ١٥

(٥٦) فى مسابقة لكرة القدم يتقابل فيها كل فريقين مرة واحدة وكان عدد المباريات خلال المسابقة ١٥٣ مباراة فإن عدد الفرق المتنافسة يساوى ....

(أ) ٩ (ب) ١٣ (جـ) ١٨ (د) ١٩

(٥٧) عدد الطرق التى يمكن لشخص أن يختار بها نوع فاكهة أو أكثر من بين خمسة أنواع هو .... طريقة.

(أ) ٣٢ (ب) ٣١ (جـ) ٣٢٥ (د) ٦٣

(٥٨) ٥ نقط فى مستوى لا توجد أى ثلاثة منها على مستقيم واحد فإن عدد المثلثات التى يمكن تكوينها من هذه النقط = ...

(أ) ٥ + ٣ (ب) ٥ × ٣ (جـ) $^{5}ل_{3}$ (د) $^{5}ق_{3}$

(٥٩) إذا كانت النقط أ ، ب ، حـ ، ٤ ، هـ ، و تقع على دائرة فإن عدد القطع المستقيمة التى يمكن رسمها من هذه النقط = ...

(أ) $^{6}ل_{2}$ (ب) $^{5}ل_{2}$ (جـ) $^{6}ق_{2}$ (د) $^{5}ق_{2}$

(٦٠) يراد تقسيم ٨ ألعاب مختلفة بين ثلاثة أطفال بحيث يأخذ الطفل الأول ٣ ألعاب والثانى لعبتين والثالث يأخذ الباقى فبكم طريقة يمكن إجراء التقسيم ؟

(أ) ${}^{8}ق_{3} + {}^{8}ق_{2} + {}^{8}ق_{8}$ (ب) ${}^{8}ق_{3} \times {}^{8}ق_{2}$

(جـ) ${}^{8}ق_{3} \times {}^{5}ق_{2} \times {}^{5}ق_{3}$ (د) ${}^{8}ق_{3} \times {}^{5}ق_{2}$

(٦١) امتحان مكون من ٦ أسئلة وعلى الطالب إجابة ثلاثة منها صحيحة على الأقل لينجح فإن عدد الطرق التى يمكن للطالب أن ينجح بها = ...

(أ) ٢٠ (ب) ١٨٠٠ (جـ) ١٥ (د) ٤٢

(٦٢) امتحان مكون من ٦ أسئلة ٢ منهم إجبارى و ٤ اختيارى وكان على الطالب الإجابة على ٣ أسئلة أو أكثر من الامتحان لكى ينجح فإن عدد الطرق التى يمكن بها أن ينجح الطالب = ...

(أ) ٤٢ (ب) ٩٦ (جـ) ١٥ (د) ٤٨

ثانيًا الأسئلة المقالية

١ اكتب بدلالة التباديل كلًا من :

(١) ${}^{8}ق_{2}$ (٢) ${}^{19}ق_{2}$ (٣) ${}^{5}ق_{0}$ (٤) ${}^{س}ق_{س-ص}$

---

٢ اكتب مستخدمًا الصورة ${}^{ن}ق_{ر}$ كلًا مما يأتى :

(١) $\frac{{}^{8}ل_{2}}{2!}$ (٢) $\frac{{}^{9}ل_{3}}{3!}$ (٣) $\frac{{}^{10}ل_{4}}{4!}$ (٤) $\frac{{}^{8}ل_{0}}{0!}$

---

٣ إذا كان : ${}^{م}ق_{م-4} = 35$ فأوجد قيمة : م وإذا كان : ${}^{ن}ق_{م} = {}^{ن}ق_{م+1}$ فأوجد قيمة : ن «٧ ، ١٥»

---

٤ إذا كان : ${}^{ن}ق_{2} = 35$ ، ${}^{س}ق_{ن} = {}^{س}ق_{ن+2}$ فما قيمة : س «١٧»

---

٥ إذا كان : ${}^{28}ق_{ر} = {}^{28}ق_{2ر-47}$ أوجد قيمة : ر «٢٥»

---

٦ إذا كان : ${}^{25}ق_{2ر+1} = {}^{25}ق_{2ر-1}$ فما قيمة : ر «٢ أ، ٥»

---

٧ إذا كان : ${}^{36}ق_{2ر-5} = {}^{36}ق_{ر-2}$ أوجد قيمة : ${}^{11}ق_{ر}$ «١»

---

٨ إذا كان : ${}^{ن+1}ق_{4} = \frac{5}{2}\ {}^{ن}ق_{2}$ فأوجد قيمة : ن «٩»

---

٩ إذا كان : ${}^{ن}ق_{2} = \frac{1}{3} \cdot 30$ ن فأوجد قيمة : ن «١٥»

---

١٠ إذا كان : ${}^{ن}ق_{4} : {}^{ن-2}ق_{2} = 7 : 2$ فما قيمة : ن «٧ أ، ٨»

١١ إذا كان : ${}^{ن}ق_{5} : {}^{ن}ق_{4} = 8 : 5$ **فما قيمة : ن** «١٢»

---

١٢ **أوجد مجموعة حل كل من المعادلات الآتية :**

(١) ${}^{ن}ق_{2} = 84$ «{٩}»

(٢) ${}^{12}ق_{ر} = {}^{12}ق_{2ر+3}$ «{٣}»

(٣) ${}^{ن}ق_{2ن-21} = {}^{ن}ق_{2}$ «{١٨ ، ١٢}»

(٤) ${}^{ن+1}ق_{2} = 4\ {}^{ن-1}ق_{2}$ «{٣ ، ٨}»

---

١٣ **أوجد قيمة كل مما يأتى :**

(١) ${}^{5}ق_{.} + {}^{5}ق_{1} + {}^{5}ق_{2} + {}^{5}ق_{3} + {}^{5}ق_{4} + {}^{5}ق_{5}$ «٣٢»

(٢) ${}^{5}ق_{.} - {}^{5}ق_{1} + {}^{5}ق_{2} - {}^{5}ق_{3} + {}^{5}ق_{4} - {}^{5}ق_{5}$ «صفر»

---

١٤ إذا كان : ${}^{2ن+م}ق_{2} = 190$ ، ${}^{ن-2م}ل_{2} = 60$ **أوجد قيمة كل من : ن ، م** «٢ ، ٩»

---

١٥ إذا كان : ${}^{ن}ل_{ر-1} = 6720$ ، ${}^{ن}ق_{ر-1} = 56$ **فما قيمة كل من : ن ، ر** «٦ ، ٨»

---

١٦ **أثبت أن :** ${}^{ن}ق_{ر} \div {}^{ن-1}ق_{ر-1} = \frac{ن}{ر}$ **ومنها استنتج قيمة :** ${}^{100}ق_{50} \div {}^{99}ق_{49}$ «٢»

---

١٧ **أثبت أن :** ${}^{ن}ق_{ر} \div {}^{ن}ق_{ر-1} = \frac{ن - ر + 1}{ر}$ **ومنها استنتج قيمة :** ${}^{10}ق_{6} \div {}^{10}ق_{5}$ «$\frac{5}{6}$»

---

١٨ **أثبت أن :** ${}^{ن}ق_{ر} + {}^{ن}ق_{ر-1} = {}^{ن+1}ق_{ر}$ **ومنها استنتج قيمة :** ${}^{10}ق_{3} + {}^{10}ق_{4}$ «٣٣٠»

---

١٩ **أثبت أن :** ${}^{2ن}ق_{ن} = 2^{ن} \times \frac{1 \times 3 \times 5 \times \cdots \times (2ن - 1)}{\underline{|ن}}$

---

٢٠ إذا كان : ${}^{2ن+1}ل_{ن-1} : {}^{2ن}ق_{ن+1} = \frac{3}{2}\ \underline{|ن - 1}$ **فما قيمة : ن** «٤»

---

٢١ **أجب عن الأسئلة الآتية :**

(١) إذا تم اختيار ثلاثة طلاب من بين عدد (ن) من الطلاب لحضور ندوة بحيث كان عدد طرق الاختيار يساوى ١٠ أوجد عدد الطلاب. «٥»

(٢) يوجد فى أحد الصفوف ١٠ طلاب ، ٨ طالبات ، بكم طريقة يمكن تشكيل لجنة أنشطة خماسية تتألف من ثلاثة طلاب وطالبتين من هذا الصف. «٣٣٦٠»

(٣) بكم طريقة يمكن انتخاب لجنة مكونة من ٤ رجال أو ٣ سيدات من بين ٦ رجال و٥ سيدات. «٢٥»

(٤) مدرسة بها ١٠ طلاب يمارسون كرة السلة ، بكم طريقة يمكن اختيار فريق مكون من ٥ أعضاء وقائد للفريق من هؤلاء اللاعبين. «١٢٦٠»

٢٢ أوجد عدد الطرق التى يمكن بها انتخاب لجنتين كل منهما تتكون من ٣ أشخاص من بين ١٢ شخصًا بحيث لا يدخل شخص فى كلتا اللجنتين. «١٨٤٨٠»

---

٢٣ إذا كانت : س = {٠ ، -٥ ، -٢ ، ٣ ، ٤ ، ٧} وكانت ع = {{أ ، ب} : أ ، ب ∈ س}

أوجد : عدد عناصر ع «١٥»

---

٢٤ إذا كانت : س = {س : س ∈ ط ، ٥ ≤ س ≤ ٩} ، ص = {(أ ، ب) : أ ، ب ∈ س ، أ ≠ ب} ، ع = {{أ ، ب ، حـ} : أ ، ب ، حـ ∈ س} أوجد عدد عناصر كل من ص ، ع «٢٠ ، ١٠»

---

٢٥ بكم طريقة يمكن لمدرس أن يختار طالبًا أو أكثر من بين ستة طلبة ؟ «٦٣»

---

٢٦ بكم طريقة يمكن للجنة مكونة من خمسة أعضاء أن تتخذ قرارًا بالأغلبية ؟ «١٦»

---

٢٧ فصل دراسى به ٧ أولاد ، ٦ بنات واختير فريق مكون من ٥ أشخاص من هذا الفصل احسب عدد الفرق المختلفة التى يمكن اختيارها إذا كان أعضاء الفريق :

(١) من أى جنس. (٢) من الأولاد فقط. (٣) من البنات فقط.

(٤) من نفس الجنس. (٥) من ثلاثة أولاد وبنتين. «١٢٨٧ ، ٢١ ، ٦ ، ٢٧ ، ٥٢٥»

ثالثًا مسائل تقيس مهارات التفكير

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

(١) $^{٦}ق_ر$ تكون أكبر ما يمكن عندما ر = ...

(أ) ١ (ب) ٢ (جـ) ٣ (د) ٦

(٢) إذا كان : $^{ن}ل_س + {}^{س}ل_ن = ١٤٤٠$ فإن : $^{ن+٤}ق_{س-٥} = ...$

(أ) ٦ (ب) ٩ (جـ) ١٠ (د) ١٢

(٣) إذا كان : $^{٤}ق_{ر+٢} = {}^{٤}ق_{٢ر-ر}$ فإن : ر ∈ ....

(أ) {٠} (ب) {-١ ، ٤}

(جـ) {٠ ، ٣} (د) {-٢ ، -١ ، ٠ ، ١ ، ٢}

(٤) $\sum_{ر=٠}^{ن} {}^{ن}ق_ر = ...$

(أ) $٢^ر$ (ب) $ن^٢$ (جـ) $٢^ن$ (د) $١ - ر^٢$

(٥) إذا كانت النقط أ ، ب ، حـ ، ء ، هـ ، و تقع على دائرة فإن عدد المضلعات التى يمكن رسمها من هذه النقط يساوى ....

(أ) ٢٠ (ب) ١٥ (جـ) ٣٠ (د) ٤٢



التفاضل والتكامل والاحتمال

الوحدة 3 التفاضل والتكامل.

الوحدة 4 الاحتمال.

الوحدة الثالثة

التفاضل والتكامل



الدرس 1 معدل التغير.

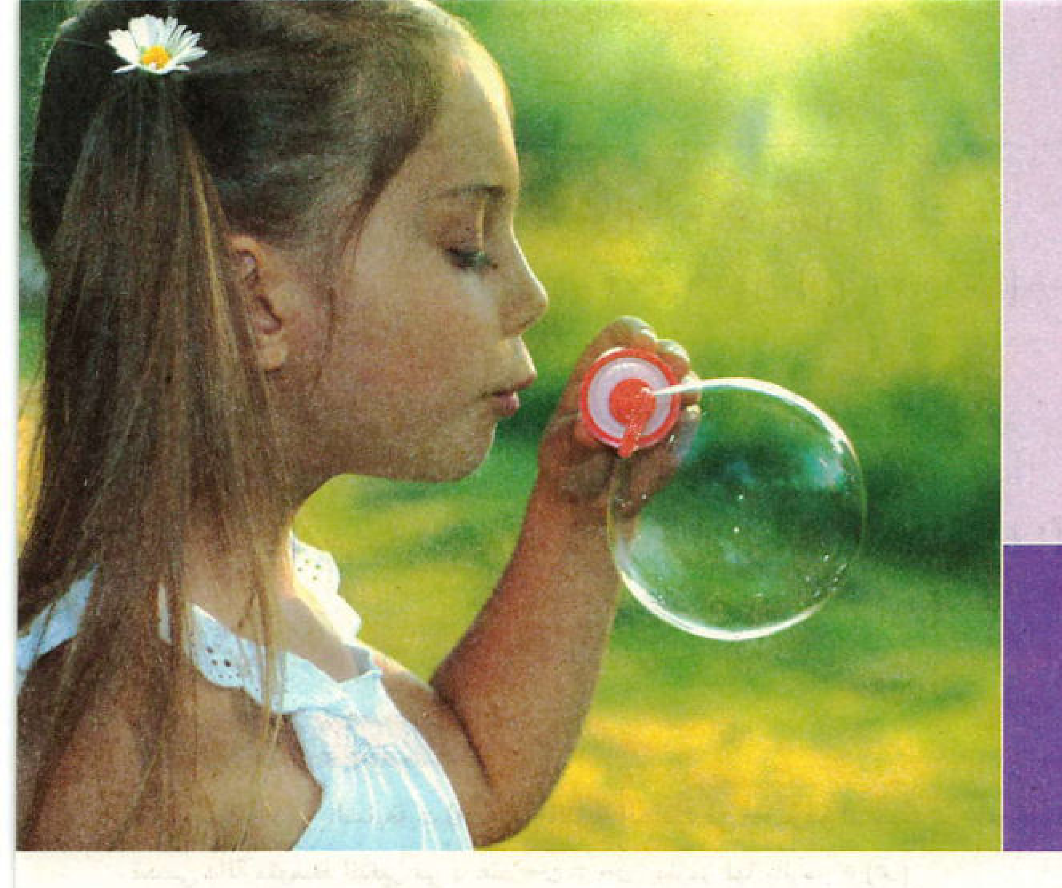
الدرس 2 الاشتقاق.

الدرس 3 قواعد الاشتقاق.

الدرس 4 مشتقة دالة الدالة (قاعدة السلسلة).

الدرس 5 تطبيقات على المشتقة.

الدرس 6 التكامل.



الدرس

1

معدل التغيـر

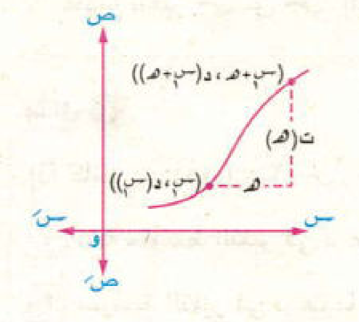
دالة التغير

- إذا كانت : ص = د (س) وتغيرت قيم س من $س_١$ إلى $س_٢$ (حيث $س_١$ ، $س_٢$ ينتميان إلى مجال الدالة د)

فإن : ص تتغير تبعًا لتغير س من القيمة د ($س_١$) إلى القيمة د ($س_٢$)

فإذا كان التغير فى س هو Δ س (ويقرأ دلتا س) = $س_٢ - س_١$

فإن التغير فى ص هو Δ ص = د ($س_٢$) − د ($س_١$)



- وإذا اعتبرنا أن $س_١$ ، $س_١$ + هـ ينتميان إلى مجال الدالة د

فإن لكل تغير فى $س_١$ مقداره (هـ) أى تتغير س

من $س_١$ إلى $س_١$ + هـ يحدث تغير فى ص يتعين بالدالة ت حيث :

ت (هـ) = د ($س_١$ + هـ) − د ($س_١$) وهى دالة فى المتغير هـ

وتسمى **دالة التغير** فى د عند س = $س_١$

مثال ١

إذا كانت : د (س) = $س^٢$ − ٣ س + ٤ **فأوجد :**

١ دالة التغير فى د عند س = ٣ ثم احسب قيمة ت (٠,٢)

٢ التغير فى د (س) عندما تتغير س من ١ إلى ١,٤

الحـل

١ د (س) = $س^٢$ − ٣ س + ٤ وعند س = ٣

∴ ت (هـ) = د (٣ + هـ) − د (٣) = [$(٣ + هـ)^٢$ − ٣ (٣ + هـ) + ٤] − [$(٣)^٢$ − ٣ × ٣ + ٤]

= ٩ + ٦ هـ + $هـ^٢$ − ٩ − ٣ هـ + ٤ − ٤ = ٣ هـ + $هـ^٢$ وهذه هى دالة التغير فى د عند س = ٣

∴ ت (٠,٢) = ٣ (٠,٢) + $(٠,٢)^٢$ = ٠,٦٤

٢ التغير فى د $(س) =$ د $(س_٢) -$ د $(س_١) =$ د $(١,٤) -$ د (١)

$= [(١,٤)^٢ - ٣ \times ١,٤ + ٤] - [(١)^٢ - ٣ \times ١ + ٤] = -٠,٢٤$

* **حل آخر للبند (٢) :**

هـ $= ١,٤ - ١ = ٠,٤$ ، $س_١ = ١$ ونوجد دالة التغير فى د عند س $= ١$

ثم نوجد ت $(٠,٤)$ عند س $= ١$ تكون ت (هـ) $=$ د $(١ +$ هـ$) -$ د (١)

$= [(١ + هـ)^٢ - ٣ (١ + هـ) + ٤] - [١ - ٣ + ٤]$

$= ١ + ٢ هـ + هـ^٢ - ٣ - ٣ هـ + ٤ - ٢ = هـ^٢ - هـ$

$\therefore$ ت $(٠,٤) = (٠,٤)^٢ - ٠,٤ = ٠,١٦ - ٠,٤ = -٠,٢٤$

دالة متوسط التغير

بقسمة دالة التغير السابقة ت (هـ) على التغير الحادث فى س وهو هـ حيث هـ $\neq ٠$ فإننا نحصل على دالة جديدة تسمى **دالة متوسط التغير** فى د عند س $= س_١$ ونرمز لها بالرمز م (هـ)

$$م (هـ) = \frac{ت (هـ)}{هـ} = \frac{د (س_١ + هـ) - د (س_١)}{هـ}$$

ملاحظة

عندما تتغير س من $س_١$ إلى $س_٢$ فإن متوسط التغير $= \frac{\Delta ص}{\Delta س} = \frac{د (س_٢) - د (س_١)}{س_٢ - س_١}$

مثال ٢

إذا كانت : د $(س) = ٢ س^٢ + ٥ س - ١$ **فأوجد :**

١ دالة متوسط التغير فى د عند س $= ٢$ ثم احسب م $(٠,٢)$

٢ متوسط التغير فى د عندما تتغير س من $٥,٥$ إلى ٤

الحل

١ د $(س) = ٢ س^٢ + ٥ س - ١$ عند س $= ٢$

تكون م (هـ) $= \frac{د (٢ + هـ) - د (٢)}{هـ}$ حيث هـ $\neq ٠$

$= \frac{١}{هـ} [(٢ (٢ + هـ)^٢ + ٥ (٢ + هـ) - ١) - (٢ \times ٤ + ٥ \times ٢ - ١)]$

$= \frac{١}{هـ} (٨ + ٨ هـ + ٢ هـ^٢ + ١٠ + ٥ هـ - ١ - ١٧) = \frac{١}{هـ} (١٣ هـ + ٢ هـ^٢)$

$= ١٣ + ٢$ هـ وهذه دالة متوسط التغير عند س $= ٢$

$\therefore$ م $(٠,٢) = ١٣ + ٢ \times ٠,٢ = ١٣,٤$

[٢] ∵ متوسط التغير فى د $= \frac{د(س_٢) - د(س_١)}{س_٢ - س_١}$

، عندما تتغير س من ٥,٥ إلى ٤ ∴ $س_١ = ٥,٥$ ، $س_٢ = ٤$

∴ متوسط التغير فى د $= \frac{د(٤) - د(٥,٥)}{٤ - ٥,٥} = \frac{(٣٢ + ٢٠ - ١) - (٦٠,٥ + ٢٧,٥ - ١)}{-١,٥} = ٢٤$

ويمكن الحل بإيجاد دالة متوسط التغير عند س = ٥,٥ ثم إيجاد م (-١,٥)

معدل التغير

إذا كان لدالة متوسط التغير السابقة م (هـ) نهاية محددة عندما هـ ← ٠ فإن هذه النهاية تسمى معدل التغير للدالة عند $س = س_١$

∴ معدل التغير للدالة عند $س_١$ = $\lim_{هـ \to ٠}$ م (هـ) = $\lim_{هـ \to ٠} \frac{د(س_١ + هـ) - د(س_١)}{هـ}$

مثال ٣

إذا كانت : د (س) = $س^٢ - ٣س$ **فأوجد معدل التغير للدالة د :** عند س = ٢

الحل

عند س = ٢ تكون م (هـ) $= \frac{د(٢ + هـ) - د(٢)}{هـ}$ حيث هـ ≠ ٠

$= \frac{١}{هـ} [((٢ + هـ)^٢ - ٣(٢ + هـ)) - (٤ - ٦)]$

$= \frac{١}{هـ} (٤ + ٤هـ + هـ^٢ - ٦ - ٣هـ + ٢)$

$= \frac{١}{هـ} (هـ + هـ^٢) = ١ + هـ$

∴ معدل التغير للدالة د عند س = ٢ هو $\lim_{هـ \to ٠} (١ + هـ) = ١$

مثال ٤

إذا كانت : ص $= \frac{١}{س - ٢}$ حيث س ≠ ٢ **أوجد :**

[١] دالة متوسط التغير فى ص عندما تتغير س من $س_١$ إلى $س_١ + هـ$

وأوجد هذا المتوسط عندما : $س_١ = ٣$ ، هـ = ١

[٢] معدل التغير فى ص عندما $س = س_١$ وأوجد هذا المعدل عندما س = ٧

الحـــل

نفرض أن : ص = د (س) = $\frac{1}{س - 2}$ ، س ≠ ٢

[١] عند س = $س_1$ تكون م (هـ) = $\frac{د(س_1 + هـ) - د(س_1)}{هـ}$ (حيث هـ ≠ ٠)

$$= \frac{1}{هـ}\left[\frac{1}{س_1 + هـ - 2} - \frac{1}{س_1 - 2}\right]$$

$$= \frac{1}{هـ} \times \frac{س_1 - 2 - س_1 - هـ + 2}{(س_1 + هـ - 2)(س_1 - 2)} = \frac{-1}{(س_1 + هـ - 2)(س_1 - 2)}$$

، عند $س_1 = 3$ ، هـ = ١ ∴ م (هـ) = $\frac{-1}{(3 + 1 - 2)(3 - 2)} = -\frac{1}{2}$

[٢] عند س = $س_1$ يكون معدل التغير = $\lim_{هـ \to 0}$ م (هـ) = $\lim_{هـ \to 0} \frac{-1}{(س_1 + هـ - 2)(س_1 - 2)}$

$$= \frac{-1}{(س_1 - 2)(س_1 - 2)} = \frac{-1}{(س_1 - 2)^2}$$ ، عند س = ٧ يكون معدل التغير = $\frac{-1}{(7 - 2)^2} = -\frac{1}{25}$

مثال ٥

إذا كانت : د (س) = $\sqrt{س}$ حيث س ≥ ٠ **فأوجد معدل تغير الدالة د :** عند س = $س_1$

ثم أوجد هذا المعدل : عندما $س_1$ = ٢٥

الحـــل

عند س = $س_1$ يكون م (هـ) = $\frac{د(س_1 + هـ) - د(س_1)}{هـ} = \frac{\sqrt{س_1 + هـ} - \sqrt{س_1}}{هـ}$

∴ معدل التغير للدالة د = $\lim_{هـ \to 0}$ م (هـ) = $\lim_{هـ \to 0} \frac{(س_1 + هـ)^{\frac{1}{2}} - (س_1)^{\frac{1}{2}}}{هـ} = \frac{1}{2}(س_1)^{\frac{1}{2} - 1} = \frac{1}{2\sqrt{س_1}}$

وعندما $س_1$ = ٢٥ يكون معدل التغير للدالة = $\frac{1}{2\sqrt{25}}$ = ٠,١

مثال ٦

صفيحة معدنية مربعة الشكل تتمدد بالتسخين بحيث تظل محتفظة بشكلها **أوجد :**

[١] متوسط التغير فى مساحتها عندما يتغير طول ضلعها من ١٠ سم إلى ١٠,٢ سم.

[٢] معدل التغير فى مساحتها عندما يكون طول ضلعها ٢٠ سم.

الحـــل

بفرض أن طول ضلع الصفيحة = س سم ومساحتها = ص $سم^2$

∴ ص = د (س) = $س^2$

[١] ∵ Δ ص = د ($س_2$) − د ($س_1$) = د (١٠,٢) − د (١٠) = $(10{,}2)^2 - (10)^2$ = ٤,٠٤

، Δ س = ١٠,٢ − ١٠ = ٠,٢

∴ متوسط التغير فى المساحة = $\frac{Δ ص}{Δ س} = \frac{4{,}04}{0{,}2}$ = ٢٠,٢

٢ عند $س_١ = ٢٠$ يكون $م(هـ) = \frac{د(٢٠ + هـ) - د(٢٠)}{هـ}$ ، $هـ \neq ٠$

$= \frac{١}{هـ} \left[(٢٠ + هـ)^٢ - (٢٠)^٢ \right]$

$= \frac{١}{هـ} (٤٠٠ + ٤٠ هـ + هـ^٢ - ٤٠٠) = ٤٠ + هـ$

∴ عندما طول الضلع = ٢٠ سم يكون معدل التغير فى المساحة = $\lim_{هـ \to ٠} (٤٠ + هـ) = ٤٠$

مثال ٧

صفيحة معدنية رقيقة مستطيلة الشكل طولها ثلاثة أمثال عرضها تتمدد بحيث تظل محتفظة بشكلها وبالنسبة الثابتة بين بعديها أوجد :

١ معدل التغير فى مساحتها بالنسبة لطولها عندما يكون طولها = ٦ سم.

٢ معدل التغير فى مساحتها بالنسبة لعرضها عندما يكون عرضها = ٢ سم.

الحل

١ بفرض أن طول الصفيحة = س سم

∴ عرض الصفيحة = $\frac{١}{٣}$ س سم

وبفرض أن : مساحة الصفيحة = ص سم^٢

∴ ص = س × $\frac{١}{٣}$ س

∴ ص = $\frac{١}{٣}$ س^٢

عندما س = ٦ (طول المستطيل = ٦)

لاحظ أنه :

* لإيجاد معدل التغير فى المساحة بالنسبة للطول نفرض أن : الطول = س سم
* لإيجاد معدل التغير فى المساحة بالنسبة للعرض نفرض أن : العرض = س سم

∴ $م(هـ) = \frac{د(٦ + هـ) - د(٦)}{هـ} = \frac{\frac{١}{٣}(٦ + هـ)^٢ - \frac{١}{٣}(٦)^٢}{هـ} = \frac{\frac{١}{٣}(٣٦ + ١٢ هـ + هـ^٢) - \frac{١}{٣} × ٣٦}{هـ}$

$= \frac{١٢ + ٤ هـ + \frac{١}{٣} هـ^٢ - ١٢}{هـ} = ٤ + \frac{١}{٣} هـ$

∴ عند س = ٦ يكون معدل التغير فى المساحة بالنسبة لطول ضلع الصفيحة = $\lim_{هـ \to ٠} (٤ + \frac{١}{٣} هـ) = ٤$

٢ بفرض أن : عرض الصفيحة = س سم

∴ طول الصفيحة = ٣ س سم وبفرض أن مساحة الصفيحة = ص سم^٢

∴ ص = س × ٣ س = ٣ س^٢ ، عند س = ٢ (عرض الصفيحة = ٢)

∴ $م(هـ) = \frac{د(٢ + هـ) - د(٢)}{هـ} = \frac{٣(٢ + هـ)^٢ - ٣(٢)^٢}{هـ} = \frac{٣(٤ + ٤ هـ + هـ^٢) - ٣ × ٤}{هـ}$

$= \frac{١٢ + ١٢ هـ + ٣ هـ^٢ - ١٢}{هـ} = ١٢ + ٣ هـ$

∴ عند س = ٢ يكون معدل التغير فى المساحة بالنسبة لعرض الصفيحة = $\lim_{هـ \to ٠} (١٢ + ٣ هـ) = ١٢$

تمارين 8 على معدل التغير

اختبر نفسك

من أسئلة الكتاب المدرسى • فهم • تطبيق • مستويات عليا

أولًا أسئلة الاختيار من متعدد

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

① إذا كانت الدالة د : د (س) = ٣ س − ٢ فإن دالة التغير ت (هـ) = ... عند س = ١

(أ) ٣ (ب) هـ (جـ) ٣ هـ (د) ٦ هـ

② إذا كانت : د (س) = ٤ س + ١ فإن التغير فى د عندما تتغير س من ٢ إلى ٢,١ يساوى ....

(أ) ٠,١ (ب) ٠,٤ (جـ) ٤ (د) ٤,١

③ إذا كانت : د (س) = س^{٢} + ٢ س + ٣ فإن : ت (هـ) = ... عند س = ٢

(أ) هـ^{٢} + ٢ هـ + ٣ (ب) هـ^{٢} + ٦ هـ + ١٤ (جـ) ٢ هـ − ١ (د) هـ^{٢} + ٦ هـ

④ إذا كانت : د (س) = س^{٢} − س + ١ فإن :

أولًا : دالة التغير ت عند س = ٣ هى ....

(أ) ت (٣) (ب) ت (س + ٣) (جـ) ٢ هـ − ١ (د) هـ^{٢} + ٥ هـ

ثانيًا : ت (٠,٢) = ...

(أ) ١,٠٤ (ب) ٠,٨٤ (جـ) ١,٠٨ (د) ١,٨٢

ثالثًا : ت (−٠,٣) = ...

(أ) ١,٤١ (ب) ١,٣١ (جـ) ١,٠٤ (د) −١,٤١

⑤ متوسط تغير الدالة د حيث د (س) = س^{٢} عندما تتغير س من ٣ إلى ٣,١ يساوى ....

(أ) ٠,٦١ (ب) ٦,١ (جـ) ٩ (د) ٩,٦١

⑥ إذا كانت الدالة د : د (س) = س^{٢} − س فإن متوسط التغير للدالة د عندما تزداد س بمقدار ٠,٣ هو ....

(أ) ٢ س − ١ (ب) ٢ س − ٠,٧ (جـ) −٠,٢١ (د) −٠,١

⑦ إذا كان متوسط التغير فى د يساوى ٢,٤ عندما تتغير س من ٣ إلى ٣,٢ فإن التغير فى د عندئذ يساوى ....

(أ) ٠,٣٢ (ب) ٠,٤٨ (جـ) ٣,٦ (د) ٧,٢

⑧ إذا كان متوسط التغير فى د يساوى ٥ عندما تتغير س من ٢ إلى ٤ ، د (٢) = ٦

فإن : د (٤) = ...

(أ) −٤ (ب) ٧ (جـ) ٨ (د) ١٦

(٩) إذا كانت د دالة وكان التغير فى د يساوى ١٤ عندما تتغير س من ٢ إلى ٤ فإن متوسط التغير فى د يساوى ....

(أ) ١٤ (ب) ٧ (جـ) $\frac{٧}{٢}$ (د) –٧

(١٠) إذا كان منحنى الدالة د يمر بالنقطتين (١ ، ٢) ، (٢ ، ٣) ، فإن متوسط التغير للدالة د عندما تتغير س من ١ إلى ٢ هو ....

(أ) ١ (ب) ٢ (جـ) صفر (د) –١

(١١) إذا كان : د (٢) = ٥ ، د (٢,٣) = ٧ فإن التغير فى د عندما تتغير س من ٢ إلى ٢,٣ يساوى ....

(أ) ٠,٣ (ب) ٢ (جـ) ٣٥ (د) ١٢

(١٢) إذا كانت د : د (س) = س^{٢} + أ س – ٣ وكانت دالة التغير ت وكان ت $\left(\frac{١}{٢}\right)$ = $\frac{١٩}{٤}$ عند س = ٢ فإن : أ = ...

(أ) ٣ (ب) ٤ (جـ) ٥ (د) ٦

(١٣) دائرة طول نصف قطرها نق ، فإن متوسط التغير فى مساحة الدائرة عندما تتغير نق من (نق$_{١}$) إلى (نق$_{١}$ + هـ) هو ....

(أ) ٢ π نق$_{١}$ (ب) π (٢ نق$_{١}$ + هـ)

(جـ) π نق$_{١}^{٢}$ (د) π (٢ نق$_{١}$ + هـ^{٢})

(١٤) دائرة طول نصف قطرها نق فإن متوسط التغير فى محيط الدائرة عندما تتغير نق من نق$_{١}$ إلى نق$_{٢}$ هو ....

(أ) ٢ π نق$_{١}$ (ب) ٢ π (نق$_{٢}$ – نق$_{١}$) (جـ) π نق$_{١}$ (د) ٢ π

(١٥) معدل تغير الدالة د : د (س) = س^{٢} + ٥ س – ٢ عند س = –١ يساوى ....

(أ) ١ (ب) ٢ (جـ) ٣ (د) ٤

(١٦) معدل تغير الدالة د : د (س) = $\frac{١}{س}$ عند س = $\sqrt{٥}$ يساوى ....

(أ) ٥ (ب) $\frac{١}{٥}$ (جـ) –٥ (د) –$\frac{١}{٥}$

(١٧) معدل تغير الدالة د : د (س) = $\sqrt{س}$ حيث س ≥ ٠ عند س = ١٦ تساوى ....

(أ) $\frac{١}{٢}$ (ب) $\frac{١}{٤}$ (جـ) $\frac{١}{٨}$ (د) $\frac{١}{١٦}$

(١٨) إذا كانت د : د (س) = س^{٤} فإن معدل تغير الدالة عند س = ٣ يساوى ....

(أ) ٨١ (ب) ٢٧ (جـ) ١٠٨ (د) ٣٢٤

(١٩) إذا كانت د : د (س) = $\frac{٣}{س – ٢}$

أولًا : دالة متوسط التغير للدالة د = ...

(أ) $\frac{–٣ هـ}{(س_{١} – ٢) (س_{١} + هـ – ٢)}$ (ب) $\frac{–٣}{(س_{١} – ٢) (س_{١} + هـ – ٢)}$

(جـ) $\frac{–٣}{٢ (٣ + هـ)}$ (د) $\frac{٣}{هـ – ٢}$

ثانيًا : معدل التغير فى د عند س = ٥ هى ....

(أ) −٣ (ب) $-\frac{1}{3}$ (جـ) ٥ (د) $-\frac{1}{5}$

(٢٠) إذا كانت د : د (س) = أ حيث أ ثابت ، فإن متوسط التغير للدالة د هو ....

(أ) أ (ب) − أ (جـ) صفر (د) ١

(٢١) إذا كان : د (س) = أ س + ب فإن متوسط التغير للدالة د عندما تتغير س من $س_1$ إلى $س_2$ هو ....

(أ) − أ (ب) أ (جـ) أ + ب (د) ١

(٢٢) إذا كان متوسط معدل التغير فى الدالة د حيث د (س) = ٤ $س^2$ + أ عندما تتغير س من ب إلى ٢ يساوى −٤ فإن : ب = ...

(أ) −٢ (ب) −٣ (جـ) −٤ (د) ٢٠

(٢٣) متوسط التغير فى حجم مكعب عندما يتغير طول حرفه من ٥ سم إلى ٧ سم يساوى ....

(أ) ١٢٥ (ب) ٣٤٣ (جـ) ٢١٨ (د) ١٠٩

(٢٤) صفيحة على شكل مربع يتمدد بانتظام محتفظة بشكلها فإن معدل التغير فى مساحتها بالنسبة لطول ضلعها عندما يكون طول ضلعها ٥ سم يساوى ....

(أ) ١٠ (ب) ٥ (جـ) ٢٥ (د) ١٠٠

(٢٥) يتمدد بالون كروى محتفظًا بشكله بسبب ضغط الغاز داخله فإن متوسط التغير فى مساحته السطحية بالنسبة لطول نصف قطره عندما يتغير طول نصف قطره من ٧ سم إلى ٩ سم يساوى ....

(أ) ١٦ π (ب) ٣٢ π (جـ) ٦٤ π (د) ١٢٨ π

(٢٦) فى الشكل المقابل :

متوسط التغير للدالة د عندما تتغير س من −١ إلى ٢ يساوى ....

ص، د(س)، س، س′، ص′، ١، ٢، ٣، −١، −٢، و

(أ) صفر (ب) −١

(جـ) ٢ (د) ٣

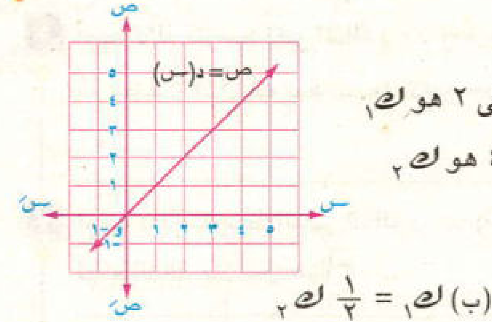
(٢٧) فى أى من الدوال الآتية يكون متوسط التغير للدالة عندما تتغير س من ($س_1$) إلى ($س_1$ + هـ) مقدار ثابت ؟

(أ) د (س) = ٤ $س^2$ + ١٠ (ب) د (س) = ٢ س − ٣

(جـ) د (س) = $\frac{1}{2}$ $س^3$ + ٧ س (د) د (س) = $\frac{1}{س}$

(٢٨) إذا كانت د دالة زوجية فإن متوسط تغير الدالة د عندما تتغير س من −٣ إلى ٣ يساوى ....

(أ) صفر (ب) ١ (جـ) −١ (د) ٢ د (٠)



(٢٩) فى الشكل المقابل :

إذا كان متوسط التغير للدالة د عندما تتغير س من ١ إلى ٢ هو $ك_1$

وكان متوسط التغير للدالة د عندما تتغير س من ٢ إلى ٤ هو $ك_2$

فإن : ....



(أ) $ك_1 = ٢ ك_2$ (ب) $ك_1 = \frac{1}{2} ك_2$

(جـ) $ك_1 = ك_2$ (د) $ك_1 = ٤ ك_2$

(٣٠) الشكل المقابل يمثل منحنى الدالة د

فإن قيمة دالة التغير عندما

تتغير س من ٢ إلى ٢ + هـ تساوى ....

(أ) ٣ (ب) -٣

(جـ) ٩ (د) ٦

ثانيًا الأسئلة المقالية

١ إذا كانت الدالة د : د (س) = ٣ س - ٢ فأوجد دالة التغير ت عند س = ١ ثم أوجد ت (٠,٤) «١,٢»

٢ إذا كانت : د (س) = $س^2$ - ٣ س + ٤ أوجد :

(١) دالة التغير فى د عند س = ٣ ثم احسب قيمة ت (٠,٥)

(٢) التغير فى د (س) عندما تتغير س من ٢ إلى ٢,٤ «١,٧٥ ، ٠,٥٦-»

٣ إذا كانت الدالة د : د (س) = $س^2$ + ٢ س - ١ أوجد التغير فى د (س) عندما :

(١) تتغير س من ٢ إلى ٢,٢ (٢) تتغير س من ٢ إلى ١,٨

(٣) تتغير س من ١ إلى ١ + هـ (٤) س = ٢ ، هـ = $\frac{1}{2}$

(٥) س = ٣ ، Δ س = ٠,٢ «١,٢٤ ، -١,١٦ ، $هـ^2$ + ٤ هـ ، ٣,٢٥ ، ١,٦٤»

٤ إذا كانت : د (س) = $س^2$ + ٣ س - ١ فأوجد :

(١) دالة متوسط التغير عند س = ٢ ، ثم أوجد م (٠,٢)

(٢) متوسط التغير عندما تتغير س من ٤,٥ إلى ٣ «٧,٢ ، ١٠,٥»

٥ أوجد دالة متوسط التغير للدالة د : د (س) = ٢ $س^2$ - ٣ س + ٤ عندما تتغير س من $س_1$ إلى $س_1$ + هـ ثم أوجد :

(١) متوسط التغير للدالة عند س = ٣ ثم احسب م (٠,٢)

(٢) متوسط التغير للدالة عندما تتغير س من ٣,٥ إلى ٤

(٣) معدل التغير للدالة عند س = ٢ «٩,٤ ، ١٢ ، ٥»

٦ أوجد دالة متوسط تغير الدالة د : $د(س) = ٥ + ٤س - ٢س^{٢}$ عندما تتغير س من $س_{١}$ إلى $س_{١} + هـ$
ثم احسب هذا المتوسط عندما تتغير س من ٢ إلى ٢,٢ ثم احسب معدل التغير للدالة عند س = ٤

«−٤,٤ ، −١٢»

---

٧ أوجد دالة متوسط التغير للدالة د : $د(س) = \frac{١}{س}$ ومن ثم احسب معدل التغير
لهذه الدالة عند $س = \sqrt{٣}$

«$\frac{-١}{٣}$»

---

٨ أوجد دالة متوسط التغير للدالة د : $د(س) = \frac{٣س^{٢} + ١}{س}$ عندما تتغير س من $س_{١}$ إلى $س_{١} + هـ$
ثم احسب هذا المتوسط عندما $س_{١} = ٥$ ، $هـ = ٠,٢$ ثم استنتج معدل التغير عندما س = ٥

«$\frac{٧٧}{٢٦}$ ، $\frac{٧٤}{٢٥}$»

---

٩ إذا كانت الدالة د : $د(س) = \frac{س + ٢}{س - ٢}$ أوجد :
(١) دالة متوسط التغير للدالة عندما تتغير س من $س_{١}$ إلى $س_{١} + هـ$
(٢) متوسط التغير للدالة عندما تتغير س من ٣ إلى $٣\frac{١}{٢}$
(٣) معدل التغير للدالة عند س = ٤

«$\frac{-٤}{(س_{١} - ٢)(س_{١} + هـ - ٢)}$ ، −٣ ، −١»

---

١٠ أوجد معدل تغير الدالة د : $د(س) = س + \frac{١}{س}$ عند س = ٢

«$\frac{٣}{٤}$»

---

١١ أوجد دالة متوسط التغير للدالة د حيث $د(س) = \sqrt{س}$ ، $س \geq ٠$.
ثم احسب معدل التغير لهذه الدالة عندما س = ٤

«$\frac{١}{٤}$»

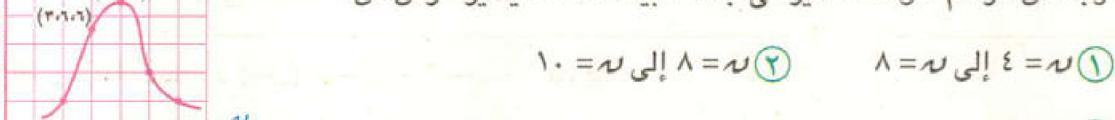
---

١٢ إذا كانت : $د(س) = س^{٥}$ فأوجد معدل تغير الدالة د عندما س = ٢

«٨٠»

---

١٣ يوضح الشكل المقابل المنحنى : ر = د(ن) حيث ر جملة مبيعات أحد
منافذ بيع أجهزة الحاسب الآلى مقدرًا بملايين الجنيهات ، ن الزمن مقدرًا بالشهور.
أوجد من الرسم متوسط التغير فى جملة المبيعات عندما يتغير الزمن من :

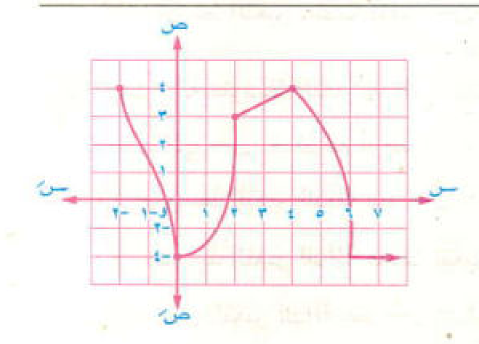


(١) ن = ٤ إلى ن = ٨ (٢) ن = ٨ إلى ن = ١٠
(٣) ن = ٤ إلى ن = ١٢

«٠,٨٥ ، −١,٢ ، صفر»

---

١٤ تفكير ناقد :
يوضح الشكل المقابل منحنى الدالة د حيث ص = د(س)
حدد الفترات التى يكون فيها متوسط
التغير فى د ثابتًا ، وفسر إجابتك.



«]−٢ ، ٠[،]٢ ، ٤[،]٦ ، ∞[»

١٥ صفيحة على شكل مربع يتمدد بانتظام محتفظة بشكلها ، احسب متوسط التغير فى مساحة سطحها عندما يتغير طول ضلعها من ٣ سم إلى ٣,٤ سم ، ثم احسب معدل التغير فى مساحة سطحها عندما يكون طول ضلعها ٥ سم. «٦,٤ ، ١٠»

١٦ صفيحة على شكل مربع تنكمش بالتبريد محتفظة بشكلها المربع ، احسب معدل التغير فى مساحة الصفيحة بالنسبة إلى طول ضلعها عندما يكون طول الضلع ٨ سم. «١٦»

١٧ لوح رقيق معدنى مستطيل الشكل طوله يزيد عن عرضه بمقدار ٣ سم يتمدد بحيث يحتفظ بشكله الهندسى **أوجد :**

(١) التغير فى مساحة اللوح عندما يتغير عرضه من ٤ سم إلى ٤,٢ سم.

(٢) التغير فى محيط اللوح عندما يتغير عرضه من ٣,٥ سم إلى ٣,٧ سم. «٢,٢٤ ، ٠,٨»

١٨ صفيحة معدنية مستطيلة الشكل طولها ضعف عرضها تتمدد بالحرارة بحيث تحتفظ بالنسبة بين طولها وعرضها **أوجد :**

(١) متوسط التغير فى مساحتها عندما يتغير طولها من ١٥ سم إلى ١٦,٥ سم.

(٢) معدل التغير فى كل من مساحتها ومحيطها عندما يكون طولها ١٥ سم. «١٥,٧٥ ، ١٥ ، ٣»

١٩ صفيحة دائرية الشكل تتمدد بانتظام بحيث تحتفظ بشكلها. أوجد معدل التغير فى مساحة الصفيحة بالنسبة إلى طول نصف قطرها عندما يكون طول نصف القطر ١٤ سم. $\left(\pi = \frac{٢٢}{٧}\right)$ «٨٨»

٢٠ سقط حجر فى بركة ماء فتكونت موجة دائرية تزداد بانتظام بحيث تظل محتفظة بشكلها الدائرى **أوجد :**

(١) متوسط التغير فى مساحة الموجة عندما يتغير طول نصف قطرها من ٦ سم إلى ٦,٣ سم.

(٢) معدل التغير فى مساحتها عندما يكون طول نصف قطرها ٥ سم. «١٢,٣ π ، ١٠ π»

٢١ مكعب من المعدن يتمدد بانتظام بحيث يظل محتفظًا بشكله **أوجد :**

(١) متوسط التغير فى مساحته الكلية عندما يتغير طول حرفه من ٢ سم إلى ٢,١ سم.

(٢) معدل التغير فى مساحته الكلية عندما يكون طول حرفه ٣ سم.

(٣) معدل التغير فى حجم المكعب عندما يكون طول حرفه ٥ سم. «٢٤,٦ ، ٣٦ ، ٧٥»

٢٢ كرة من المعدن تتمدد بالتسخين محتفظة بشكلها الكروى فأوجد معدل التغير فى حجم الكرة بالنسبة إلى طول نصف قطرها عندما يكون طول نصف قطرها ٧ سم. «١٩٦ π»

٢٣ إذا كانت الكمية ص (مقيسة بالكيلوجرام) التى تنتجها شجرة برتقال متوسطة الإنتاج، يتوقف على عدد الكيلوجرامات س من المبيد الحشرى المستخدم لرش الشجرة طبقًا للعلاقة ص $= ١٠٠ - \frac{٤٢}{س + ١}$

احسب متوسط التغير فى ص عندما تتغير س من ١ إلى ٢ «٧»

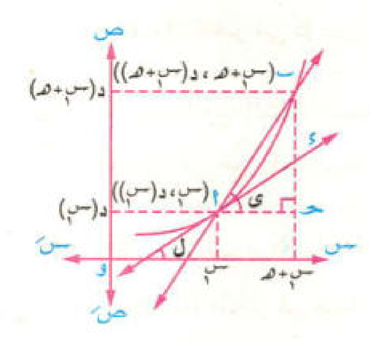


الدرس

2

الاشتقاق

التفسير الهندسى لمعدل التغير



نفرض أن الشكل المقابل يمثل منحنى الدالة ص = د (س)

وأن النقطتين أ $(س_١ ، د(س_١))$ ، ب $(س_١ + هـ ، د(س_١ + هـ))$

تقعان على منحنى الدالة فيكون :

[١] أ حـ = هـ ، ب حـ = د $(س_١ + هـ) - د(س_١)$

$\therefore \frac{د(س_١ + هـ) - د(س_١)}{هـ} = \frac{ب حـ}{أ حـ}$ = ظا ى = ميل القاطع $\overleftrightarrow{أ ب}$

[٢] إذا ثبتنا النقطة أ وتصورنا أن النقطة ب تتحرك على منحنى الدالة مقتربة من النقطة أ

فإن حـ تقترب أيضًا من أ أى أ حـ = هـ ← الصفر وفى الوضع النهائى يقترب القاطع $\overleftrightarrow{أ ب}$ من الانطباق على المماس $\overleftrightarrow{أ ء}$ الذى يمس المنحنى عند أ $(س_١ ، د(س_١))$ وتؤول الزاوية ى إلى الزاوية ل

أى أن

ميل المماس لمنحنى الدالة (ص = د (س)) عند النقطة $(س_١ ، د(س_١))$

= ظا ل = $\lim_{هـ \to 0} \frac{د(س_١ + هـ) - د(س_١)}{هـ}$ إن وجدت

= معدل تغير الدالة عند $(س = س_١)$

المشتقة الأولى للدالة

المقدار $\lim_{هـ \to 0} \frac{د(س + هـ) - د(س)}{هـ}$ له قيمة وحيدة عند كل قيمة للمتغير س $\in$ مجال الدالة لذلك فهو دالة فى س يطلق عليها «الدالة المشتقة» أو «المشتقة الأولى للدالة» أو «المعامل التفاضلى الأول للدالة».

تعريـــف

إذا كانت د :]أ ، ب[⟵ ع ، س ∈]أ ، ب[فإن الدالة المشتقة دَ :

$$دَ(س) = \lim_{هـ \to 0} \frac{د(س + هـ) - د(س)}{هـ}$$ بشرط أن تكون النهاية موجودة.

وإذا كانت ص = د (س) فيرمز للمشتقة الأولى لهذه الدالة بأحد الرموز : $\frac{ءص}{ءس}$

أو صَ أو دَ (س) أو $\frac{ء}{ءس}$ [د (س)]

ملاحظتان

١ الرمز $\frac{ءص}{ءس}$ هو تعبير رياضى لا يفسر على أنه خارج قسمة مقدارين ء ص ، ء س بل هو رمز معناه مشتقة الدالة ص بالنسبة للمتغير س ويقرأ «دال ص دال س»

٢ ميل المماس لمنحنى الدالة ص = د (س) عند النقطة ($س_1$ ، د ($س_1$)) هو دَ ($س_1$)

مثال ١

باستخدام تعريف المشتقة أوجد مشتقة الدالة د :

د (س) = $س^2$ + ٢ س − ٥ ثم أوجد ميل المماس عند النقطة (٣ ، ١٠)

الحـــل

∵ د (س) = $س^2$ + ٢ س − ٥

∴ د (س + هـ) = $(س + هـ)^2$ + ٢ (س + هـ) − ٥ = $س^2$ + ٢ س هـ + $هـ^2$ + ٢ س + ٢ هـ − ٥

∴ د (س + هـ) − د (س) = ٢ س هـ + $هـ^2$ + ٢ هـ = هـ (٢ س + هـ + ٢)

، ∵ $دَ(س) = \lim_{هـ \to 0} \frac{د(س + هـ) - د(س)}{هـ}$

∴ $دَ(س) = \lim_{هـ \to 0} \frac{هـ(٢س + هـ + ٢)}{هـ} = \lim_{هـ \to 0}(٢س + هـ + ٢) = ٢س + ٢$

، ∵ د (٣) = $(٣)^2$ + ٢ (٣) − ٥ = ١٠ ∴ النقطة (٣ ، ١٠) تقع على المنحنى.

∴ ميل المماس عند (س = ٣) = دَ (٣) = ٢ × ٣ + ٢ = ٨

مثال ٢

أوجد ميل المماس لمنحنى الدالة د : د (س) = $س^3$ − ٣ عند النقطة أ (٢ ، ٥) ثم أوجد قياس الزاوية الموجبة التى يصنعها المماس مع الاتجاه الموجب لمحور السينات عند النقطة أ لأقرب دقيقة.

الحل

$\because$ د $(2) = (2)^3 - 3 = 5$ $\therefore$ النقطة $(2 ، 5)$ تقع على المنحنى.

$\therefore$ ميل المماس عند $(س = 2) = \underset{هـ \to 0}{نهـا} \frac{د(2 + هـ) - د(2)}{هـ}$

$= \underset{هـ \to 0}{نهـا} \frac{(2 + هـ)^3 - 3 - (2)^3 + 3}{هـ}$

$= \underset{هـ \to 0}{نهـا} \frac{(2 + هـ)^3 - (2)^3}{هـ} = 3 (2)^2 = 12$

$\therefore$ ظا (ل) $= 12$ $\therefore$ ق$(\angle$ ل$) =$ ظا$^{-1}$ $(12) \approx 85° 14'$

لاحظ أن :
ميل المماس = ظا ل حيث ل هى قياس الزاوية الموجبة التى يصنعها المماس مع الاتجاه الموجب لمحور السينات.

قابلية الدالة للاشتقاق عند نقطة

يقال إن الدالة د قابلة للاشتقاق عند س = أ (حيث أ $\in$ مجال د)

إذا وفقط إذا كانت د$'$(أ) لها وجود حيث د$'$(أ) $= \underset{هـ \to 0}{نهـا} \frac{د(أ + هـ) - د(أ)}{هـ}$

مثال ٣

أوجد المشتقة الأولى عند س = ١ لكل من الدالتين المعرفتين بالقاعدتين الآتيتين :

١ د(س) $= \frac{س - 2}{س + 3}$ ٢ ر(س) $= \sqrt{س + 3}$

الحل

١ $\because$ مجال د $=$ ح $- \{-3\}$ $\therefore$ د معرفة عند س = ١ ، د$(1) = \frac{1 - 2}{1 + 3} = \frac{-1}{4}$

$\therefore$ د$'(1) = \underset{هـ \to 0}{نهـا} \frac{د(1 + هـ) - د(1)}{هـ} = \underset{هـ \to 0}{نهـا} \frac{1}{هـ} \left[\frac{1 + هـ - 2}{1 + هـ + 3} + \frac{1}{4}\right]$

$= \underset{هـ \to 0}{نهـا} \frac{1}{هـ} \left[\frac{هـ - 1}{هـ + 4} + \frac{1}{4}\right] = \underset{هـ \to 0}{نهـا} \left(\frac{1}{هـ} \times \frac{4(هـ - 1) + (هـ + 4)}{4(هـ + 4)}\right)$

$= \underset{هـ \to 0}{نهـا} \left(\frac{4هـ - 4 + هـ + 4}{4هـ(هـ + 4)}\right) = \underset{هـ \to 0}{نهـا} \frac{5هـ}{4هـ(هـ + 4)} = \underset{هـ \to 0}{نهـا} \frac{5}{4(هـ + 4)} = \frac{5}{16}$

٢ $\because$ مجال ر $= [-3 ، \infty[$ $\therefore$ ر معرفة عند س = ١ ، ر$(1) = \sqrt{1 + 3} = 2$

$\therefore$ ر$'(1) = \underset{هـ \to 0}{نهـا} \frac{ر(1 + هـ) - ر(1)}{هـ} = \underset{هـ \to 0}{نهـا} \frac{\sqrt{1 + هـ + 3} - 2}{هـ}$

$= \underset{هـ \to 0}{نهـا} \frac{\sqrt{هـ + 4} - 2}{هـ} = \underset{هـ \to 0}{نهـا} \frac{(هـ + 4)^{\frac{1}{2}} - (4)^{\frac{1}{2}}}{هـ} = \frac{1}{2}(4)^{\frac{1}{2} - 1} = \frac{1}{4}$

مثال ④

إذا كانت الدالة د : د (س) = $\sqrt{س}$ + ٥ **أوجد :** دَ (س) **ثم أوجد :** دَ (١) ، دَ (٩)

الحل

∵ د (س) = $\sqrt{س}$ + ٥ ∴ د (س + هـ) = $\sqrt{س + هـ}$ + ٥

∴ د (س + هـ) − د (س) = $\sqrt{س + هـ}$ + ٥ − ($\sqrt{س}$ + ٥) = $\sqrt{س + هـ} - \sqrt{س}$

∴ $\lim_{هـ \to ٠} \frac{د(س + هـ) - د(س)}{هـ} = \lim_{هـ \to ٠} \frac{\sqrt{س + هـ} - \sqrt{س}}{هـ} \times \frac{(\sqrt{س + هـ} + \sqrt{س})}{(\sqrt{س + هـ} + \sqrt{س})}$

$= \lim_{هـ \to ٠} \frac{س + هـ - س}{هـ (\sqrt{س + هـ} + \sqrt{س})}$

$= \lim_{هـ \to ٠} \frac{هـ}{هـ (\sqrt{س + هـ} + \sqrt{س})}$

$= \lim_{هـ \to ٠} \frac{١}{\sqrt{س + هـ} + \sqrt{س}}$

$= \frac{١}{\sqrt{س} + \sqrt{س}}$

$= \frac{١}{٢\sqrt{س}}$

∴ دَ (س) = $\frac{١}{٢\sqrt{س}}$

∴ دَ (١) = $\frac{١}{٢\sqrt{١}} = \frac{١}{٢}$ ، دَ (٩) = $\frac{١}{٢\sqrt{٩}} = \frac{١}{٦}$

> **لاحظ أن :**
> مجال د هو [٠ ، ∞[
> ، مجال دَ هو]٠ ، ∞[
> وبالتالى تكون د (٠) = ٥ (معرفة)
> بينما دَ (٠) غير معرفة
> أى أن الدالة غير قابلة للاشتقاق عند س = ٠ لعدم وجود النهاية

مثال ⑤

إذا كانت د (س) = أ $س^٢$ + ب حيث أ ، ب ثابتان وكان ميل المماس لمنحنى الدالة عند النقطة (١ ، −١) الواقعة عليه يساوى ٨ **أوجد قيمتى :** أ ، ب

الحل

∵ ميل المماس للمنحنى عند النقطة (١ ، −١) = دَ (١) ∴ دَ (١) = ٨

، ∵ دَ (١) = $\lim_{هـ \to ٠} \frac{د(١ + هـ) - د(١)}{هـ} = \lim_{هـ \to ٠} \frac{أ(١ + هـ)^٢ + ب - (أ + ب)}{هـ}$

$= \lim_{هـ \to ٠} \frac{أ + ٢أهـ + أهـ^٢ + ب - أ - ب}{هـ} = \lim_{هـ \to ٠} \frac{٢أهـ + أهـ^٢}{هـ}$

$= \lim_{هـ \to ٠}$ ٢أ + أهـ = ٢أ

∴ ٢أ = ٨ ∴ أ = ٤ ، ∵ النقطة (١ ، −١) ∋ منحنى الدالة.

∴ د (١) = −١ ∴ أ + ب = −١ ∴ ب = −٥

تمارين 9 على الاشتقاق

اختبر نفسك

من أسئلة الكتاب المدرسى • فهم • تطبيق • مستويات عليا

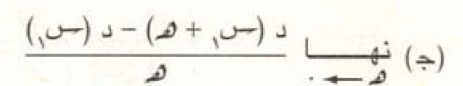
أولًا أسئلة الاختيار من متعدد

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

(١) ميل المماس لمنحنى الدالة د عند النقطة (س١ ، ص١) الواقعة عليه يساوى ....

(أ) د (س١ + هـ) − د (س١)

(ب) $\frac{\text{د (س}_1 + \text{هـ) − د (س}_1)}{\text{هـ}}$



(جـ) $\underset{\text{هـ} \to 0}{\text{نهـا}} \frac{\text{د (س}_1 + \text{هـ) − د (س}_1)}{\text{هـ}}$

(د) $\underset{\text{س}_1 \to 0}{\text{نهـا}} \frac{\text{د (س}_1) − \text{د (هـ)}}{\text{س}_1 − \text{هـ}}$

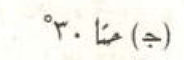
(٢) إذا كان منحنى الدالة د فى الشكل المقابل يمثله

المستقيم ل فإن متوسط التغير للدالة د هو ....



(أ) طا ٣٠°

(ب) جا ٣٠°



(جـ) جتا ٣٠°

(د) − طا ٣٠°

(٣) فى الشكل المقابل :

متوسط التغير للدالة د يساوى ....

(أ) ١

(ب) −١



(جـ) س

(د) − س



(٤) فى الشكل المقابل :

إذا كان ميل المستقيم ل يساوى ٣

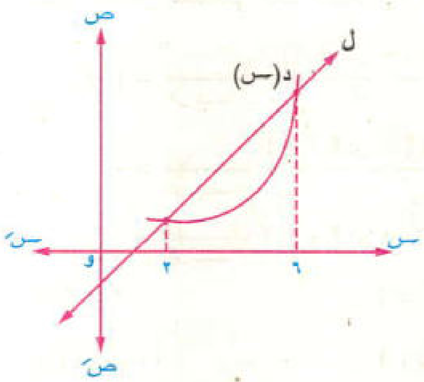
فإن : د (٦) − د (٢) = ...

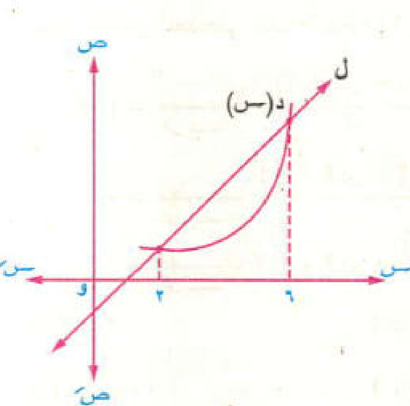
(أ) ٤

(ب) ٧

(جـ) ١٢

(د) ٢٤





⑤ الشكل المقابل يمثل منحنى

الدالة د : ح ← ح حيث ص = د (س)

، حـ ء قاطعًا للمنحنى فى حـ ، ء

فإن متوسط التغير للدالة د

عندما تتغير س من $س_١$ إلى $س_٢$ = ...

(أ) $\frac{٣}{٥}$ (ب) $\frac{٤}{٣}$

(جـ) $\frac{٣}{٤}$ (د) $\frac{٤}{٥}$

⑥ عندما تتغير س من $س_١$ إلى $س_٢$ فأى من الدوال الآتية يكون متوسط تغيرها أكبر ؟

(أ) د (س) = ٤ س + ١٠ (ب) د (س) = ٦ س − ٣

(جـ) د (س) = $\frac{١}{٢}$ س + ٢ (د) د (س) = ٢ س − ١

⑦ إذا كانت د دالة حيث د (٢ + هـ) = د (٢) + هـ فإن : دَ (٢) = ...

(أ) صفر (ب) ١ (جـ) ٢ (د) غير معرفة.

ثانيًا الأسئلة المقالية

١ أوجد باستخدام التعريف مشتقة الدالة د حيث : د (س) = $س^٢$ − ٥ عند س = ٣

وبين المعنى الهندسى لمشتقة الدالة عند س = ٣

---

٢ باستخدام تعريف المشتقة أوجد دَ (س) لكل من الدوال الآتية :

① د (س) = ٨
② 📖 د (س) = ٥ س + ٢
③ 📖 د (س) = ٣ $س^٢$
④ 📖 د (س) = $س^٢$ + ٥
⑤ 📖 د (س) = $س^٢$ + ٢ س
⑥ د (س) = ٩ س + $س^٢$
⑦ د (س) = ٢ $س^٢$ + ٥ س
⑧ د (س) = − $س^٣$ + ٣ س − ٨
⑨ 📖 د (س) = $س^٣$ − ١
⑩ د (س) = ٥ + $س^٣$
⑪ 📖 د (س) = أ س + ب حيث أ ، ب عددان حقيقيان.

---

٣ أوجد المشتقة الأولى للدالة د فى كل مما يأتى ثم عين قيم س التى تكون عندها الدالة غير قابلة للاشتقاق :

① 📖 د (س) = $\frac{١}{س}$
② د (س) = $\frac{٧}{س}$ − ٢
③ 📖 د (س) = $\frac{١}{س + ٣}$
④ 📖 د (س) = $\frac{٣}{٢ س − ٥}$
⑤ د (س) = $\frac{س}{س + ٥}$
⑥ د (س) = س + $\frac{١}{س}$

٤ باستخدام تعريف المشتقة أوجد دَ (س) لكل من الدوال الآتية :

① د (س) = $\sqrt{س - ٤}$ ② د (س) = $\sqrt{س + ٥}$ ③ د (س) = ٥ − ٤ $\sqrt{س}$

④ د (س) = ٦ $\sqrt{س + ٣}$ ⑤ د (س) = $\sqrt{٣ س + ١}$

---

٥ أوجد مشتقة الدالة د مستخدمًا تعريف المشتقة ثم أوجد ميل المماس لمنحنى الدالة د عند النقطة المبينة :

① د (س) = $س^٢$ − س + ١ عند النقطة (−٢ ، ٧) «−٥»

② د (س) = ٣ $س^٢$ + ٤ س + ٧ عند النقطة (−١ ، ٦) «−٢»

---

٦ باستخدام تعريف المشتقة أوجد ميل المماس لكل من منحنيات الدوال الآتية عند النقطة المبينة ثم أوجد قياس الزاوية الموجبة التي يصنعها المماس مع الاتجاه الموجب لمحور السينات عند نفس النقطة لأقرب دقيقة :

① د (س) = ٣ $س^٢$ − ٥ عند النقطة (٢ ، ٧) «١٢ ، ٢٤َ ٨٥°»

② د (س) = ٢ $س^٢$ + ٣ س − ٤ عند النقطة (١ ، ١) «٧ ، ٥٢َ ٨١°»

③ د (س) = ١ − ٥ س − ٣ $س^٢$ عند النقطة (−١ ، ٣) «١ ، ٤٥°»

④ د (س) = $س^٣$ − ٤ عند النقطة (١ ، −٣) «٣ ، ٣٤َ ٧١°»

---

٧ أثبت أن الدالة د : د (س) = $س^٢$ − س + ١ قابلة للاشتقاق عند س = ١

---

٨ إذا كانت : د (س) = أ $س^٢$ + ب حيث أ ، ب ثابتان أوجد :

① المشتقة الأولى للدالة د عند أي نقطة (س ، ص)

② قيمتي أ ، ب إذا كان ميل المماس لمنحنى الدالة عند النقطة (٢ ، −٣) الواقعة عليه يساوي ١٢ «٣ ، −١٥»



الدرس

3

قواعد الاشتقاق

إن استخدام التعريف السابق دراسته لإيجاد مشتقة دالة قد يستغرق وقتًا وجهدًا ولتسهيل ذلك إليك بعض القواعد التى توفر لك أسلوبًا سهلاً للحصول على المشتقة.

١ مشتقة الدالة الثابتة

إذا كانت : د (س) = أ حيث أ ثابت   فإن : دَ (س) = صفر

فمثلًا : - إذا كانت : د (س) = ٤   فإن : دَ (س) = صفر

- إذا كانت : د (س) = ٢٥ $\sqrt{7}$ فإن : دَ (س) = صفر

٢ مشتقة الدالة د : د (س) = $س^ن$

إذا كانت : د (س) = $س^ن$ حيث ن ∈ ع   فإن : دَ (س) = ن $س^{ن-1}$

فمثلًا : - إذا كانت : د (س) = $س^4$ فإن : دَ (س) = ٤ $س^3$

- إذا كانت : د (س) = $س^{-\frac{5}{2}}$ فإن : دَ (س) = $-\frac{5}{2}$ $س^{-\frac{7}{2}}$

إذا كانت : د (س) = أ $س^ن$ حيث أ ثابت ، ن ∈ ع   فإن : دَ (س) = أ ن $س^{ن-1}$

فمثلًا : - إذا كانت : د (س) = ٢ $س^5$

فإن : دَ (س) = ١٠ $س^4$

- إذا كانت : ص = ٦ $\sqrt{س}$ = ٦ $س^{\frac{1}{2}}$

فإن : صَ = ٣ $س^{-\frac{1}{2}}$ = $\frac{3}{\sqrt{س}}$

- إذا كانت : ص = $\sqrt[3]{س^2}$ = $س^{\frac{2}{3}}$

فإن : صَ = $\frac{2}{3}$ $س^{-\frac{1}{3}}$

لاحظ أنه :

* إذا كانت : ص = س   فإن : $\frac{ءص}{ءس} = 1$
* إذا كانت : ص = $\sqrt{س}$ فإن : $\frac{ءص}{ءس} = \frac{1}{2\sqrt{س}}$
* إذا كانت : ص = $\frac{1}{س}$ فإن : $\frac{ءص}{ءس} = \frac{-1}{س^2}$

٣ مشتقة مجموع دالتين أو الفرق بينهما

إذا كانت : د ، ر دالتين قابلتين للاشتقاق بالنسبة للمتغير س

وكانت : ص = د (س) ± ر (س) فإن : $\frac{دص}{دس}$ = دَ (س) ± رَ (س)

وبصفة عامة : إذا كانت $د_١$ ، $د_٢$ ، ...... ، $د_ن$ دوال قابلة للاشتقاق بالنسبة للمتغير س

وكانت ص = $د_١$ (س) ± $د_٢$ (س) ± ...... ± $د_ن$ (س) فإن : $\frac{دص}{دس}$ = $دَ_١$ (س) ± $دَ_٢$ (س) ± ...... ± $دَ_ن$ (س)

فمثلًا : – إذا كانت : د (س) = ٥ $س^٢$ + ٢ س + ٧ فإن : دَ (س) = ١٠ س + ٢

– إذا كانت : ص = $\frac{١}{٢}$ $س^٦$ – ٤ $س^{\frac{٧}{٢}}$ فإن : صَ = ٣ $س^٥$ – ١٤ $س^{\frac{٥}{٢}}$

مثال ١

أوجد المشتقة الأولى لكل مما يأتى :

١ ص = ٢ $س^٥$ + ٣ $س^٣$ – ٤ س + ٦

٢ د (س) = (س – ٣) (٢ س – ١)

٣ د (س) = ٢ س $\sqrt{س}$ + ٤ $\sqrt{س}$ – ١

٤ د (س) = $\frac{س^٣ + ٥ س^٢ + س + ٤}{س^٢}$ حيث س ≠ ٠

الحل

١ صَ = ١٠ $س^٤$ + ٩ $س^٢$ – ٤

٢ ∵ د (س) = ٢ $س^٢$ – ٧ س + ٣ ∴ دَ (س) = ٤ س – ٧

٣ ∵ د (س) = ٢ $س^{\frac{٣}{٢}}$ + ٤ $س^{\frac{١}{٢}}$ – ١

∴ دَ (س) = ٢ × $\frac{٣}{٢}$ $س^{\frac{١}{٢}}$ + ٤ × $\frac{١}{٢}$ $س^{-\frac{١}{٢}}$ = ٣ $\sqrt{س}$ + $\frac{٢}{\sqrt{س}}$

٤ ∵ د (س) = $\frac{س^٣}{س^٢}$ + $\frac{٥ س^٢}{س^٢}$ + $\frac{س}{س^٢}$ + $\frac{٤}{س^٢}$ = ١ + ٥ $س^{-١}$ + $س^{-٢}$ + ٤ $س^{-٣}$

∴ دَ (س) = صفر – ٥ $س^{-٢}$ – ٢ $س^{-٣}$ – ١٢ $س^{-٤}$ = – $\frac{٥}{س^٢}$ – $\frac{٢}{س^٣}$ – $\frac{١٢}{س^٤}$

مثال ٢

إذا كانت : د (س) = $س^٣$ + ٦ $س^٢$ – ٣٦ س + ٤ **فأوجد :**

١ دَ (١) ، دَ (٠)

٢ قيم س التى تجعل دَ (س) = ٠

الحل

∵ دَ (س) = ٣ $س^٢$ + ١٢ س – ٣٦

١ دَ (١) = ٣ × ١ + ١٢ × ١ – ٣٦ = –٢١ ، دَ (٠) = –٣٦

٢ بوضع دَ (س) = ٠ ∴ ٣ $س^٢$ + ١٢ س – ٣٦ = ٠ ∴ $س^٢$ + ٤ س – ١٢ = ٠

∴ (س + ٦) (س – ٢) = ٠ ∴ س = –٦ أ ، س = ٢

٤ مشتقة حاصل ضرب دالتين

إذا كانت د ، ر دالتين قابلتين للاشتقاق بالنسبة للمتغير س وكانت ص = د (س) × ر (س)

فإن : $\frac{ء ص}{ء س}$ = د (س) × رَ (س) + ر (س) × دَ (س)

أى أن : المشتقة الأولى لحاصل ضرب دالتين قابلتين للاشتقاق = الأولى × مشتقة الثانية + الثانية × مشتقة الأولى

مثال ٣

أوجد المشتقة الأولى لكل مما يأتى :

١ ص = (س^{٢} + ٣) (٢ س^{٣} − ٥)

٢ ص = (س + $\frac{١}{س}$) (س^{٣} − ٢)

الحـــل

١ $\frac{ء ص}{ء س}$ = ٦ س^{٢} (س^{٢} + ٣) + ٢ س (٢ س^{٣} − ٥) = ٦ س^{٤} + ١٨ س^{٢} + ٤ س^{٤} − ١٠ س

= ١٠ س^{٤} + ١٨ س^{٢} − ١٠ س

٢ ∵ ص = (س + س$^{-١}$) (س^{٣} − ٢)

∴ $\frac{ء ص}{ء س}$ = ٣ س^{٢} (س + س$^{-١}$) + (١ − س$^{-٢}$) (س^{٣} − ٢)

ملاحظــة

يمكن الاكتفاء بهذه النتيجة وعدم فك الأقواس أما إذا كان المطلوب وضع الناتج فى أبسط صورة فيجب إكمال الحل بفك الأقواس وجمع الحدود الجبرية المتشابهة.

٥ مشتقة خارج قسمة دالتين

إذا كانت : د ، ر دالتين قابلتين للاشتقاق بالنسبة للمتغير س وكانت : ص = $\frac{د (س)}{ر (س)}$ حيث ر (س) ≠ ٠

فإن : $\frac{ء ص}{ء س}$ = $\frac{ر (س) × دَ (س) − د (س) × رَ (س)}{(ر (س))^{٢}}$

أى أن : المشتقة الأولى لخارج قسمة دالتين قابلتين للاشتقاق = $\frac{\text{المقام × مشتقة البسط − البسط × مشتقة المقام}}{(\text{المقام})^{٢}}$

مثال ٤

أوجد المشتقة الأولى لكل مما يأتي :

١ ص = $\frac{٣ س - ٤}{٢ س + ٥}$ ٢ ص = $\frac{٣ س^٢ + ١}{س^٢ - ٤}$

الحــل

١ صَ = $\frac{٣ (٢ س + ٥) - ٢ (٣ س - ٤)}{(٢ س + ٥)^٢} = \frac{٢٣}{(٢ س + ٥)^٢}$

٢ صَ = $\frac{٦ س (س^٢ - ٤) - ٢ س (٣ س^٢ + ١)}{(س^٢ - ٤)^٢} = \frac{- ٢٦ س}{(س^٢ - ٤)^٢}$

مثال ٥

إذا كانت : د (س) = $\frac{س^٣ - ٢}{س^٣ + ٢}$ **فأوجد :** دَ (٢)

الحــل

دَ (س) = $\frac{(س^٣ + ٢) (٣ س^٢) - (س^٣ - ٢) (٣ س^٢)}{(س^٣ + ٢)^٢} = \frac{٣ س^٥ + ٦ س^٢ - ٣ س^٥ + ٦ س^٢}{(س^٣ + ٢)^٢} = \frac{١٢ س^٢}{(س^٣ + ٢)^٢}$

∴ دَ (٢) = $\frac{١٢ \times ٤}{(٨ + ٢)^٢} = \frac{٤٨}{١٠٠} = \frac{١٢}{٢٥}$

تمارين 10 على قواعد الاشتقاق

اختبر نفسك

من أسئلة الكتاب المدرسى • فهم • تطبيق • مستويات عليا

أولًا أسئلة الاختيار من متعدد

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

① إذا كانت : د (س) = $\frac{1}{س}$ فإن : دَ (١) = ...

(أ) ١ (ب) صفر (جـ) −١ (د) ٢

② $\frac{ء}{ءس}$ ((س − ١) (س + ٣)) = ...

(أ) ٢ س (ب) ٢ س + ١ (جـ) ٢ س − ٣ (د) ٢ س + ٢

③ إذا كانت : د (س) = $\frac{1}{3}$ س^{21} − $\frac{1}{2}$ س^{10} + س^{6} فإن : دَ (١) = ...

(أ) ٦ (ب) ٨ (جـ) ١٦ (د) ١٨

④ إذا كانت : د (س) = (٤ س^{2} − ١) (١ + ٤ س^{2}) فإن : دَ $\left(-\frac{1}{2}\right)$ = ...

(أ) صفر (ب) −١ (جـ) −٨ (د) −٦٤

⑤ إذا كانت الدالة د : د (س) = $\frac{س - 2}{س + 2}$ فإن : دَ (٢) = ...

(أ) −٤ (ب) −$\frac{1}{4}$ (جـ) ٤ (د) $\frac{1}{4}$

⑥ إذا كانت : دَ (٢) = ٥ ، د (س) = س^{2} + م س + ٥ فإن : م = ...

(أ) ٥ (ب) ٢ (جـ) ١٠ (د) ١

⑦ إذا كانت : د (س) = س^{5} فإن : $\lim_{هـ \to 0}$ $\frac{د (س + هـ) - د (س)}{هـ}$ = ...

(أ) ٥ (ب) ٥ س^{4} (جـ) س^{5} (د) غير موجودة.

⑧ إذا كانت : ص = $\frac{1}{\sqrt{س}}$ فإن : $\frac{ءص}{ءس}$ = ...

(أ) $\frac{-1}{2\sqrt{س}}$ (ب) $\frac{-1}{2 س}$ (جـ) $\frac{-1}{2 س \sqrt{س}}$ (د) $\frac{1}{2\sqrt{س}}$

⑨ إذا كانت : د (س) = أ^{2} حيث أ ثابت فإن : دَ (س) = ...

(أ) صفر (ب) ٢ أ (جـ) ٢ (د) أ^{2}

⑩ إذا كانت : ص = ٣ $\sqrt[4]{س}$ فإن : $\frac{ءص}{ءس}$ = ...

(أ) ١٢ س^{3} (ب) ١٢ $\sqrt[3]{س}$ (جـ) $\frac{3}{4\sqrt[3]{س^{4}}}$ (د) $\frac{3}{4\sqrt[4]{س^{3}}}$

⑪ إذا كانت : ص = $\frac{2}{س}$ + $\frac{س}{2}$ + ٢ فإن : $\frac{ءص}{ءس}$ = ...

(أ) $\frac{2}{س^{2}}$ + $\frac{1}{2}$ (ب) $\frac{1}{2}$ (جـ) $\frac{س^{2} - 4}{2 س^{2}}$ (د) $\frac{س^{2} - 2}{2 س^{2}}$

(١٢) إذا كانت : ص = $\frac{س^٢ + ٦}{س^٣ + ٥}$ فإن : صَ عندما س = ١ تساوى ....

(أ) $-\frac{١}{٤}$ (ب) $\frac{٦}{٥}$ (جـ) $\frac{٧}{٦}$ (د) $\frac{١١}{١٢}$

(١٣) $\frac{ء}{ءس}$ (د (س) . ر (س)) = ...

(أ) دَ (س) . رَ (س) (ب) د (س) . رَ (س)

(جـ) دَ (س) . ر (س) (د) د (س) . رَ (س) + دَ (س) . ر (س)

(١٤) إذا كانت : ص = (س + ٤) (س^٢ + ٥ س + ٧) فإن : صَ = ...

(أ) ٢ س^٢ + ١٣ س + ٢٠ (ب) س^٢ + ١٨ س + ٢٠

(جـ) س^٣ + ١٨ س^٢ + ٢٧ س + ٢٨ (د) ٣ س^٢ + ١٨ س + ٢٧

(١٥) إذا كان : س ص = ٨١ فإن : $\frac{ءص}{ءس}$ = ... عند س = ٩

(أ) -٩ (ب) -١ (جـ) ١ (د) ٩

(١٦) إذا كانت : د (س) = س^ن + س^-ن فإن : دَ (١) = ...

(أ) ن (ب) ن + $\frac{١}{ن}$ (جـ) ن - $\frac{١}{ن}$ (د) صفر

(١٧) إذا كانت ن ∈ ص+ وكانت : د (س) = ن س^ن ، دَ (١) = ٩ فإن : ن = ...

(أ) ٢ (ب) ٣ (جـ) ٤ (د) ٥

(١٨) $\frac{ء}{ءس}$ (٥ π^٢) = ...

(أ) ٥ (ب) ١٠ π (جـ) صفر (د) ٥ π^٢

(١٩) إذا كانت : د (س) = س + $\frac{٩}{س}$ فإن : دَ (س) = صفر عندما س = ...

(أ) ٣ (ب) -٣ (جـ) ± ٣ (د) ± ٩

(٢٠) إذا كان : د (س) = ٤ س^٢ + ر (س) وكان : دَ (٣) = ٧ فإن : رَ (٣) = ...

(أ) ٢٤ (ب) ٣١ (جـ) -١٧ (د) -٢٤

(٢١) إذا كان : د (س) = ٥ ر (س) + ٢٠ فإن : رَ (س) = ...

(أ) دَ (س) (ب) دَ (س) - ٢٠ (جـ) ٥ دَ (س) (د) $\frac{١}{٥}$ دَ (س)

(٢٢) إذا كانت : د (س) = (س + ا) (س^٢ - ا) وكانت : دَ (-١) = ٤ فإن : ا = ...

(أ) $\frac{١}{٣}$ (ب) $-\frac{١}{٣}$ (جـ) $\frac{٢}{٣}$ (د) $-\frac{٢}{٣}$

(٢٣) إذا كان : د (س) = م س^٢ + ن س + ل فإن : دَ (١) + دَ (٤) - دَ (٥) = ...

(أ) م (ب) - م (جـ) ن (د) - ن

(٢٤) إذا كان : د (س) = ا س^٢ ، ر (س) = $\frac{س^٣}{ب}$ وكان دَ (-٣) = رَ (٢) فإن : ا ب = ...

(أ) -٦ (ب) -٢ (جـ) ٢ (د) ١٢

(٢٥) إذا كانت : د (س) = ٢ أ $س^٣$ ، دَ (−٣) = ١٠٨ فإن : دَ (١) = ...

(أ) ٢ (ب) ٦ (جـ) ١٢ (د) ٢٤

(٢٦) إذا كانت ص = $\frac{س^٢ + ٢ س + ٤}{س^٢ - ٢ س + ٤}$ وكانت : $\frac{ءص}{ءس}$ = صفر فإن : س = ...

(أ) ± ٢ (ب) ± ٤ (جـ) ٢ أ، ٣ (د) −٢ أ، −٣

(٢٧) إذا كان : د (س) = $س^٣$ − أ س + ١ ، ر (س) = أ $س^٢$ + ب س + ٣

وكان : ٢ دَ (١) + رَ (١) = ٢ فإن : ب = ...

(أ) −٤ (ب) −٣ (جـ) ٣ (د) ٤

(٢٨) إذا كان : د (س) = $س^٢$ + أ س + ب وكان : دَ (٥) = ٢ دَ $\left(\frac{٧}{٢}\right)$ فإن : أ = ...

(أ) −٤ (ب) −٣ (جـ) ٢ (د) ٣

(٢٩) إذا كان (د ☐ ر)َ = دَ ☐ رَ فإن أى العمليات الآتية يمكن وضعها فى المربع حتى تكون الجملة صحيحة لكل الدوال د ، ر القابلة للاشتقاق ؟

(أ) (+) فقط. (ب) (+) ، (−) فقط.

(جـ) (+) ، (−) ، (×) ، (÷) (د) (×) فقط.

(٣٠) إذا كانت : $\frac{ء}{ءس}$ [$(أ س)^٣$] = ٢٤ عندما س = ١ فإن قيمة أ تساوى ....

(أ) ٨ (ب) ٢ (جـ) ١ (د) ٢٤

(٣١) إذا كانت : د (س) = $س^٣$ − ٣ $س^٢$ − ٥ س + ٦ فإن : $\underset{هـ \leftarrow ٠}{نهـا} \frac{د (١ + ٢ هـ) - د (١)}{هـ}$ = ...

(أ) −٨ (ب) ٨ (جـ) ١٦ (د) −١٦

(٣٢) إذا كانت : د (س) = $س^٢$ − س + ٤ وكان : دَ (ك) = دَ (٢) + د (٢) فإن : ك = ...

(أ) ٧ (ب) ٥ (جـ) ٣ (د) ١

(٣٣) إذا كانت د : د (س) دالة زوجية وقابلة للاشتقاق لجميع قيم س ∈ ح

فإن : دَ (أ) + دَ (−أ) = ...

(أ) صفر (ب) ٢ دَ (أ) (جـ) ٢ دَ (−أ) (د) −٢ دَ (أ)

(٣٤) إذا كانت : د (س) = ٣ $س^٢$ − ٥ س + ١ وكانت : د (أ) = دَ (أ) فإن : أ = ...

(أ) ٣ أ، $\frac{٢}{٣}$ (ب) $\frac{٢}{٣}$ أ، $\frac{١}{٣}$ (جـ) ١ أ، ٣ (د) ٢ أ، ٣

(٣٥) إذا كانت : ص = $(أ س + ٢)^٢$ وكان $\frac{ءص}{ءس}$ = ٦ عندما س = ١ فإن : أ = ...

(أ) ١ أ، ٦ (ب) ١ أ، −٣ (جـ) −٣ أ، ٢ (د) ٢ أ، ٦

(٣٦) إذا كانت الدالة د : د (س) = أ $س^{٢}$ − ب س + ١ ، وكان دَ (٢) = ٢ ومتوسط التغير للدالة د عندما تتغير س من ١ إلى ١,٢ يساوى ٥,٦ فإن : أ + ب = ...

(أ) −١٠ (ب) −٢ (جـ) ١٢ (د) −١٢

(٣٧) أى مما يأتى لا يكافىء المشتقة الأولى للدالة د (س) = $\sqrt{س}$ ؟

(أ) $\frac{١}{٢\sqrt{س}}$ (ب) $\frac{\sqrt{س}}{٢ س}$ (جـ) $\frac{س}{٢\sqrt{س}}$ (د) $\frac{١}{٢}$ $س^{-\frac{١}{٢}}$

(٣٨) إذا كان : دَ (س) × ر (س) + رَ (س) × د (س) = س + $\frac{١}{س}$

فإن : $\frac{ء}{ءس}$ [د (س) × ر (س)] = ... عند س = ٢

(أ) $\frac{٣}{٤}$ (ب) ١ (جـ) $\frac{٥}{٢}$ (د) ٣

(٣٩) إذا كان : د (س) = (٢ س + ١) × هـ (س) وكان : د (٢) = ١٥ ، هـَ (٢) = ٤

فإن : دَ (٢) = ...

(أ) ٢٦ (ب) ٢٨ (جـ) ٣٠ (د) ٣٢

(٤٠) متوازى مستطيلات قاعدته مربعة طول ضلعه س سم وارتفاعه ص سم وحجمه ٨٠ $سم^{٣}$

فإن : $\frac{ءص}{ءس}$ = ... عندما س = ٤

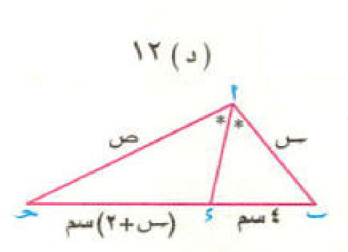
(أ) ٤ (ب) $\frac{-٥}{٤}$ (جـ) $\frac{-٥}{٢}$ (د) $\frac{-٢}{٥}$

(٤١) فى الشكل المقابل :

إذا كان : $\overleftrightarrow{أجـ}$ يقطع الدائرة فى ب ، جـ

، $\overleftrightarrow{أهـ}$ يقطع الدائرة فى ء ، هـ

فإن : $\frac{ءص}{ءس}$ = ... عندما س = ٣ سم



(أ) ٣ (ب) ٦ (جـ) ٨ (د) ١٢

(٤٢) فى الشكل المقابل :

إذا كانت : $\overleftrightarrow{أء}$ ينصف ∠ ب أ جـ

فإن : $\frac{ءص}{ءس}$ = ... عندما س = ٢

أ
ص
س
جـ
(س+٢)سم
ء
٤ سم
ب

(أ) $\frac{١}{٢}$ (ب) ١ (جـ) ١$\frac{١}{٢}$ (د) ٢

ثانيًا الأسئلة المقالية

١ أوجد المشتقة الأولى لكل مما يأتى :

(١) ص = ٧	(٢) ص = ٥ س	(٣) ص = $س^{٤}$
(٤) ص = ٣ $س^{٦}$	(٥) ص = $\frac{٤}{٣}$ π $س^{٢}$	(٦) ص = $\frac{٣}{٤}$ $س^{-٨}$
(٧) ص = $س^{\frac{٣}{٢}}$	(٨) ص = $س^{\frac{-٥}{٣}}$	(٩) ص = $\frac{-٤}{س^{٥}}$

٢ أوجد المشتقة الأولى لكل مما يأتى :

① $\text{ص} = ٤\sqrt{\text{س}}$ ② $\text{ص} = -٤\sqrt[٣]{\text{س}}$ ③ $\text{ص} = \sqrt[٣]{\text{س}^{٥}}$

④ $\text{ص} = \sqrt{\text{س}^{٩}}$ ⑤ $\text{ص} = \frac{\text{س}^{٢}}{\sqrt{\text{س}}}$ ⑥ $\text{ص} = \frac{٢}{\sqrt{\text{س}}}$

---

٣ أوجد المشتقة الأولى لكل مما يأتى :

① $\text{د}(\text{س}) = ٤\text{س} + ٣$

② $\text{د}(\text{س}) = ٣\text{س}^{٢} - ٤\text{س} + ٥$

③ $\text{ص} = \text{س}^{٣} + ٣\text{س}^{٢} - ٥$

④ $\text{ص} = ٣\text{س}^{٨} - ٢\text{س}^{٥} + ٦\text{س} + ١$

⑤ $\text{ص} = ٨ - \frac{٢}{٣}\text{س}^{٣} + \frac{١}{٥}\text{س}^{٥}$

⑥ $\text{ص} = ٢\text{س}^{٦} + \text{س}^{-٩}$

⑦ $\text{ص} = ٣\text{س}^{-٤} + ٦\text{س}^{\frac{٢}{٣}}$

⑧ $\text{ص} = \text{س}^{٧} + \frac{١}{\text{س}^{٧}}$

⑨ $\text{ص} = ٧\text{س}^{٤} - \frac{١}{٤\text{س}}$

⑩ $\text{ص} = \text{س}^{٤} - ٣\text{س}^{٢} + ٥ - \frac{٢}{\text{س}^{٢}} - \frac{٣}{\text{س}^{٤}}$

⑪ $\text{د}(\text{س}) = \frac{١}{٢}\text{س}^{١٤} - \frac{١}{٤}\text{س}^{٢٠} + \frac{١}{٦}\text{س}^{٣٦}$

⑫ $\text{ص} = \text{س}(٣\text{س}^{٢} - ٢\text{س}) + ١٢\text{س}$

⑬ $\text{ص} = \frac{٥\text{س}^{٥} - ٢\text{س}^{٣} + ١٠\text{س}^{٢} - ٢٠}{١٠\text{س}^{٢}}$

⑭ $\text{ص} = \frac{٢}{\text{س}^{٢}}(\text{س}^{٤} - ٤\text{س}^{٢} + \text{س} - ٣)$

⑮ $\text{ص} = (٤\text{س}^{٢} + ١)(١ - ٤\text{س}^{٢})$

⑯ $\text{ص} = \frac{(\text{س} - ٢)(\text{س} + ٢)(\text{س}^{٢} + ٤)}{\text{س}^{٢}}$

⑰ $\text{ص} = (\text{س} - ١)(\text{س} + ١)(\text{س}^{٢} + ١)(\text{س}^{٤} + ١)(\text{س}^{٨} + ١)(\text{س}^{١٦} + ١)$

---

٤ أوجد المشتقة الأولى لكل مما يأتى :

① $\text{ص} = ٢\text{س}^{٦} + ٣\sqrt{\text{س}}$

② $\text{ص} = (\sqrt{\text{س}} - ١)(\sqrt{\text{س}} + ١)$

③ $\text{ص} = \sqrt{\text{س}}(\sqrt{\text{س}} + ٤)$

④ $\text{ص} = \sqrt{\text{س}} + \frac{١}{\sqrt{\text{س}}}$

⑤ $\text{ص} = \text{س}(٣\text{س}^{٢} - \sqrt{\text{س}})$

⑥ $\text{ص} = \frac{\sqrt{\text{س}} - ٢\text{س}}{\sqrt{\text{س}}}$

⑦ $\text{ص} = \frac{٤\text{س}^{٢} - ٣\text{س} + ٢\sqrt{\text{س}}}{\text{س}}$

⑧ $\text{ص} = \frac{٥}{\text{س}} + \text{س}\sqrt{\text{س}} + \sqrt{٣}\,\text{س} - ٤$

⑨ $\text{ص} = \sqrt{\text{س}}\left(\text{س}\sqrt{\text{س}} - \frac{\text{س}}{\sqrt{\text{س}}} - ٣\right)$

---

٥ أوجد المشتقة الأولى لكل مما يأتى :

① $\text{ص} = (\text{س} - ٥)(٤\text{س} - ٧)$

② $\text{ص} = (\text{س}^{٢} + ١)(٢\text{س} + ٥)$

③ $\text{ص} = (\text{س}^{٢} + ٣)(\text{س}^{٣} - ٣\text{س} + ١)$

④ $\text{د}(\text{س}) = (\text{س} + ٤)(\text{س}^{٢} + ٥\text{س} + ٧)$

⑤ $ص = (٤ س^{٢} - ١)(٧ س^{٣} + س)$ عند $س = ١$ «١٣٠»

⑥ $ص = (س^{٢} + ١)(س^{٣} + ٣)$ عند $س = -١$ «٢»

⑦ $د(س) = (٤ س^{٢} - ٣ س + ٧)(س^{٢} + ٢ س + ٣)$ عند النقطة (٠ ، ٢١) «٥»

⑧ $د(س) = س(٣ س - ٤)(س^{٢} - ٢)$ عند $س = ٠$ «٨»

⑨ $ص = (س^{٣} + ٥)(س\sqrt{س} - ٣)(س\sqrt{س} + ٣)$ ثم أوجد : $دَ(١)$ «−٦»

---

٦ أوجد المشتقة الأولى لكل مما يأتى :

① $ص = \frac{٥}{٢ س + ٣}$

② $د(س) = \frac{س}{٢ س + ١}$

③ $ص = \frac{٢ س + ٥}{١ - ٤ س}$

④ $ص = \frac{٥ س - ٧}{٣ س - ١١}$

⑤ $ص = \frac{س^{٢} - ٢}{٣ س + ١}$

⑥ $ص = \frac{س^{٢} - ٥}{س^{٢} + ١}$

⑦ $د(س) = \frac{س^{٢} - ١}{س^{٢} + ١}$

⑧ $ص = \frac{س^{٢} - ٦ س + ٧}{س - ٢}$

⑨ $د(س) = ١ - \frac{١}{س - ١}$ ثم أوجد : $دَ(٣)$ «$\frac{١}{٤}$»

⑩ $د(س) = \frac{س}{س + ٢} - \frac{س - ١}{س - ٢}$ ثم أوجد : $دَ(٠)$ «$\frac{٣}{٤}$»

---

٧ إذا كانت : $ص = \frac{س^{٢} - ١}{س^{٢}}$ أثبت أن : $س^{٤} \left(\frac{ءص}{ءس}\right) = ٣$

---

٨ إذا كانت : $ص = \frac{٣}{س - ١}$ أثبت أن : $\frac{ءص}{ءس} = -\frac{١}{٣} ص^{٢}$

---

٩ إذا كانت : $د(س) = أ س^{٣} + ب س$ وكانت : $د(١) = ٢$ ، $دَ(١) =$ صفر

فما قيمة كل من : أ ، ب ؟ «−١ ، ٣»

---

١٠ أوجد قيم س التى تجعل $دَ(س) = ٧$ حيث $د(س) = س^{٣} - ٥ س + ٢$ «±٢»

---

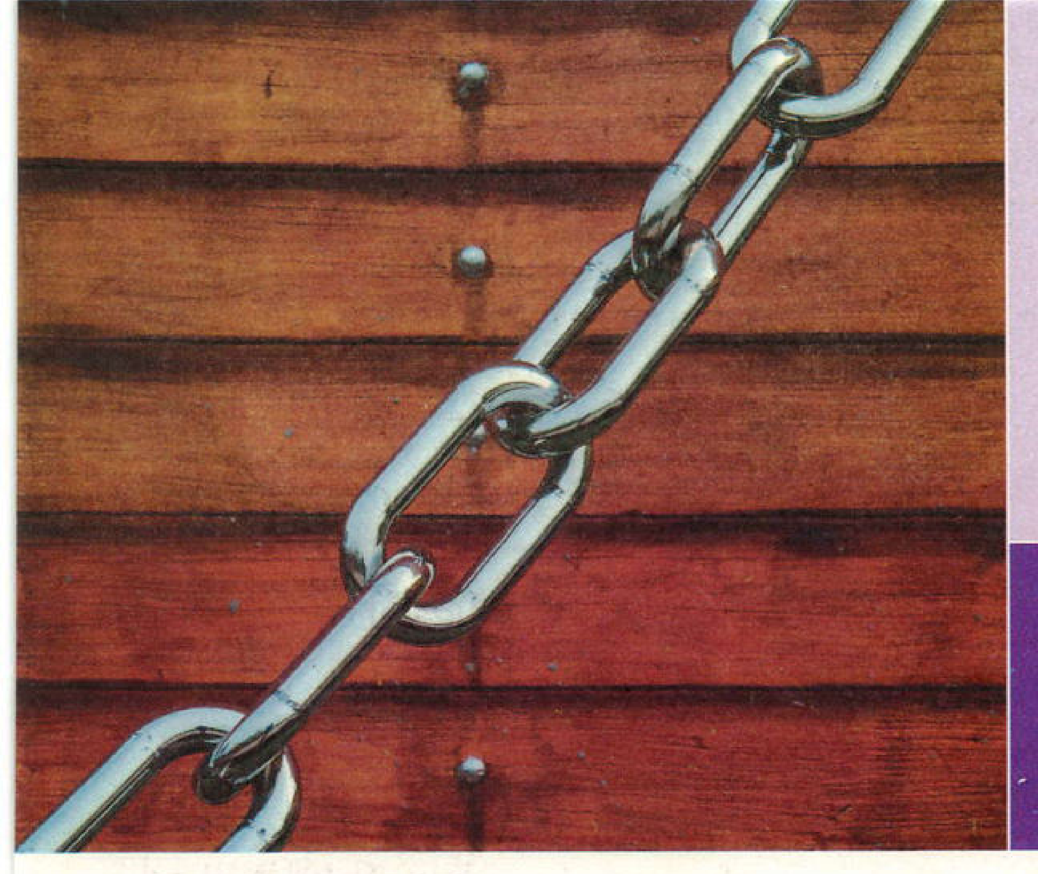
١١ إذا كانت : $د(س) = \frac{١}{٣} س^{٣} - ٢ س^{٢} + ٥ س - ٤$ أوجد قيم س التى تجعل $دَ(س) = ٢$ «١ ، ٣»

---

١٢ أوجد قيمة الثابت أ إذا كانت : $د(س) = \frac{س + أ}{س - أ}$ ، $دَ(٢) = -٢$ «٤ ، ١»

---

١٣ إذا كان : $ص = أ س^{٣} + ب س^{٢}$ ، $\frac{ءص}{ءس} = ٨$ عندما $س = ١$ ، وكان متوسط تغير ص عندما تتغير س من −١ إلى ٢ يساوى ٧ أوجد قيمتى الثابتين : أ ، ب «٢ ، ١»



الدرس

4

مشتقة دالة الدالة (قاعدة السلسلة)

إذا كانت ص دالة فى ع ولتكن ص = د (ع) ، وكانت ع دالة فى س ولتكن ع = ر (س) فإن : الدالة ص تسمى دالة الدالة فى س وتكتب : ص = د (ر (س)) **ولإيجاد مشتقة دالة الدالة نتبع النظرية الآتية :**

نظرية «قاعدة السلسلة»

إذا كانت : ص = د (ع) دالة قابلة للاشتقاق بالنسبة إلى ع ، ع = ر (س) دالة قابلة للاشتقاق بالنسبة إلى س

فإن : $\frac{دص}{دس} = \frac{دص}{دع} \times \frac{دع}{دس}$ ويكون ص = د [ر (س)] قابلة للاشتقاق بالنسبة إلى س

مثال ١

أوجد $\frac{دص}{دس}$ فى كل مما يأتى :

١ ص = ع^{٨} + ١ ، ع = ٢ س − ٣

٢ ص = ع^{٣} − ٧ ، ع = س^{٢} + ٣ س − ٣ **ثم أوجد :** $\left[\frac{دص}{دس}\right]_{س = ١}$

الحل

١ $\frac{دص}{دع}$ = ٨ ع^{٧} ، $\frac{دع}{دس}$ = ٢

∴ $\frac{دص}{دس} = \frac{دص}{دع} \times \frac{دع}{دس}$ = ٨ ع^{٧} × ٢ = ١٦ ع^{٧} = ١٦ (٢ س − ٣)^{٧}

٢ $\frac{ءص}{ءع} = ٣ ع^٢$ ، $\frac{ءع}{ءس} = ٢ س + ٣$

$\therefore \frac{ءص}{ءس} = \frac{ءص}{ءع} \times \frac{ءع}{ءس} = ٣ ع^٢ \times (٢ س + ٣) = ٣ (٢ س + ٣) (س^٢ + ٣ س - ٣)^٢$

$\therefore \left[\frac{ءص}{ءس}\right]_{س = ١} = ٣ \times ٥ \times ١ = ١٥$

مشتقة الدالة $[د (س)]^ن$

إذا كانت : ص = $[د (س)]^ن$ حيث د قابلة للاشتقاق بالنسبة إلى س ، ن عدد حقيقى

فإن : $\frac{ءص}{ءس} = ن [د (س)]^{ن - ١} \times دَ (س)$

أى أن مشتقة $(قوس)^ن = ن (القوس)^{ن - ١} \times$ مشتقة ما بداخل القوس

مثال ٢

أوجد المشتقة الأولى لكل مما يأتى :

١ ص = $(٢ س^٣ + ٥)^٤$ ٢ ص = $\left(\frac{٣ س}{٢ س + ١}\right)^٥$ ٣ ص = $\sqrt[٣]{(س^٢ - ٣ س - ٤)^٢}$

الحـــل

١ $\frac{ءص}{ءس} = ٤ (٢ س^٣ + ٥)^٣ \times ٦ س^٢ = ٢٤ س^٢ (٢ س^٣ + ٥)^٣$

٢ $\frac{ءص}{ءس} = ٥ \left(\frac{٣ س}{٢ س + ١}\right)^٤ \times \frac{٣ (٢ س + ١) - ٢ \times ٣ س}{(٢ س + ١)^٢}$

$= ٥ \left(\frac{٣ س}{٢ س + ١}\right)^٤ \times \frac{٣}{(٢ س + ١)^٢} = \left(\frac{٣ س}{٢ س + ١}\right)^٤ \times \frac{١٥}{(٢ س + ١)^٢}$

٣ $\because$ ص = $(س^٢ - ٣ س - ٤)^{\frac{٢}{٣}}$

$\therefore \frac{ءص}{ءس} = \frac{٢}{٣} (س^٢ - ٣ س - ٤)^{-\frac{١}{٣}} (٢ س - ٣) = \frac{٢ (٢ س - ٣)}{٣ \sqrt[٣]{س^٢ - ٣ س - ٤}}$

ملاحظـــة

إذا كانت : ص = $\sqrt{د (س)}$ فإن : $\frac{ءص}{ءس} = \frac{١}{٢ \sqrt{د (س)}} \times دَ (س)$

أى أن : مشتقة الجذر التربيعى لدالة = $\frac{١}{٢ (الجذر)} \times$ مشتقة ما تحت الجذر.

مثال ٣

أوجد $\frac{دص}{دس}$ لكل مما يأتى :

١ ص = $\sqrt{٢ س + ٣}$

٢ ص = $\sqrt{٥ س^٣ - ١٢ س^٢ + ٨ س + ١}$

الحــل

١ $\frac{دص}{دس} = \frac{١}{٢\sqrt{٢ س + ٣}} \times ٢ = \frac{١}{\sqrt{٢ س + ٣}}$

٢ $\frac{دص}{دس} = \frac{١٥ س^٢ - ٢٤ س + ٨}{٢\sqrt{٥ س^٣ - ١٢ س^٢ + ٨ س + ١}}$

مثال ٤

إذا كانت : ص = $\frac{ع^٢}{ع^٢ + ١}$ ، ع = $\sqrt{٣ س - ٢}$ **فأوجد :** $\frac{دص}{دس}$ عند س = ١

الحــل

$\because \frac{دص}{دع} = \frac{٢ع (ع^٢ + ١) - ٢ع (ع^٢)}{(ع^٢ + ١)^٢} = \frac{٢ع^٣ + ٢ع - ٢ع^٣}{(ع^٢ + ١)^٢} = \frac{٢ع}{(ع^٢ + ١)^٢}$ ، $\frac{دع}{دس} = \frac{٣}{٢\sqrt{٣ س - ٢}}$

$\therefore \frac{دص}{دس} = \frac{دص}{دع} \times \frac{دع}{دس} = \frac{٢ع}{(ع^٢ + ١)^٢} \times \frac{٣}{٢\sqrt{٣ س - ٢}}$

وبالتعويض عن ع : $\therefore \frac{دص}{دس} = \frac{٢\sqrt{٣ س - ٢}}{(٣ س - ٢ + ١)^٢} \times \frac{٣}{٢\sqrt{٣ س - ٢}} = \frac{٣}{(٣ س - ١)^٢}$

$\therefore \left[\frac{دص}{دس}\right]_{س = ١} = \frac{٣}{(٣ \times ١ - ١)^٢} = \frac{٣}{٤}$

حل آخر : فى بعض الأحيان نجد أنه من الأفضل التعويض عن ع فى ص وذلك لجعل ص دالة فى س ثم إيجاد $\frac{دص}{دس}$ كالآتى :

$\because$ ع = $\sqrt{٣ س - ٢}$ $\therefore$ ص = $\frac{\left(\sqrt{٣ س - ٢}\right)^٢}{\left(\sqrt{٣ س - ٢}\right)^٢ + ١} = \frac{٣ س - ٢}{٣ س - ٢ + ١} = \frac{٣ س - ٢}{٣ س - ١}$

$\therefore \frac{دص}{دس} = \frac{٣ (٣ س - ١) - ٣ (٣ س - ٢)}{(٣ س - ١)^٢} = \frac{٩ س - ٣ - ٩ س + ٦}{(٣ س - ١)^٢} = \frac{٣}{(٣ س - ١)^٢}$

$\therefore \left[\frac{دص}{دس}\right]_{س = ١} = \frac{٣}{(٣ \times ١ - ١)^٢} = \frac{٣}{٤}$

نتيجــة

إذا كانت ص دالة قابلة للاشتقاق بالنسبة إلى س فإن : $\frac{د}{دس}(ص^ن) = ن ص^{ن - ١} \times \frac{دص}{دس}$

فمثلًا : $\frac{د}{دس}(ص^٣) = ٣ ص^٢ \times \frac{دص}{دس}$

مثال ٥

أوجد $\frac{ءص}{ءس}$ إذا كان : $ص^{٣} = س^{٤} - ٢ س^{٢} + ١$

الحل

$\because ص^{٣} = س^{٤} - ٢ س^{٢} + ١$ $\therefore ص = (س^{٤} - ٢ س^{٢} + ١)^{\frac{١}{٣}}$

$\therefore \frac{ءص}{ءس} = \frac{١}{٣} (س^{٤} - ٢ س^{٢} + ١)^{-\frac{٢}{٣}} (٤ س^{٣} - ٤ س) = \frac{٤ س^{٣} - ٤ س}{٣ \sqrt[٣]{(س^{٤} - ٢ س^{٢} + ١)^{٢}}}$

مثال ٦

إذا كانت : $ص = ع^{٢} + ٣ ع + ٥$ ، $ع = \frac{١}{٢} س^{٢} + ٢$

أثبت أن : $\frac{ءص}{ءس} - ٧ \frac{ءع}{ءس} - س^{٣} = صفر$

الحل

$\because \frac{ءص}{ءع} = ٢ ع + ٣$ ، $\frac{ءع}{ءس} = \frac{١}{٢} \times ٢ س = س$

$\therefore \frac{ءص}{ءس} = \frac{ءص}{ءع} \times \frac{ءع}{ءس} = (٢ ع + ٣) \times س$ وبالتعويض عن قيمة ع

$\therefore \frac{ءص}{ءس} = \left(٢ \left(\frac{١}{٢} س^{٢} + ٢\right) + ٣\right) \times س = (س^{٢} + ٤ + ٣) \times س = س^{٣} + ٧ س$

$\therefore \frac{ءص}{ءس} - ٧ \frac{ءع}{ءس} - س^{٣} = س^{٣} + ٧ س - ٧ س - س^{٣} = صفر$



على مشتقة دالة الدالة (قاعدة السلسلة)

اختبر نفسك

من أسئلة الكتاب المدرسي • فهم • تطبيق • مستويات عليا

أولًا / أسئلة الاختيار من متعدد

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

① إذا كان : ص = $\text{س}^{٢}$ ، س = $\text{ع}^{٣}$ − ١ فإن : $\frac{\text{ءص}}{\text{ءع}}$ = ...

(أ) $\text{ع}^{٣}$ − ١ (ب) ٦ $\text{ع}^{٢}$

(جـ) ٦ $\text{ع}^{٢}$ ($\text{ع}^{٣}$ − ١) (د) $\text{س}^{٢}$ ($\text{ع}^{٣}$ − ١)

② إذا كان : ص = $\text{س}^{٢}$ + س ، س = $\text{ع}^{٢}$ + ع فإن : $\frac{\text{ءص}}{\text{ءع}}$ = ... عند ع = −١

(أ) −١ (ب) ١ (جـ) صفر (د) ٢

③ إذا كانت : ص = $\text{ع}^{٣}$ − ع − ١ ، ع = س − $\frac{٤}{\text{س}}$ فإن : $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ = ... عند س = ٢

(أ) −١ (ب) −٢ (جـ) $\frac{١}{٢}$ (د) $\frac{-١}{٢}$

④ إذا كانت : ص س = ٥ ، س ع = ٣ فإن : $\frac{\text{ءص}}{\text{ءع}}$ = ...

(أ) ١٥ (ب) $\frac{٥}{٣}$ (جـ) $\frac{٣}{٥}$ (د) صفر

⑤ إذا كانت : ص = $\frac{\text{س} - ٥}{\text{س} + ٥}$ ، س = ٢ ع + ٣ فإن : $\frac{\text{ءص}}{\text{ءع}}$ = ... عند ع = ١

(أ) $\frac{١}{٢٥}$ (ب) −$\frac{١}{٢٥}$ (جـ) −$\frac{١}{٥}$ (د) $\frac{١}{٥}$

⑥ إذا كانت : ع = $\frac{١}{٢}$ $\text{ص}^{٢}$ + ص − ٢ ، ص = $\text{س}^{٢}$ + س + ١

فإن : $\frac{\text{ءع}}{\text{ءس}}$ = ... عند س = −$\frac{١}{٢}$

(أ) صفر (ب) ١ (جـ) $\frac{١}{٢}$ (د) −$\frac{١}{٢}$

⑦ إذا كانت : ص = $\sqrt{\text{ع}}$ + $\frac{١}{\sqrt{\text{ع}}}$ ، ع = $\text{س}^{٢}$ + ٢٥ فإن : $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ = ... عند س = ٠

(أ) −٢ (ب) صفر (جـ) ١ (د) ٣

⑧ إذا كانت : ص = $\frac{\text{ع} + ٣}{\text{ع} - ١}$ ، ع = $\frac{\text{س} + ١}{\text{س} - ٣}$ فإن : $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ = ... عند س = ٤

(أ) صفر (ب) ١ (جـ) ٢ (د) ٣

⑨ إذا كانت : د (س) = $\sqrt{\text{س}^{٢} + ٩}$ فإن : دَ (−٤) = ...

(أ) $\frac{-٤}{٥}$ (ب) ٥ (جـ) $\frac{١}{١٠}$ (د) $\frac{-١}{١٠}$

(١٠) إذا كان : ص = $(س^٢ - ٢)^٥$ فإن : $\frac{ءص}{ءس}$ = ...

(أ) ٥ $(س^٢ - ٢)^٤$ (ب) ١٠ س $(س^٢ - ٢)^٤$

(جـ) ٢٢ $س^٥$ (د) ٢ س $(س^٢ - ٢)^٥$

(١١) إذا كانت : ص = $(ع + ١)^٣$ ، ع = $س^٥ - ١$ فإن : $\frac{ءص}{ءس}$ = ...

(أ) $س^{١٥}$ (ب) $س^٨$ (جـ) ١٥ $س^{١٤}$ (د) ٨ $س^٧$

(١٢) $\frac{ء}{ءس}(٢ - ٣س)^{-٢}$ = ...

(أ) ١٢ $س^{-٢}$ - ٢٧ $س^{-٤}$ (ب) $\frac{١}{٣}(٢ - ٣س)^{-١}$

(جـ) ٦ $(٢ - ٣س)^{-٣}$ (د) -٢ $(٢ - ٣س)^{-٣}$

(١٣) إذا كان : ص = $\sqrt{٢ - س}$ فإن : $\frac{ءص}{ءس}$ = ...

(أ) $-\frac{١}{٢ص}$ (ب) -١ (جـ) -٢ ص - ١ (د) -٢ ص

(١٤) إذا كان : ص = $(س + ك)^٣$ ، $\frac{ءص}{ءس}$ = ١٢ عند س = صفر فإن : ك = ...

(أ) ٢ (ب) ± ٢ (جـ) -٢ (د) ٤

(١٥) إذا كانت : ص = $\sqrt[٣]{٢س^٢ - ٣س + ٩}$ فإن : $\frac{ءص}{ءس}$ = ... عند س = ١

(أ) $\frac{١}{٦}$ (ب) $\frac{١}{١٢}$ (جـ) ٦ (د) ١٢

(١٦) إذا كانت : ص = د (س) فإن : $\frac{ء}{ءس}(ص^٦)$ = ...

(أ) ٦ $ص^٥$ (ب) $ص^٦$ (جـ) صفر (د) ٦ $ص^٥ \frac{ءص}{ءس}$

(١٧) إذا كان : ص = $\frac{ع}{ع - ١}$ ، ع = $\frac{س}{س + ١}$ فإن : ....

(أ) $\frac{ءص}{ءس}$ + ١ = ٠ (ب) $\frac{ءص}{ءع} = \frac{ءع}{ءس} \times \frac{ءس}{ءص}$

(جـ) $\frac{ءص}{ءس}$ = ١ (د) $\frac{ءص}{ءس} = \frac{ع س}{(ع - ١)(س + ١)}$

(١٨) إذا كان : ر (س) = $\sqrt{د (س)}$ حيث كل من د (س) ، ر (س) دوال قابلة للإشتقاق وكانت د (٣) = ٤

فإن : ر̀ (٣) : د̀ (٣) = ...

(أ) ١ : ٤ (ب) ١ : ١٦ (جـ) ٤ : ١ (د) ١٦ : ١

(١٩) إذا كان : د (س) = $\sqrt{ر (س)}$ وكان د̀ (س) = $\frac{١}{\sqrt{ر (س)}}$ فإن : ر̀ (س) = ...

(أ) ١ (ب) ٢ (جـ) س (د) د̀ (س)

ثانيًا / الأسئلة المقالية

١ أوجد $\frac{ء ص}{ء س}$ فى كل مما يأتى :

① ص = $ع^٢$ ، ع = ٣ $س^٢$ − ٢ عند س = ٢ «٢٤٠»

② ص = $ع^٧$ ، ع = $س^٣$ + ٢ $س^٢$ − ٤ عند س = ١ «٤٩»

③ ص = $ع^٥$ + ٣ ، ع = $(س − ١)^٣$ عند س = ٢ «١٥»

④ ص = $ع^٣$ + ع − ٢ ، ع = $س^٢$ − س عند النقطة (٠ ، −٢) «−١»

⑤ ص = $\sqrt{ع}$ ، ع = $\frac{س − ٢}{س + ١}$ عند س = ٣ «$\frac{٣}{١٦}$»

---

٢ أوجد $\frac{ء ص}{ء س}$ فى كل مما يأتى :

① ص = $ع^٤$ ، ع = ٣ $س^٢$ − س + ٢

② ص = $ع^٥$ ، ع = $س^٣$ + ١

③ ص = ٣ $ع^٢$ − ١ ، ع = $\frac{٥}{س}$

④ ص = $\sqrt[٣]{ع}$ ، ع = $س^٢$ − ٣ س + ٢

⑤ ص = ٢ $ع^٣$ ، ع = $\frac{٢ س + ١}{س − ١}$

⑥ ص = $\frac{ع^٢}{ع^٢ + ١}$ ، ع = $\sqrt{٢ س + ١}$

---

٣ أوجد المشتقة الأولى لكل مما يأتى :

① ص = $(س + ٤)^{١٢}$

② ص = $(س + ٣)^٧$

③ ص = $(٢ س + ٣)^٤$

④ ص = $(١ − ٣ س)^٥$

⑤ ص = $(س^٢ − ٣)^٦$

⑥ ص = $(٢ س^٢ − ٣)^٤$

⑦ ص = $(٣ س^٢ − ٤ س + ١)^٤$

⑧ ص = $(س^٣ − ٣ س^٢ + ٢)^٥$

⑨ ص = $(٢ س^٣ − ٤ س + ١)^٩$

⑩ ص = $(٦ س^٣ + ٣ س^٢ + ١)^{١٠}$

⑪ ص = $\left(س^٢ + \frac{١}{س^٢}\right)^٧$

⑫ ص = $\frac{٧}{(٣ س − ١)^٦}$

⑬ ص = $\frac{٧}{(س^٢ − ٩)^٥}$

---

٤ أوجد المشتقة الأولى لكل مما يأتى :

① ص = $(س + ٣)^٦$ عند س = −٢ «٦»

② ص = $(س^٢ − ٢)^٧$ عند س = ٠ «صفر»

③ ص = $(س^٢ − س + ١)^{−٤}$ عند س = ١ «−٤»

④ $ص = (١ - س)^٦ (١ + س)^٦$ عند $س = \sqrt{٢}$ «$١٢ \sqrt{٢}$»

⑤ $ص = \left(\frac{٣ س - ٢}{٥ س - ٤}\right)^٩$ عند $س = ١$ «-١٨»

⑥ $ص = \left(\frac{س^٢ + ١}{س - ٣}\right)^٥$ عند $س = ١$ «$\frac{-١٥}{٢}$»

⑦ 📖 $ص = \left(\frac{س^٢ - ٢}{٣ - س^٢}\right)^٧$ عند $س = ٠$ «صفر»

---

٥ أوجد المشتقة الأولى لكل مما يأتى :

① $ص = \sqrt{س^٢ + ١}$

② $ص = \sqrt[٣]{(٢ س + ١)^٥}$

③ $ص = \sqrt{٩ - ٢ س^٢}$ عند $س = \frac{١}{\sqrt{٢}}$ «$-\frac{١}{٢}$»

④ $ص = \sqrt[٣]{(٢ س^٢ + ٤ س + ٣)^٢}$ عند $س = ٢$ «$\frac{٥٦}{٩}$»

⑤ $ص = \sqrt[٣]{٢ س^٢ - ٣ س + ٩}$ عند $س = ١$ «$\frac{١}{١٢}$»

---

٦ أوجد $\frac{ءص}{ءس}$ فى كل مما يأتى :

① $ص^٥ = س^٣ - ٢ س^٢$

② 📖 $ص^٢ = ٣ س^٢ - ٤$

③ $ص^٣ = (٢ س^٢ - ٣ س - ٥)^٢$

④ $ص^٣ = (س^٢ - ٤ س + ٤)^{-٢}$

⑤ $ص^٥ = \frac{١ - س^٢}{١ + ٢ س^٢}$

---

٧ إذا كانت : $ص = س^٢ - ١$ ، $س = ع^٣ - ٢$ أوجد : $\frac{ءص}{ءع}$

ثم أثبت أن : $\frac{ءص}{ءع} + ٤ \frac{ءس}{ءع} = ٦ ع^٥$ «$٦ ع^٥ - ١٢ ع^٢$»

---

٨ إذا كانت : $ص = ع^٢ + ع$ ، $ع = ٢ س^٢$ أثبت أن : $\frac{ءص}{ءس} - \frac{ءع}{ءس} = ١٦ س^٣$

---

٩ إذا كانت : $(س + ص)^٣ = ٥$ أثبت أن : $\frac{ءص}{ءس} = -١$

---

١٠ 📖 أوجد قيم س التى تجعل $دَ(س) = ٧$ حيث $د(س) = (س - ٥)^٧$ «٦ أ، ٤»

---

١١ إذا كانت : $ص = (أ س + ب)^٢$ وعندما $س = ٢$ فإن : $ص = ١$ ، $\frac{ءص}{ءس} = ٤$

أوجد قيمتى : أ ، ب «± ٢ ، ∓ ٣»

الدرس

5

تطبيقات على المشتقة



أولًا ميل الخط المستقيم

١ ميل الخط المستقيم الذى معادلته : $أ س + ب ص + جـ = ٠$ هو $\frac{- \text{معامل } س}{\text{معامل } ص} = \frac{- أ}{ب}$

فمثلًا : ميل المستقيم الذى معادلته : $٥ س + ٢ ص + ٧ = ٠$ هو $\frac{-٥}{٢}$

٢ ميل الخط المستقيم المار بالنقطتين : $(س_١ ، ص_١)$ ، $(س_٢ ، ص_٢)$ يساوى $\frac{ص_٢ - ص_١}{س_٢ - س_١}$

فمثلًا : ميل المستقيم المار بالنقطتين $(٢ ، -٣)$ ، $(٤ ، ١)$ هو $\frac{١ + ٣}{٤ - ٢} = ٢$

٣ ميل المستقيم = طا هـ حيث (هـ) قياس الزاوية الموجبة التى يصنعها المستقيم مع الاتجاه الموجب لمحور السينات.

فمثلًا : ميل المستقيم الذى يصنع زاوية موجبة قياسها ١٣٥° مع الاتجاه الموجب لمحور السينات

هو طا ١٣٥° = -١

٤ ميل المستقيم يكون موجبًا إذا كان يصنع زاوية حادة مع الاتجاه الموجب لمحور السينات.

٥ ميل المستقيم يكون سالبًا إذا كان يصنع زاوية منفرجة مع الاتجاه الموجب لمحور السينات.

٦ ميل محور السينات = ميل أى مستقيم أفقى (موازى لمحور السينات) = صفر

٧ ميل كل من محور الصادات وأى مستقيم رأسى (موازى لمحور الصادات) يكون غير معرف لأن المقام = صفر

ثانيًا العلاقة بين المستقيمين المتوازيين والمستقيمين المتعامدين

إذا كان : $ل_1$ ، $ل_2$ مستقيمين ميلاهما $م_1$ ، $م_2$ على الترتيب فإن :

١ $ل_1 // ل_2 \Longleftrightarrow م_1 = م_2$

٢ $ل_1 \perp ل_2 \Longleftrightarrow م_1 \times م_2 = -1$ (ما لم يوازى أحدهما أحد المحورين)

فمثلًا : إذا كان ميل المستقيم = $\frac{3}{2}$ فإن : ميل المستقيم الذى يوازيه = $\frac{3}{2}$ وميل المستقيم العمودى عليه = $\frac{-2}{3}$

ثالثًا معادلة الخط المستقيم

١ بدلالة نقطة عليه ($س_1$ ، $ص_1$) والميل (م) هى $(ص - ص_1) = م (س - س_1)$

٢ بدلالة الميل (م) وطول الجزء المقطوع من محور الصادات هى $ص = م س + حـ$

٣ بدلالة الجزءين المقطوعين من محورى الإحداثيات هى $\frac{س}{أ} + \frac{ص}{ب} = 1$

ملاحظـــات

١ معادلة المستقيم الذى يوازى محور السينات ويمر بالنقطة (ل ، ك) هى $ص = ك$

٢ معادلة المستقيم الذى يوازى محور الصادات ويمر بالنقطة (ل ، ك) هى $س = ل$

٣ معادلة محور السينات هى $ص = 0$

٤ معادلة محور الصادات هى $س = 0$

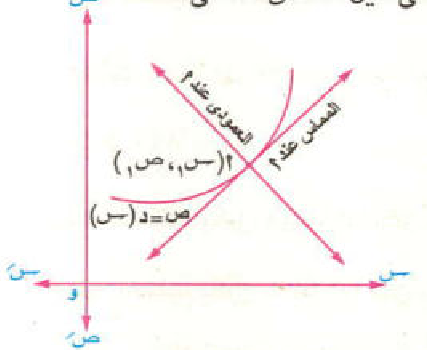
٥ معادلة المستقيم الذى يمر بنقطة الأصل هى $ص = م س$

٦ لإيجاد نقط تقاطع المنحنى مع محور السينات نضع ص = ٠ ونوجد قيم س

٧ لإيجاد نقط تقاطع المنحنى مع محور الصادات نضع س = ٠ ونوجد قيم ص

استخدام المشتقة الأولى لإيجاد ميلى المماس والعمودى عليه لمنحنى

نعلم مما سبق دراسته أن المشتقة الأولى للدالة د حيث ص = د (س) تعنى ميل المماس لمنحنى هذه الدالة عند أى نقطة (س ، ص) واقعة عليه.



ففى الشكل المقابل :

* ميل المماس لمنحنى الدالة [ص = د (س)] عند النقطة أ ($س_1$ ، $ص_1$) الواقعة عليه هو $\left[\frac{ءص}{ءس}\right]_{(س_1 ، ص_1)}$

* ميل العمودى على منحنى الدالة [ص = د (س)] عند النقطة أ ($س_1$ ، $ص_1$) الواقعة عليه هو $\frac{-1}{\left[\frac{ءص}{ءس}\right]_{(س_1 ، ص_1)}}$

لاحظ أن : يسمى ميل المماس عند أى نقطة على منحنى بميل المنحنى عند هذه النقطة كما يسمى العمودى على المماس لمنحنى عند نقطة التماس بالعمودى للمنحنى عند هذه النقطة.

معادلتا المماس والعمودى عليه لمنحنى

إذا كانت ($س_١$ ، $ص_١$) نقطة تقع على منحنى الدالة د حيث : ص = د (س)، م ميل المماس عند هذه النقطة أى م = $\left[\frac{ءص}{ءس}\right]_{(س_١ ، ص_١)}$ فإن :

* معادلة المماس للمنحنى عند النقطة ($س_١$ ، $ص_١$) هى $ص - ص_١ = م (س - س_١)$

* معادلة العمودى للمنحنى عند النقطة ($س_١$ ، $ص_١$) هى $ص - ص_١ = \frac{-١}{م} (س - س_١)$

مثال ١

أوجد ميل المماس والعمودى عليه للمنحنى :

ص = ٣ $س^٣$ − ٥ س + ٣ عند النقطة (١ ، ١) الواقعة عليه.

الحل

∵ $\frac{ءص}{ءس}$ = ٩ $س^٢$ − ٥ ∴ ميل المماس للمنحنى عند النقطة (١ ، ١) = ٩ − ٥ = ٤

، ميل العمودى على المنحنى عند النقطة (١ ، ١) = $\frac{-١}{٤}$

مثال ٢

أوجد النقط الواقعة على المنحنى :

ص = $س^٢$ − ٤ س + ٣ والتى يكون عندها المماس للمنحنى موازيًا محور السينات.

الحل

∵ ص = $س^٢$ − ٤ س + ٣ ∴ $\frac{ءص}{ءس}$ = ٢ س − ٤

، ∵ المماس يوازى محور السينات ∴ $\frac{ءص}{ءس}$ = ٠ ∴ ٢ س − ٤ = ٠

∴ س = ٢ ومنها ص = −١ ∴ النقطة هى (٢ ، −١)

مثال ٣

أوجد قياس الزاوية الموجبة التى يصنعها المماس للمنحنى :

د (س) = ($س^٣$ − ١) (س + ٢) مع الاتجاه الموجب لمحور السينات عند النقطة (−١ ، −٢) الواقعة على المنحنى.

الحل

∵ دَ (س) = ($س^٣$ − ١) + ٣ $س^٢$ (س + ٢)

، ∵ دَ (−١) = ١ ∴ ميل المماس للمنحنى عند النقطة (−١ ، −٢) = ١

∴ طا هـ = ١ ∴ هـ = ٤٥°

∴ قياس الزاوية الموجبة التى يصنعها المماس للمنحنى عند النقطة (−١ ، −٢) = ٤٥°

مثال ٤

أوجد النقط الواقعة على المنحنى : ص = ٣ س^{٣} − ١١ س + ٥ والتى عندها يكون المماس للمنحنى :

[١] موازيًا للمستقيم ٢ س + ص − ٥ = ٠ [٢] عموديًا على المستقيم ٢٥ ص + س = ٦

الحل

∵ ص = ٣ س^{٣} − ١١ س + ٥ ∴ $\frac{ءص}{ءس}$ = ٩ س^{٢} − ١١

[١] ∵ ميل المستقيم المعطى = $\frac{-٢}{١}$ = −٢ ∴ ميل المماس = −٢

∴ ٩ س^{٢} − ١١ = −٢ ∴ س^{٢} = ١ ∴ س = ± ١

∴ عند س = ١ فإن : ص = −٣

، عند س = −١ فإن : ص = ١٣

∴ النقط هى (١ ، −٣) ، (−١ ، ١٣)

[٢] ∵ ميل المستقيم المعطى = $\frac{-١}{٢٥}$ ∴ ميل المماس = ٢٥

∴ ٩ س^{٢} − ١١ = ٢٥ ∴ س^{٢} = ٤ ∴ س = ± ٢

∴ عند س = ٢ فإن : ص = ٧

، عند س = −٢ فإن : ص = ٣

∴ النقط هى (٢ ، ٧) ، (−٢ ، ٣)

مثال ٥

أوجد معادلتى المماس والعمودى عليه للمنحنى :

ص = ٥ س^{٣} + ٣ س^{٢} + ٤ عند النقطة (−١ ، ٢) الواقعة عليه.

الحل

∵ ص = ٥ س^{٣} + ٣ س^{٢} + ٤ ∴ $\frac{ءص}{ءس}$ = ١٥ س^{٢} + ٦ س

∴ $\left(\frac{ءص}{ءس}\right)_{س = -١}$ = ٩ ∴ ميل المماس = ٩

∴ معادلة المماس هى (ص − ٢) = ٩ (س + ١) أى ص − ٩ س − ١١ = ٠

، ∵ ميل العمودى = $\frac{-١}{٩}$

∴ معادلة العمودى هى (ص − ٢) = $\frac{-١}{٩}$ (س + ١) أى س + ٩ ص − ١٧ = ٠

مثال ٦

أوجد معادلتى المماس والعمودى للمنحنى :

ص = (س − ٢) (س^{٣} − ٤) عند النقطة (٢ ، ٠) الواقعة على المنحنى.

الحل

∵ ص = (س − ٢) (س^{٣} − ٤) ∴ $\frac{ءص}{ءس}$ = (س − ٢) (٣ س^{٢}) + (س^{٣} − ٤)

∴ $\left(\frac{ءص}{ءس}\right)_{س = ٢}$ = ٤ ∴ ميل المماس = ٤

∴ معادلة المماس هى (ص − ٠) = ٤ (س − ٢) أى ٤ س − ص − ٨ = ٠

، ميل العمودى = $\frac{-١}{٤}$

∴ معادلة العمودى هى (ص − س) = $\frac{-١}{٤}$ (س − ٢) أى ٤ ص + س − ٢ = ٠

مثال ٧

أوجد معادلة العمودى لمنحنى الدالة : ص = س^{٢} + ٢ س − ٣ عند كل نقطة من نقط تقاطعه مع :

١ محور السينات. ٢ محور الصادات.

الحل

١ نوجد نقط تقاطع المنحنى مع محور السينات بوضع ص = ٠

∴ س^{٢} + ٢ س − ٣ = ٠ ∴ (س + ٣) (س − ١) = ٠

∴ س = −٣ أ، س = ١ ∴ نقط التقاطع هى (−٣ ، ٠) ، (١ ، ٠)

، ∵ ميل المماس للمنحنى عند أى نقطة (س ، ص) عليه = $\frac{ءص}{ءس}$ = ٢ س + ٢

• عند النقطة (−٣ ، ٠) ∴ ميل المماس = −٤ وميل العمودى = $\frac{١}{٤}$

∴ معادلة العمودى هى : (ص − ٠) = $\frac{١}{٤}$ (س + ٣) أى ٤ ص − س − ٣ = ٠

• عند النقطة (١ ، ٠) ∴ ميل المماس = ٤ ∴ ميل العمودى = −$\frac{١}{٤}$

∴ معادلة العمودى هى : (ص − ٠) = −$\frac{١}{٤}$(س − ١) أى س + ٤ ص − ١ = ٠

٢ نوجد نقط تقاطع المنحنى مع محور الصادات بوضع س = ٠

∴ ص = −٣ ∴ نقطة التقاطع هى (٠ ، −٣)

∴ ميل المماس = ٢ وميل العمودى = $\frac{-١}{٢}$

∴ معادلة العمودى هى (ص + ٣) = $\frac{-١}{٢}$ (س − ٠) أى س + ٢ ص + ٦ = ٠

مثال ٨

إذا كان المنحنى : $ص = \frac{أ}{س + ب}$ يمر بالنقطة (−١ ، ٢) والمماس للمنحنى عند هذه النقطة يوازى المستقيم $س + ص - ٣ = ٠$ **فأوجد قيمتى : أ ، ب**

الحل

∵ المنحنى $ص = \frac{أ}{س + ب}$ يمر بالنقطة (−١ ، ٢)

∴ $٢ = \frac{أ}{-١ + ب}$ ∴ $أ = ٢ (-١ + ب)$ (١)

، ∵ $\frac{ءص}{ءس} = \frac{-أ}{(س + ب)^٢}$ ∴ $\left(\frac{ءص}{ءس}\right)_{س = -١} = \frac{-أ}{(-١ + ب)^٢}$

، ∵ المماس يوازى المستقيم $س + ص - ٣ = ٠$ ∴ ميل المماس = −١

∴ $\frac{-أ}{(-١ + ب)^٢} = -١$ ∴ $\frac{أ}{(-١ + ب)^٢} = ١$ بشرط $ب \neq ١$ (٢)

بالتعويض عن قيمة أ من (١) فى (٢) : ∴ $\frac{٢ (-١ + ب)}{(-١ + ب)^٢} = ١$ ∴ $\frac{٢}{(-١ + ب)} = ١$

∴ $-١ + ب = ٢$ ∴ $ب = ٣$

وبالتعويض فى (١) : ∴ $أ = ٢ (-١ + ٣) = ٤$

تمـارين 12 على تطبيقات على المشتقة

اختبر نفسك

من أسئلة الكتاب المدرسى • فهم • تطبيق • مستويات عليا

أولًا أسئلة الاختيار من متعدد

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

(١) ميل المماس لمنحنى الدالة ص = (٢ س − ٣)^{٥} عند س = ٢ يساوى ....

(أ) ١ (ب) $\frac{١}{١٢}$ (جـ) ٥ (د) ١٠

(٢) ميل المماس للمنحنى ص = ٣ س − س^{٣} عند س = صفر يساوى ....

(أ) ٣ (ب) صفر (جـ) −٣ (د) ٦

(٣) المماس للمنحنى ص = س^{٢} − ٨ س + ٢ يوازى محور السينات عند س = ...

(أ) −٨ (ب) ٢ (جـ) ٤ (د) صفر

(٤) المستقيم س + ص = −٢ يمس المنحنى ص = ٣ س^{٢} + ٥ س + ١ عند س = ...

(أ) ١ (ب) ٥ (جـ) ٣ (د) −١

(٥) إذا كان المستقيم : ص + س − ١ = ٠ يمس منحنى الدالة د : د (س) = س^{٢} − ٣ س + أ

فإن : أ = ...

(أ) ١ (ب) ٢ (جـ) ٣ (د) ٤

(٦) النقطة الواقعة على منحنى الدالة د : د (س) = (س − ٣)^{٢} − ١ والتى عندها المماس يوازى المستقيم ٢ س + ص − ٣ = ٠ هى ....

(أ) (٠ ، ٢) (ب) (٢ ، ٠) (جـ) (٣ ، −١) (د) (١ ، ٣)

(٧) النقطة الواقعة على منحنى الدالة ص = $\frac{١}{س − ٣}$ والتى عندها المماس يوازى المستقيم س + ص = ٠ من النقط التالية هى ....

(أ) (−٢ ، −$\frac{١}{٥}$) (ب) (٤ ، −٤) (جـ) (٤ ، ١) (د) (٢ ، −٢)

(٨) إذا كانت : د دالة خطية وكان دَ (−١١) = ١٧ فإن : دَ (١١) = ...

(أ) −١١ (ب) −١٧ (جـ) ١٧ (د) ١١

(٩) معادلة المماس لمنحنى الدالة د حيث د (س) = س^{٢} + ٣ عندما س = ١ هى ....

(أ) ص = ٢ س (ب) ص − ٢ س = ٥

(جـ) س + ص = ٢ (د) ٢ س − ص + ٢ = صفر

(١٠) معادلة المماس لمنحنى الدالة د : د (س) = $\frac{١}{س + ١}$ عند س = صفر هى ....

(أ) ص = ١ − س (ب) ص = س − ١

(جـ) ص = س + ١ (د) ص = − س − ١

(١١) معدل تغير $س^٢$ + ٤ بالنسبة إلى س عندما س = ٢ يساوى ....

(أ) ٤ (ب) ٨ (جـ) $\frac{١}{٤}$ (د) ١٢

(١٢) منحنى الدالة د : د (س) = $\frac{١}{٣}$ $س^٣$ − $س^٢$ + ٣ له مماس أفقى عند س = ...

(أ) صفر (ب) صفر أ، ٣ (جـ) ٢ (د) صفر أ، ٢

(١٣) ميل المماس للمنحنى ص = $\sqrt[٣]{س^٢}$ عندما س = ١ يساوى ....

(أ) صفر (ب) $\frac{٢}{٣}$ (جـ) $\frac{٣}{٤}$ (د) ١

(١٤) إذا كانت معادلة العمودى للمنحنى د (س) عند النقطة (٢ ، −١) هى س − ٢ ص = ٤

فإن : د̀ (٢) = ...

(أ) ٢ (ب) −٢ (جـ) ١ (د) −١

(١٥) إذا كان المماس لمنحنى الدالة د حيث د (س) = أ $س^٢$ + ب س + ٥ عند النقطة (−١ ، ٣) الواقعة عليه يصنع مع الاتجاه الموجب لمحور السينات زاوية موجبة قياسها ٤٥° فإن : أ + ب = ...

(أ) ١ (ب) ٢ (جـ) ٣ (د) ٤

(١٦) إذا كان ميل المماس للمنحنى : ص = أ $س^٢$ + ٢ ب س عند نقطة الأصل يساوى ٦ والنقطة (−١ ، −٣) تقع على المنحنى فإن : أ + ب = ...

(أ) ٣ (ب) ٤ (جـ) ٦ (د) ٨

(١٧) إذا كان : ص = $\frac{١}{أ + ب س}$ هى معادلة منحنى يمر بالنقطة (١ ، −١) وميل المماس له عند هذه النقطة يساوى ٢ فإن : ب − أ = ...

(أ) −١ (ب) −٣ (جـ) ٣ (د) ١

(١٨) قياس الزاوية الموجبة التى يصنعها المماس للمنحنى ص = $س^٢$ − ١ مع الاتجاه الموجب لمحور السينات عند س = $\frac{١}{٢}$ يساوى ....

(أ) $\frac{\pi}{٤}$ (ب) $\frac{\pi}{٣}$ (جـ) $\frac{\pi}{٦}$ (د) π

(١٩) ميل المماس لمنحنى الدالة ص = $\sqrt[٣]{(س^٢ − ٣ س + ١)^٢}$ عند النقطة (صفر ، ١) تساوى ....

(أ) $\frac{١}{٢}$ (ب) −$\frac{١}{٢}$ (جـ) ٢ (د) −٢

(٢٠) ميل العمودى للمنحنى ص = (س − ١) (س^{٣} + ٢) عند س = ١ يساوى ....

(أ) $-\frac{١}{٣}$ (ب) −٣ (جـ) $\frac{١}{٣}$ (د) ٣

(٢١) قياس الزاوية الموجبة التى يصنعها المماس للمنحنى ص = $\sqrt{٢س^{٢} + ٧}$ عند النقطة (−٣ ، ٥) مع الاتجاه الموجب لمحور السينات ≃ ....

(أ) ٤٨ َ ٣٩° (ب) ١٢ َ ٥٠° (جـ) ٤٨ َ ١٢٩° (د) ١٢ َ ١٤٠°

(٢٢) إذا كانت معادلة العمودى للمنحنى د (س) = س^{٢} − ٣ س + ؟

عند نقطة ما هى ص − س + ١ = ٠ فإن : ؟ = ...

(أ) ١ (ب) ٢ (جـ) ٣ (د) ٤

(٢٣) النقطة الواقعة على المنحنى ص = س^{٢} والتى عندها ميل المماس يساوى الإحداثى السينى للنقطة هى ....

(أ) (٢ ، ٠) (ب) (٠ ، ٢) (جـ) $(-\frac{١}{٢} ، \frac{١}{٢})$ (د) (٠ ، ٠)

(٢٤) النقطة الواقعة على المنحنى ص = س^{٣} − ٢ س + ١ والتى عندها المماس للمنحنى تصنع زاوية قياسها $\frac{\pi}{٤}$ مع الاتجاه الموجب لمحور السينات هى ....

(أ) (١ ، ٠) ، (١ ، ٢) (ب) (٠ ، ١) ، (٢ ، −١)

(جـ) (١ ، ٠) ، (−١ ، ٢) (د) (١ ، ٢) ، (−١ ، ٢)

(٢٥) النقطة الواقعة على المنحنى ص = ٢ س^{٣} − س + ٣ والتى عندها المماس يكون عموديًا على المستقيم س = ١ − ٥ ص هى ....

(أ) (١ ، −٤) (ب) (١ ، ٢)

(جـ) (١ ، −٤) ، (١ ، ٢) (د) (١ ، ٤) ، (−١ ، ٢)

(٢٦) إذا كانت : ص = ع^{٢} ، ع = س + ١ فإن ميل المماس للمنحنى ص = د (س) عند س = ٣ يساوى ....

(أ) ١ (ب) ٣ (جـ) ٦ (د) ٨

(٢٧) إذا كان المستقيم : ٢ ص − ٤ س + ؟ = ٠ يمس منحنى الدالة : ص = س^{٢} + ١ عند النقطة (ب ، حـ) فإن : ؟ + ب + حـ = ...

(أ) ١ (ب) ٢ (جـ) ٣ (د) ٦

(٢٨) إذا كان ميل المماس للمنحنى ص = س^{٢} + ؟ س + ب يساوى −١ عند النقطة (٢ ، −٢) فإن : ؟ × ب = ...

(أ) −١٥ (ب) −٢٠ (جـ) −١ (د) ١٠

(٢٩) الماس للمنحنى ص = (٣ س − ٥)^{٣} عند النقطة (٢ ، ١) يصنع مع الاتجاه الموجب لمحور السينات زاوية موجبة ظلها يساوى ....

(أ) ٢ (ب) ٣ (جـ) ٧ (د) ٩

(٣٠) إذا كان العمودى على منحنى الدالة : ص = د (س) عند النقطة (٣ ، ٤) يصنع زاوية قياسها $\frac{٣ \pi}{٤}$ مع الاتجاة الموجب لمحور السينات فإن : دَ (٣) = ...

(أ) −١ (ب) $\frac{-٣}{٤}$ (جـ) $\frac{٣}{٤}$ (د) ١

(٣١) إذا كان الماس لمنحنى الدالة ص = د (س) عند النقطة (٣ ، ٥) يمر بالنقطة (٦ ، −١) فإن : دَ (٣) = ...

(أ) −٢ (ب) $\frac{-١}{٢}$ (جـ) $\frac{١}{٢}$ (د) ٢

(٣٢) إذا كان المستقيم ص = ٨ − ٣ س مماسًا لمنحنى الدالة د عند النقطة (٣ ، −١) فإن : دَ (٣) = ...

(أ) −١ (ب) −٣ (جـ) ٣ (د) ٨

(٣٣) إذا كانت د دالة زوجية وقابلة للاشتقاق على ح وكان : دَ (٢) = ٣ فإن ميل الماس للدالة د عند س = −٢ هو ....

(أ) ٣ (ب) −٣ (جـ) $\frac{١}{٣}$ (د) $\frac{-١}{٣}$

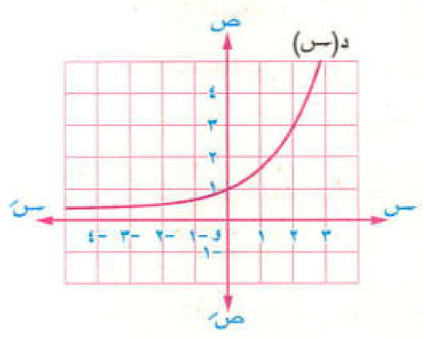
(٣٤) إذا كانت د دالة فردية قابلة للاشتقاق على ح وكان : دَ (٣) = ٥ فإن ميل الماس للدالة د عند س = −٣ هو ....

(أ) ٥ (ب) −٥ (جـ) $\frac{١}{٥}$ (د) $\frac{-١}{٥}$

(٣٥) إذا كانت د : ح ⟵ ح حيث د (س) = س^{٣} − أ س^{٢} + ب س − ١ والماس عند س = ١ يصنع زاوية قياسها ١٣٥° مع الاتجاه الموجب لمحور السينات ، بينما الماس عند س = ٢ يوازى محور السينات فإن ٣ أ − ب = ...

(أ) −٨ (ب) −٤ (جـ) صفر (د) ٨

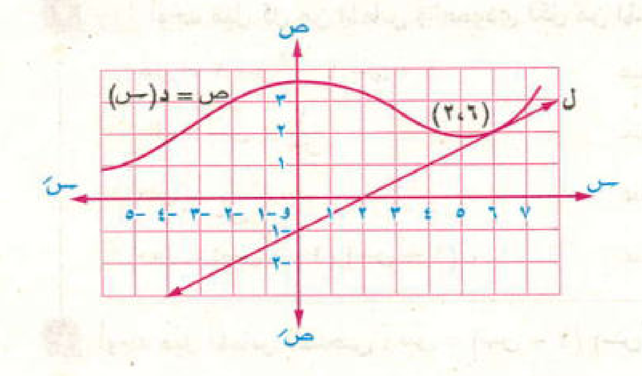
(٣٦) الشكل المقابل يمثل منحنى الدالة د فإن دَ (٢) تكون ....



(أ) موجبة. (ب) سالبة.

(جـ) صفر. (د) غير معرفة.

(٣٧) الشكل المقابل يمثل المنحنى



ص = د (س) والمستقيم ل يمس

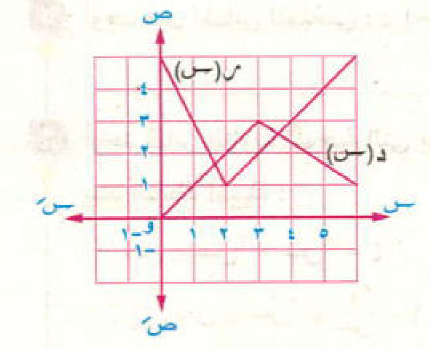
المنحنى عند النقطة (٦ ، ٢)

فإن دَ (٦) = ...

(أ) $-\frac{1}{٢}$ (ب) صفر

(جـ) $\frac{1}{٢}$ (د) ١

(٣٨) فى الشكل المقابل :

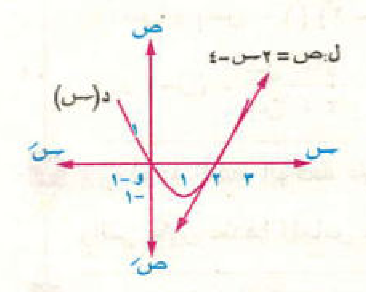


دَ (١) + رَ (١) = ...

(أ) -٢ (ب) -١

(جـ) ١ (د) ٢

(٣٩) الشكل المقابل يمثل منحنى الدالة د



، المستقيم ل يمس المنحنى عند

النقطة (٢ ، ٠) فإن : دَ (٢) = ...

(أ) صفر (ب) ١

(جـ) ٢ (د) ٣

ثانيًا الأسئلة المقالية

١ أوجد ميل المماس لكل من المنحنيات الآتية :

① $ص = س^٣ + س^٢ - س + ١$ عند النقطة (١ ، ٢) « ٤ »

② $ص = \frac{س}{س + ٢}$ عند النقطة (-١ ، -١) « ٢ »

③ $ص = \frac{س^٢ + س + ١}{س^٢ + ١}$ عند س = ١ « صفر »

٢ أوجد ميل العمودى على كل من المنحنيات الآتية :

① $ص = ٢ س^٣ - ٣ س^٢ - ١٢ س + ٥$ عند النقطة (-٢ ، ١) « $\frac{-١}{٢٤}$ »

② $ص = \left(\frac{٢ س - ٣}{س - ١}\right)^٢$ عند النقطة (٠ ، ٩) « $\frac{-١}{٦}$ »

③ $ص = س^٢ \left(س - \frac{٢}{س}\right)\left(س + \frac{٢}{س}\right)$ عند س = ٢ « $\frac{-١}{٣٢}$ »

٣ أوجد ميل كل من المماس والعمودى لكل من المنحنيات الآتية عند النقط المبينة :

(١) ص = ٢ س^{٣} − ٤ س + ٥ عند النقطة (−٢ ، −٣) « ٢٠ ، $-\frac{١}{٢٠}$ »

(٢) ص = س + $\frac{١}{س}$ عند س = ٤ « $\frac{١٥}{١٦}$ ، $-\frac{١٦}{١٥}$ »

(٣) ص = $\frac{٥}{س - ٢}$ عند س = ٢ « −٥ ، $\frac{١}{٥}$ »

(٤) ص = (س^{٢} − ٢) (س + ١) عند س = ١ « ٥ ، $-\frac{١}{٥}$ »

---

٤ أوجد ميل المماس للمنحنى : ص = (س + ٢) (س^{٣} + ١) عند نقط تقاطعه مع محور السينات. « −٧ ، ٣ »

---

٥ أوجد ميل المماس للمنحنى : د (س) = س^{٣} − ٢ س^{٢} + ٣ س − ١ عند نقطة تقاطعه مع محور الصادات.

« ٣ »

---

٦ أوجد قياس الزاوية الموجبة التى يصنعها المماس لكل من المنحنيات الآتية مع الاتجاه الموجب لمحور السينات عند النقطة المبينة :

(١) ص = س^{٣} − س^{٢} − ٤ عند النقطة (١ ، −٤) « ٤٥° »

(٢) ص = س^{٢} + $\frac{١}{س}$ − ١ عند س = ١ « ٤٥° »

(٣) ص = (س − ١) (٢ س + ١) عند النقطة (٠ ، −١) « ١٣٥° »

(٤) د (س) = $\frac{س^{٢} + ٥}{س^{٢} + ٢}$ عند النقطة (١ ، ٢) « ١٤٦ ١٨ ٣٦° »

---

٧ أوجد النقط الواقعة على المنحنى : ص = س^{٣} − ٦ س^{٢} − ١٥ س + ٢٠

والتى يكون عندها المماس موازيًا لمحور السينات. « (٥ ، −٨٠) ، (−١ ، ٢٨) »

---

٨ أوجد النقط الواقعة على المنحنى : ص = (س − ٣) (س^{٢} + ٢) والتى عندها ميل المماس يساوى ١١

« (٣ ، ٠) ، (−١ ، −١٢) »

---

٩ أوجد النقط الواقعة على المنحنى : ص = س^{٢} − ٢ س + ٣ والتى عندها يكون المماس للمنحنى :

(١) موازيًا محور السينات. (٢) عموديًا على المستقيم س − ٤ ص + ١ = ٠

« (١ ، ٢) ، (−١ ، ٦) »

---

١٠ أوجد النقط التى تقع على المنحنى : ص = س^{٣} − ٣ س^{٢} ويكون عندها المماس للمنحنى :

(١) موازيًا محور السينات. « (٠ ، ٠) ، (٢ ، −٤) »

(٢) عمودى على المستقيم س + ٩ ص + ٣ = ٠ « (٣ ، ٠) ، (−١ ، −٤) »

---

١١ أوجد النقط الواقعة على المنحنى : ص = س^{٣} − ٣ س^{٢} − ٥ س + ١٢ والتى يكون عندها المماس للمنحنى موازيًا المستقيم المار بالنقطتين (٣ ، ١) ، (٥ ، ٩) « (٣ ، −٣) ، (−١ ، ١٣) »



١٢ **أوجد النقط الواقعة على المنحنى :** ص = $\frac{س - ٢}{س + ٢}$ والتى يصنع المماس عندها زاوية موجبة قياسها $\frac{\pi}{٤}$ مع الاتجاه الموجب لمحور السينات. « (٠ ، -١) ، (-٤ ، ٣) »

---

١٣ **أوجد النقط الواقعة على المنحنى :** ص = ٣ $س^٢$ - ١١ س + ٥ والتى يكون عندها المماس :

(١) موازيًا المستقيم ٢ س + ص - ٥ = ٠

(٢) عموديًا على المستقيم ٢٥ ص + س = ٦

(٣) يصنع زاوية موجبة مع الاتجاه الموجب لمحور السينات ظلها = -١١

---

١٤ **أوجد معادلة المماس لكل من المنحنيات الآتية عند النقطة المبينة أمام كل منها :**

(١) ص = ٣ $س^٣$ - ٧ $س^٢$ + س - ٢ عند النقطة (١ ، -٥)

(٢) ص = $(س + ٣)^٣$ عند س = -١

(٣) ص = $\sqrt{س + ٧}$ عند س = ٢

(٤) ص = $\sqrt{س} + \frac{٤}{\sqrt{س}}$ عند النقطة (٤ ، ٤)

(٥) ص = ($س^٢$ + س) ($س^٢$ + ٥) عند النقطة (-٢ ، -٦)

(٦) ص = $\frac{٢ س - ٣}{٣ س + ٢}$ عند ص = -٨

---

١٥ **أوجد معادلة العمودى على كل من المنحنيات الآتية عند النقطة المبينة أمام كل منها :**

(١) ص = $س^٥$ - ٤ $س^٣$ + ٢ عند س = -١

(٢) ص = $\frac{س + ٢}{س - ٢}$ عند النقطة (٣ ، ٥)

(٣) ص = $\frac{س^٢ - ١}{٢ - س^٢}$ عند س = ٠

---

١٦ **أوجد معادلة كل من المماس والعمودى عليه لكل من المنحنيات الآتية عند النقطة المبينة أمام كل منها :**

(١) ص = ٢ $س^٣$ - ٤ $س^٢$ + ٣ عند س = ٢

(٢) ص = $س^٣$ + $س^٢$ - ١ عند س = -٢

(٣) ص = $(٣ س - ٥)^٧$ عند س = ٢

---

١٧ **أوجد معادلتى المماس والعمودى للمنحنى :** ص = $\frac{س + ٣}{س + ١}$ عند النقطة الواقعة على المنحنى والتى إحداثيها السينى = ١ هل النقطة أ (-٣ ، ٤) تقع على المماس ؟ **فسر إجابتك.**

١٨ **أوجد معادلة المماس للمنحنى :** ص = ٢ س^{٣} + ٦ س^{٢} + ٥ س الذى يصنع زاوية موجبة قياسها ١٣٥° مع الاتجاه الموجب لمحور السينات. « ص + س + ٢ = ٠ »

---

١٩ **أوجد معادلة المماس لمنحنى الدالة :** ص = (س − ٢) (س + ١) عند كل من نقطتى تقاطعه مع محور السينات. « ص − ٣ س + ٦ = ٠ ، ص + ٣ س + ٣ = ٠ »

---

٢٠ إذا كان المماس لمنحنى الدالة د حيث د (س) = أ س^{٢} + ب س + ٥ عند النقطة (−١ ، ٣) الواقعة عليه يصنع مع الاتجاه الموجب لمحور السينات زاوية موجبة قياسها ٤٥° **فأوجد قيمتى : أ ، ب** « ١ ، ٣ »

---

٢١ أوجد قيمة كل من الثابتين أ ، ب إذا كان ميل المماس للمنحنى ص = س^{٢} + أ س + ب عند النقطة (١ ، ٣) الواقعة عليه يساوى ٥ « ٣ ، −١ »

---

٢٢ إذا كان المنحنى ص = أ س^{٣} + ب س^{٢} يمس المستقيم ص = ٨ س + ٥ عند النقطة (−١ ، −٣) **فأوجد قيمتى : أ ، ب** « ٢ ، −١ »

---

٢٣ **أوجد قيمة :** أ التى تجعل المستقيم ص = ٤ س + أ مماسًا للمنحنى ص = س^{٢} + ٥ « ١ »

---

٢٤ **أثبت أن المماس المرسوم للمنحنى :** ص = س^{٢} + س − ١ عند النقطة (١ ، ١) يكون عموديًا على المماس المرسوم للمنحنى ص = ٢ − $\sqrt[3]{س}$ عند نفس النقطة.

---

٢٥ **أثبت أن :** المماس للمنحنى : ص = ٣ س^{٢} − ٥ س + ٢ عند النقطة (١ ، ٠) يصنع زاوية موجبة مع الاتجاه الموجب لمحور السينات قياسها $\frac{\pi}{٤}$ ثم أوجد معادلة هذا المماس. « ص = س − ١ »

---

٢٦ **أوجد معادلة المماس للمنحنى :** ص = س^{٢} − ٢ س + ٣ عند النقطة (س ، ٣) الواقعة عليه (وضح وجود إجابتين) « ص + ٢ س − ٣ = ٠ أ، ص − ٢ س + ١ = ٠ »

---

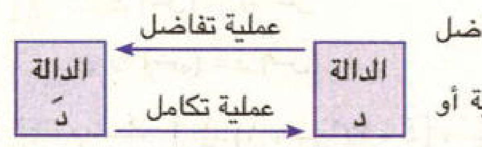
٢٧ **أوجد معادلة المماس للمنحنى :** ص = ٥ س − ٢ س^{٢} − ٤ عند النقطة (١ ، −١) الواقعة عليه وإذا قطع هذا المماس محور الصادات فى النقطة أ وقطع محور السينات فى النقطة ب أوجد مساحة Δ و أ ب حيث و (٠ ، ٠) « ص = س − ٢ ، ٢ وحدة مربعة »

الدرس

6

التكامل

درسنا فيما سبق كيفية الحصول على الدالة المشتقة دَ من الدالة الأصلية د وهو ما يسمى بالتفاضل أو الاشتقاق ولكن قد يكون المطلوب فى بعض التطبيقات الحصول على الدالة د إذا علمت الدالة المشتقة دَ ولذلك نلجأ لإجراء عملية عكسية لعملية التفاضل تسمى عملية التكامل وتسمى الدالة الناتجة بالدالة المشتقة العكسية أو الدالة الأصلية المقابلة للدالة.



تعريف

يقال إن الدالة ت مشتقة عكسية للدالة د إذا كانت تَ (س) = د (س) لكل س فى مجال د

فمثلًا :

إذا كانت : د (س) = $س^٢$ فإن : دَ (س) = ٢ س وحسب التعريف السابق تكون $س^٢$ هى مشتقة عكسية أو دالة أصلية مقابلة للدالة ٢ س إلا أننا نلاحظ أن الدوال $س^٢$ ، $س^٢$ + ٣ ، $س^٢$ − ٥ ، .... ، $س^٢$ + ث (حيث ث ثابت) جميعها لها نفس المشتقة ٢ س وهذا معناه أن المشتقة العكسية أو الدالة الأصلية المقابلة للدالة ٢ س ليست وحيدة.

ملاحظة

إذا كان : كل من $د_١$ ، $د_٢$ مشتقة عكسية للدالة د فإن : $د_١$ (س) = $د_٢$ (س) + ث

التكامل غير المحدد

مجموعة المشتقات العكسية للدالة د تسمى التكامل غير المحدد لهذه الدالة ويرمز لها بالرمز [$\int$ د (س) ءس]

ويقرأ [تكامل دالة س بالنسبة إلى س]

تعريف

إذا كان : تَ (س) = د (س)   فإن : $\int$ د (س) ءس = ت (س) + ث حيث ث ثابت اختيارى (ثابت التكامل)

فمثلًا : إذا كان : $\frac{ء}{ءس}$ (س^٣) = ٣ س^٢ ∴ $\int$ ٣ س^٢ ءس = س^٣ + ث

، إذا كان : $\frac{ء}{ءس}$ (٣ س^٥ + ١) = ١٥ س^٤ ∴ $\int$ ١٥ س^٤ ءس = ٣ س^٥ + ث

* لتعيين قيمة الثابت ث يلزم معرفة قيمة التكامل عند قيمة معينة للمتغير المستقل س وهذا خارج نطاق دراستك.

مثال ١

أثبت أن : ١ الدالة ت : ت (س) = $\frac{١}{٢}$ س^٨ هى مشتقة عكسية للدالة د : د (س) = ٤ س^٧

٢ $\int$ س $\sqrt{١ + س^٢}$ ءس = $\frac{١}{٣}$ (١ + س^٢)^{$\frac{٣}{٢}$} + ث

الحل

١ ∵ ت (س) = $\frac{١}{٢}$ س^٨ ∴ تَ (س) = $\frac{١}{٢}$ × ٨ س^٧ = ٤ س^٧

∴ تَ (س) = د (س) ∴ الدالة ت مشتقة عكسية للدالة د

٢ ∵ $\frac{ء}{ءس}$ [$\frac{١}{٣}$ (١ + س^٢)^{$\frac{٣}{٢}$} + ث] = $\frac{١}{٣}$ × $\frac{٣}{٢}$ (١ + س^٢)^{$\frac{١}{٢}$} × ٢ س = س (١ + س^٢)^{$\frac{١}{٢}$} = س $\sqrt{١ + س^٢}$

∴ $\int$ س $\sqrt{١ + س^٢}$ ءس = $\frac{١}{٣}$ (١ + س^٢)^{$\frac{٣}{٢}$} + ث

قاعدة ١

$\int$ س^ن ءس = $\frac{س^{ن+١}}{ن+١}$ + ث حيث ث ثابت ، ن ≠ -١

فمثلًا :

* $\int$ س^٥ ءس = $\frac{س^٦}{٦}$ + ث = $\frac{١}{٦}$ س^٦ + ث
* $\int$ س^{$\frac{٣}{٤}$} ءس = $\frac{س^{\frac{٧}{٤}}}{\frac{٧}{٤}}$ + ث = $\frac{٤}{٧}$ س^{$\frac{٧}{٤}$} + ث
* $\int$ $\frac{١}{ص^٤}$ ءص = $\int$ ص^{-٤} ءص = $\frac{ص^{-٣}}{-٣}$ + ث = $\frac{-١}{٣ ص^٣}$ + ث
* $\int$ $\frac{١}{\sqrt[٣]{ن}}$ ءن = $\int$ ن^{-$\frac{١}{٣}$} ءن = $\frac{ن^{\frac{٢}{٣}}}{\frac{٢}{٣}}$ + ث = $\frac{٣}{٢}$ $\sqrt[٣]{ن^٢}$ + ث

لاحظ أن : القاعدة السابقة تعنى أنه عند إيجاد التكامل نقوم بزيادة الأس واحد ونقسم على الأس الجديد.

* لاحظ أن برهان القاعدة السابقة ينتج مباشرة بمفاضلة الطرف الأيسر كما يلى :

$\frac{ء}{ءس}$ ($\frac{س^{ن+١}}{ن+١}$ + ث) = $\frac{(ن+١) س^ن}{(ن+١)}$ + صفر = س^ن ∴ $\int$ س^ن ءس = $\frac{س^{ن+١}}{ن+١}$ + ث

قاعدة ٢

$\int$ ٩ د (س) ٤س = ٩ $\int$ د (س) ٤س   حيث : ٩ ثابت ≠ صفر

فمثلًا : $\int$ ٦ س^{٢} ٤س = ٦ $\int$ س^{٢} ٤س = ٦ × $\frac{س^{٣}}{٣}$ + ث = ٢ س^{٣} + ث

نتيجة

$\int$ ٩ ٤س = ٩ س + ث   حيث ٩ ثابت ومنها نجد أن : $\int$ ٤س = س + ث ، $\int$ صفر ٤س = ث

فمثلًا : $\int$ ٧ ٤س = ٧ س + ث ، $\int$ $-\sqrt{٣}$ ٤ـه = $-\sqrt{٣}$ ـه + ث

قاعدة ٣

$\int$ [د (س) ± ر (س)] ٤س = $\int$ د (س) ٤س ± $\int$ ر (س) ٤س

فمثلًا : $\int$ (٢ س^{٣} + ٤ س) ٤س = $\int$ ٢ س^{٣} ٤س + $\int$ ٤ س ٤س

= $\left(\frac{٢ س^{٤}}{٤} + ث_{١}\right) + \left(\frac{٤ س^{٢}}{٢} + ث_{٢}\right)$

= $\frac{١}{٢}$ س^{٤} + ٢ س^{٢} + ث$_{١}$ + ث$_{٢}$

= $\frac{١}{٢}$ س^{٤} + ٢ س^{٢} + ث (حيث ث = ث$_{١}$ + ث$_{٢}$)

ملاحظة

يمكن تعميم قاعدة ③ السابقة على أى عدد محدود من الدوال

$\int$ (د$_{١}$ (س) ± د$_{٢}$ (س) ± ..... ± د$_{ن}$ (س)) ٤س

= $\int$ د$_{١}$ (س) ٤س ± $\int$ د$_{٢}$ (س) ٤س ± ..... ± $\int$ د$_{ن}$ (س) ٤س

مثال ٢

أوجد : ١ $\int \frac{٣}{٢ س^{٢}}$ ٤س ٢ $\int$ ٥ ف $\sqrt{ف}$ ٤ف

٣ $\int \frac{٤}{\sqrt[٥]{س^{٣}}}$ ٤س ٤ $\int \frac{١}{س^{٢}\sqrt{س}}$ ٤س

الحل

١ $\int \frac{٣}{٢ س^{٢}}$ ٤س = $\int \frac{٣}{٢}$ س$^{-٢}$ ٤س = $\frac{٣}{٢}$ $\int$ س$^{-٢}$ ٤س = $\frac{٣}{٢}$ × $\frac{س^{-١}}{-١}$ + ث = $\frac{-٣}{٢ س}$ + ث

٢ $\int$ ٥ ف $\sqrt{ف}$ ٤ف = $\int$ ٥ ف × ف$^{\frac{١}{٢}}$ ٤ف = ٥ $\int$ ف$^{\frac{٣}{٢}}$ ٤ف = $\frac{٥ × ٢ ف^{\frac{٥}{٢}}}{٥}$ + ث = ٢ $\sqrt{ف^{٥}}$ + ث

[٣] $\int \frac{4}{\sqrt[5]{س^3}} ء س = \int 4 س^{-\frac{3}{5}} ء س = \frac{4 س^{\frac{2}{5}}}{\frac{2}{5}} + ث = 10 س^{\frac{2}{5}} + ث$

[٤] $\int \frac{1}{س^3 \sqrt[3]{س}} ء س = \int س^{-3} \times س^{-\frac{1}{3}} ء س = \int س^{-\frac{10}{3}} ء س = \frac{س^{-\frac{7}{3}}}{-\frac{7}{3}} + ث = \frac{-3}{7 \sqrt[3]{س^7}} + ث$

مثال ③

أوجد : [١] $\int (3 س^2 - 4 س + 5) ء س$

[٢] $\int (8 + \sqrt{س} + \frac{1}{\sqrt{س}}) ء س$

[٣] $\int (2 س \sqrt{س} - \frac{4}{3 \sqrt{س}} + 8 س^{-\frac{7}{4}} - 1) ء س$

الحل

[١] $\int (3 س^2 - 4 س + 5) ء س = \frac{3 س^3}{3} - \frac{4 س^2}{2} + 5 س + ث = س^3 - 2 س^2 + 5 س + ث$

[٢] $\int (8 + \sqrt{س} + \frac{1}{\sqrt{س}}) ء س = \int (8 + س^{\frac{1}{2}} + س^{-\frac{1}{2}}) ء س = 8 س + \frac{س^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + \frac{س^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} + ث$

$= 8 س + \frac{2}{3} س^{\frac{3}{2}} + 2 س^{\frac{1}{2}} + ث$

[٣] $\int (2 س \sqrt{س} - \frac{4}{3 \sqrt{س}} + 8 س^{-\frac{7}{4}} - 1) ء س = \int (2 س^{\frac{3}{2}} - \frac{4}{3} س^{-\frac{1}{2}} + 8 س^{-\frac{7}{4}} - 1) ء س$

$= \frac{2 س^{\frac{5}{2}}}{\frac{5}{2}} - \frac{4 س^{\frac{1}{2}}}{3 \times \frac{1}{2}} + \frac{8 س^{-\frac{7}{4} + 1}}{-\frac{7}{4} + 1} - س + ث$

$= \frac{4}{5} س^{\frac{5}{2}} - \frac{8}{3} س^{\frac{1}{2}} - \frac{32}{3} س^{\frac{-3}{4}} - س + ث$

مثال ④

أوجد : [١] $\int (س - 2)(س + 1) ء س$

[٢] $\int س (2 س - 3)^2 ء س$

[٣] $\int (س - \frac{1}{س})^2 ء س$

[٤] $\int \frac{س^4 - 2 س^2 + 6}{س^2} ء س$

[٥] $\int \frac{س^2 - 5 س - 6}{س + 1} ء س$

[٦] $\int \frac{س^3 - 8}{س - 2} ء س$

الحل

[١] $\int (س - 2)(س + 1) ء س = \int (س^2 - س - 2) ء س$

$= \frac{1}{3} س^3 - \frac{1}{2} س^2 - 2 س + ث$

[٢] $\int س (2 س - 3)^2 ء س = \int س (4 س^2 - 12 س + 9) ء س$

$= \int (4 س^3 - 12 س^2 + 9 س) ء س$

$= س^4 - 4 س^3 + \frac{9}{2} س^2 + ث$

لاحظ أنه :

لا توجد قاعدة عامة لإيجاد تكامل حاصل ضرب دالتين أو خارج قسمتهما لذلك نلجأ إلى إجراء عملية الضرب أو القسمة أولًا قبل إجراء عملية التكامل.

3. $\int (س - \frac{1}{س})^2 \, ءس = \int (س^2 - 2 + \frac{1}{س^2}) \, ءس = \int (س^2 - 2 + س^{-2}) \, ءس$

$= \frac{1}{3} س^3 - 2 س - \frac{1}{س} + ث$

4. $\int \frac{س^4 - 2 س^2 + 6}{س^2} \, ءس = \int (س^2 - 2 + 6 س^{-2}) \, ءس = \frac{1}{3} س^3 - 2 س + \frac{6 س^{-1}}{-1} + ث$

$= \frac{1}{3} س^3 - 2 س - \frac{6}{س} + ث$

5. $\int \frac{س^2 - 5 س - 6}{س + 1} \, ءس = \int \frac{(س + 1)(س - 6)}{(س + 1)} \, ءس = \int (س - 6) \, ءس = \frac{س^2}{2} - 6 س + ث$

6. $\int \frac{س^3 - 8}{س - 2} \, ءس = \int \frac{(س - 2)(س^2 + 2 س + 4)}{(س - 2)} \, ءس$

$= \int (س^2 + 2 س + 4) \, ءس = \frac{س^3}{3} + \frac{2 س^2}{2} + 4 س + ث$

$= \frac{1}{3} س^3 + س^2 + 4 س + ث$

قاعدة 4

$\int (أ س + ب)^ن \, ءس = \frac{1}{أ} \times \frac{(أ س + ب)^{ن+1}}{ن + 1} + ث$ حيث ث ثابت ، $ن \neq -1$

مثال 5

أوجد :

1. $\int (2 س + 5)^3 \, ءس$
2. $\int [(7 - 3 س)^6 + 9] \, ءس$
3. $\int \frac{8}{(3 - 2 س)^5} \, ءس$
4. $\int \sqrt{4 س + 1} \, ءس$
5. $\int \frac{ءس}{\sqrt{4 س + 1}}$
6. $\int \sqrt{س - 4} \, (س - 4)^7 \, ءس$

الحـــل

1. $\int (2 س + 5)^3 \, ءس = \frac{(2 س + 5)^4}{4 \times 2} + ث = \frac{1}{8} (2 س + 5)^4 + ث$

2. $\int [(7 - 3 س)^6 + 9] \, ءس = \frac{(7 - 3 س)^7}{7 \times -3} + 9 س + ث = \frac{-1}{21} (7 - 3 س)^7 + 9 س + ث$

3. $\int \frac{8}{(3 - 2 س)^5} \, ءس = \int 8 (3 - 2 س)^{-5} \, ءس = \frac{8 (3 - 2 س)^{-4}}{-4 \times -2} + ث = (3 - 2 س)^{-4} + ث$

٤ $\int \sqrt{٤س + ١}\ ءس = \int (٤س + ١)^{\frac{١}{٢}}\ ءس = \frac{(٤س + ١)^{\frac{٣}{٢}}}{٤ \times \frac{٣}{٢}} + ث = \frac{١}{٦}\ (٤س + ١)^{\frac{٣}{٢}} + ث$

٥ $\int \frac{ءس}{\sqrt{٤س + ١}} = \int (٤س + ١)^{-\frac{١}{٢}}\ ءس = \frac{(٤س + ١)^{\frac{١}{٢}}}{٤ \times \frac{١}{٢}} + ث = \frac{١}{٢}\ (٤س + ١)^{\frac{١}{٢}} + ث$

٦ $\int \sqrt{س - ٤}\ (س - ٤)^{٧}\ ءس = \int (س - ٤)^{\frac{١}{٢}} (س - ٤)^{٧}\ ءس = \int (س - ٤)^{٧.٥}\ ءس = \frac{(س - ٤)^{٨.٥}}{٨.٥} + ث$

مثال ٦

أوجد :

١ $\int س^{٦} \left(٣ - \frac{٢}{س}\right)^{٦} ءس$ ٢ $\int (س \sqrt{\frac{٢}{س^{٢}} - \frac{٣}{س}})\ ءس$

الحل

١ $\int س^{٦} \left(٣ - \frac{٢}{س}\right)^{٦} ءس = \int \left(س \left(٣ - \frac{٢}{س}\right)\right)^{٦} ءس = \int (٣س - ٢)^{٦}\ ءس = \frac{(٣س - ٢)^{٧}}{٧ \times ٣} + ث$

$= \frac{١}{٢١}\ (٣س - ٢)^{٧} + ث$

٢ $\int (س \sqrt{\frac{٢}{س^{٢}} - \frac{٣}{س}})\ ءس = \int \sqrt{س^{٢} \left(\frac{٢}{س^{٢}} - \frac{٣}{س}\right)}\ ءس = \int \sqrt{٢ - ٣س}\ ءس$

$= \int (٢ - ٣س)^{\frac{١}{٢}}\ ءس = \frac{(٢ - ٣س)^{\frac{٣}{٢}}}{\frac{٣}{٢} \times -٣} + ث$

$= \frac{-٢}{٩}\ (٢ - ٣س)^{\frac{٣}{٢}} + ث$

ملاحظة

* $\frac{ء}{ءس} \int د(س)\ ءس = د(س)$ بينما $\int \frac{ء}{ءس}[د(س)]\ ءس = د(س) + ث$

فمثلًا : $\frac{ء}{ءس} \int س^{٥}\ ءس = س^{٥}$ بينما $\int \frac{ء}{ءس}(س^{٥})\ ءس = س^{٥} + ث$

تمارين 13 على التكامل



📖 من أسئلة الكتاب المدرسى • فهم • تطبيق • مستويات عليا

أولًا أسئلة الاختيار من متعدد

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

① $\int س \, ءس = ... + ث$

(أ) $س^{٢}$ (ب) $\frac{١}{٢} س$ (جـ) $\frac{١}{٢} س^{٢}$ (د) ١

② $\int ص^{٨} \, ءص = ... + ث$

(أ) $٨ ص^{٧}$ (ب) $\frac{١}{٩} ص^{٩}$ (جـ) صفر (د) $ص^{٩}$

③ $\int (س + ٢) \, ءس = ... + ث$

(أ) $٢ س^{٢} + ٢ س$ (ب) $س^{٢} + ٢ س$ (جـ) $\frac{١}{٢} س^{٢} + ٢ س$ (د) $(س + ٢)^{٢}$

④ 📖 $\int (س^{٢} - ٣) \, ءس = ...$

(أ) $٢ س$ (ب) $س^{٣} - ٣ س$

(جـ) $\frac{١}{٣} س^{٣} - ٣ س + ث$ (د) $٢ س - ٣ + ث$

⑤ المشتقة العكسية للدالة د : $د(س) = ٣ س^{٢} - ٢ س + ٥$ هى ....

(أ) $٦ س - ٢$ (ب) $٣ س^{٢} - ٢ س + ٥$

(جـ) $س^{٣} - س^{٢} + ٥ س + ث$ (د) $\frac{١}{٣} س^{٣} - \frac{١}{٢} س^{٢} + ٥ س + ث$

⑥ $\int ٦ س^{-٣} \, ءس = ... + ث$

(أ) $-٣ س$ (ب) $-٣ س^{-١}$ (جـ) $-٣ س^{-٢}$ (د) $-١٨ س^{-٤}$

⑦ $\int س^{\frac{٢}{٣}} \, ءس = ... + ث$

(أ) $\frac{٣}{٥} س^{\frac{٥}{٣}}$ (ب) $\frac{٥}{٣} س^{\frac{٥}{٣}}$ (جـ) $\frac{٢}{٣} س^{-\frac{١}{٣}}$ (د) $س^{\frac{٥}{٣}}$

⑧ $\int \frac{ءس}{٥ س^{٤}} = ... + ث$

(أ) $\frac{٥}{س^{٥}}$ (ب) $\frac{-١}{٥ س^{٣}}$ (جـ) $\frac{-١}{١٥ س^{٣}}$ (د) $٥ س^{٣}$

⑨ 📖 $\int \sqrt[٧]{س^{٥}} \, ءس = ... + ث$

(أ) $\frac{١٢}{٧} س^{\frac{١٢}{٧}}$ (ب) $\sqrt[٧]{\frac{س^{٦}}{٦}}$ (جـ) $\frac{١}{٦} س^{٦}$ (د) $\frac{٧}{١٢} س^{\frac{١٢}{٧}}$

(١٠) $\int ٥ \sqrt{س^٣}\ ءس = \dots\dots\dots$

(أ) $٢\sqrt{س^٥}$ (ب) $\frac{٥}{٢}\sqrt{س^٤}$ (جـ) $٥ س^{\frac{٥}{٢}}$ (د) $\frac{٥}{٢} س^٢$

(١١) $\int \frac{س}{\sqrt{س}}\ ءس = \dots\dots\dots + ث$

(أ) $\frac{١}{٢} س^{\frac{١}{٢}}$ (ب) $\frac{٢}{٣} س^{\frac{٣}{٢}}$ (جـ) $٢ س^{-\frac{١}{٢}}$ (د) $\frac{٢}{٣} س^{-\frac{٣}{٤}}$

(١٢) $\int \left(\frac{٢}{ص^٣} - \frac{٤}{ص^٥}\right) ءص = \dots\dots\dots + ث$

(أ) $-ص^٢ + ص^٤$

(ب) $-ص^{-٢} + ص^{-٤}$

(جـ) $\frac{٢}{٣} ص^{-٣} - \frac{٤}{٥} ص^{-٥}$

(د) $-٢ ص^{-٢} + ٤ ص^{-٤}$

(١٣) $\int (س^٢ - ٣ س - ١)\ ءس = \dots\dots\dots + ث$

(أ) $\frac{١}{٣} س^٣ + ٣ س - س$

(ب) $\frac{١}{٣} س^٣ - \frac{٣}{٢} س^٢ - س$

(جـ) $س^٣ - ٣ س^٢ - س$

(د) $\frac{١}{٢} (س^٢ - ٣ س - ١)^٢$

(١٤) $\int ٢ (٣ ع^٢ - ٥)\ ءع = \dots\dots\dots + ث$

(أ) $(٣ ع^٢ - ٥)^٢$

(ب) $٦ ع^٢ - ١٠$

(جـ) $٢ ع^٣ - ١٠ ع$

(د) $ع^٢ - ٥ ع$

(١٥) 📖 $\int (٢\sqrt{س} - ٦ س^٢)\ ءس = \dots\dots\dots + ث$

(أ) $\frac{٤}{٣} س^{\frac{٣}{٢}} - ٢ س^٣$

(ب) $\frac{٤}{٣} س^{\frac{١}{٣}} - ٢ س^٣$

(جـ) $س^{\frac{٢}{٣}} - ٣ س$

(د) $س^{-\frac{١}{٢}} - ١٢ س$

(١٦) $\int (٣ - \frac{١}{\sqrt{س}})\ ءس = \dots\dots\dots + ث$

(أ) $٣ س - \frac{١}{٢} س^{\frac{١}{٢}}$

(ب) $\frac{٣}{٢} س^٢ - \frac{١}{س}$

(جـ) $٣ س - \frac{١}{٢ س}$

(د) $٣ س - ٢ س^{\frac{١}{٢}}$

(١٧) 📖 $\int س (س + ٣)\ ءس = \dots\dots\dots + ث$

(أ) $\frac{١}{٢} (س + ٣)^٢$

(ب) $\frac{١}{٣} س^٣ + \frac{٣}{٢} س^٢$

(جـ) $س^٢ + ٣ س$

(د) $س^٣ + ٣ س$

(١٨) 📖 $\int (س - ٥)(س + ١)\ ءس = \dots\dots\dots + ث$

(أ) $\frac{١}{٣} س^٣ - ٢ س^٢ - ٥ س$

(ب) $س^٣ - ٢ س^٢ - ٥ س$

(جـ) $\frac{٢}{٣} س^٣ - ٢ س^٢ + ٥ س$

(د) $\frac{١}{٣} س^٣ - ٢ س^٢ + ٥ س$

(١٩) $\int (س + ٢)(س - ٢)\, ءس =$ ....

(أ) $س + ٤ + ث$ (ب) $\frac{١}{٣} س^{٣} - ٤ س + ث$

(جـ) $س^{٣} - ٤ س + ث$ (د) $(س^{٢} - ٤)^{٢} + ث$

(٢٠) $\int \frac{س^{٢} + ٣ س}{س}\, ءس =$ ....

(أ) $س + ٣$ (ب) $\frac{١}{٢} س^{٢} + ٣ س + ث$

(جـ) $س^{٢} + ٣ س + ث$ (د) $\frac{س^{٣} + ٣ س^{٢}}{س^{٢}}$

(٢١) $\int (س^{٢} - ٢)^{٢}\, ءس =$ .... $+ ث$

(أ) $\frac{١}{٣} (س^{٢} - ٢)^{٣}$ (ب) $٢ (س^{٢} - ٢)(٢ س)$

(جـ) $\frac{١}{٥} س^{٥} - \frac{٤}{٣} س^{٣} + ٤ س$ (د) $س^{٤} - ٤ س^{٢} + ٤$

(٢٢) $\int (\sqrt{س} - ١)^{٢}\, ءس =$ .... $+ ث$

(أ) $\frac{١}{٣} (\sqrt{س} - ١)$ (ب) $\frac{١}{٢} س^{٢} - \frac{٤}{٣} س^{\frac{٣}{٢}} + س$

(جـ) $\frac{١}{٣} (\sqrt{س} - ١)^{٣}$ (د) $\frac{١}{٢} س^{٢} + \frac{٤}{٣} س^{\frac{٣}{٢}}$

(٢٣) $\int (س - \frac{١}{س})(س + \frac{١}{س})(س^{٢} + \frac{١}{س^{٢}})\, ءس =$ .... $+ ث$

(أ) $س^{٥} + س^{-٣}$ (ب) $س^{٤} - \frac{١}{س^{٤}}$

(جـ) $\frac{١}{٥} س^{٥} + \frac{١}{٣} س^{-٣}$ (د) $س^{٥} + \frac{١}{٣} س^{-٣}$

(٢٤) $\int \frac{٢ س^{٢} + ٣}{س^{٢}}\, ءس =$ .... $+ ث$

(أ) $٢ س - ٣$ (ب) $\frac{١}{٢} س^{٢} - ٣ س^{-١}$

(جـ) $س^{٢} - ٣ س$ (د) $٢ س - ٣ س^{-١}$

(٢٥) $\int \frac{س^{٢} - ١}{س - ١}\, ءس =$ .... $+ ث$

(أ) $س + ١$ (ب) $\frac{١}{٢} س^{٢} + س$ (جـ) $س^{٢} + س$ (د) $س^{٢} + ٢ س$

(٢٦) $\int \frac{س^{٣} - س}{س^{٢} + س}\, ءس =$ .... $+ ث$

(أ) $\frac{١}{٢} س^{٢} - س$ (ب) $س^{٢} - س$ (جـ) $\frac{٣}{٢} س^{٣} - \frac{١}{٢} س$ (د) $٢ س^{٢} + ١$

(٢٧) $\int \frac{س^{٣} + ٨}{س^{٢} - ٢ س + ٤}\, ءس =$ .... $+ ث$

(أ) $\frac{١}{٤} (س + ٢)^{٤}$ (ب) $س + ٢$ (جـ) $\frac{١}{٢} س^{٢} + ٢ س$ (د) $\frac{١}{٣} (س + ٢)^{٣}$

(٢٨) $\int (8 - 3س)^4$ ءس = ... + ث

(أ) $\frac{1}{15}(8 - 3س)^5$ (ب) $\frac{1}{5}(8 - 3س)^5$

(جـ) $-\frac{1}{5}(8 - 3س)^5$ (د) $-\frac{1}{15}(8 - 3س)^5$

(٢٩) $\int (2س + 1)^5$ ءس = ... + ث

(أ) $(2س + 1)^6$ (ب) $\frac{1}{2}(2س + 1)^6$

(جـ) $\frac{1}{12}(2س + 1)^6$ (د) $\frac{1}{6}(2س + 1)^6$

(٣٠) إذا كانت : ص = $\int (س^2 - 5س + 1)$ ءس فإن : $\frac{ءص}{ءس}$ = ...

(أ) $س^2 - 5س + 1$ (ب) $س^3 - 5س^2 + س$

(جـ) $\frac{1}{3}س^3 - \frac{5}{2}س^2 + س$ (د) $\frac{1}{3}س^3 - \frac{5}{2}س^2 + س + ث$

(٣١) $\int (س - 2)(س^2 + 2س + 4)$ ءس = ... + ث

(أ) $\frac{1}{4}س^4 - 4س^3 - 8س$ (ب) $\frac{1}{3}س^3 + س^2 + 4س$

(جـ) $\frac{1}{4}س^4 - 8س$ (د) $س^3 - 8$

(٣٢) $\int (س - 1)(س^2 - 2س + 1)$ ءس = ... + ث

(أ) $\frac{1}{4}(س - 1)^4$ (ب) $\frac{1}{3}س^3 - س^2 + س$

(جـ) $\frac{1}{4}س^4 - س$ (د) $س^4 - 4س$

(٣٣) $\int \frac{12}{(2س - 5)^4}$ ءس = ... + ث

(أ) $\frac{-1}{(2س - 5)^3}$ (ب) $\frac{6}{(2س - 5)^3}$

(جـ) $\frac{2}{(2س - 5)^3}$ (د) $\frac{-2}{(2س - 5)^3}$

(٣٤) $\int س^5 (1 + \frac{3}{س})^5$ ءس = ... + ث

(أ) $(س + 3)^5$ (ب) $\frac{1}{6}(س + 3)^6$

(جـ) $\frac{1}{6}(1 + \frac{3}{س})^6$ (د) $\frac{1}{36}س^6(1 + \frac{3}{س})^6$

(٣٥) $\int س^5 \sqrt{\frac{6}{س^4} + \frac{3}{س^5}}$ ءس = ... + ث

(أ) $\frac{5}{36}(6س + 3)^{\frac{6}{5}}$ (ب) $\sqrt{6س + 3}$

(جـ) $4(6س + 3)^{\frac{3}{2}}$ (د) $\frac{7}{36}(6س + 3)^{\frac{5}{6}}$



(٣٦) إذا كان : $\int$ أ $س^٢$ ءس = ٢ $س^٤$ + ث   فإن : أ = ...

(أ) ٨   (ب) ٦   (جـ) ٤   (د) ١٦

(٣٧) $\int \frac{س^٢ + أ^٢ س}{س}$ ءس = ... + ث

(أ) س + $أ^٢$ (ب) $\frac{١}{٢}$ $س^٢$ + $\frac{١}{٣}$ $أ^٣$

(جـ) $\frac{١}{٢}$ $س^٢$ + $أ^٢$ س   (د) $س^٢$ + $أ^٣$

(٣٨) $\int \frac{س^٢}{س + ٢}$ ءس + $\int \frac{٤ س + ٤}{س + ٢}$ ءس = ... + ث

(أ) $\frac{١}{٢}$ $س^٢$ + ٢ س   (ب) $\frac{-١}{٢}$ $س^٢$ + ٢ س

(جـ) $س^٢$ + ٤ س   (د) $س^٢$ + س

(٣٩) $\int \frac{س - \frac{١}{٢}}{\sqrt{٢ س - ١}}$ ءس = ... + ث

(أ) $\frac{١}{٦}$ $\sqrt{٢ س - ١}$ (ب) $\frac{١}{٦}$ $\sqrt{(٢ س - ١)^٣}$

(جـ) $\frac{١}{٦ \sqrt{٢ س - ١}}$ (د) $\frac{١}{٢}$ $\sqrt{(٢ س - ١)^٣}$

(٤٠) $\int \frac{ء}{ءس}$ [د (س)] ءس = ...

(أ) د (س)   (ب) د (س) + ث   (جـ) $\frac{ء}{ءس}$ [د (س)]   (د) $\int$ د (س) ءس

(٤١) إذا كان : $\int$ $س^ن$ ءس = $\frac{١}{٣}$ $س^٣$ + ث   فإن : ن = ...

(أ) -١   (ب) ١   (جـ) ٢   (د) ٣

(٤٢) إذا كان : $\int$ $س^٣$ ءس = أ $س^٤$ + ث   فإن : أ = ...

(أ) ٤   (ب) ٣   (جـ) $\frac{١}{٣}$ (د) $\frac{١}{٤}$

(٤٣) $\int$ $(س^٢ + ٤ س + ٤)^٥$ ءس = ... + ث

(أ) $\frac{١}{٦}$ $(س^٢ + ٤ س + ٤)^٦$ (ب) ٦ $(س^٢ + ٤ س + ٤)^٥$

(جـ) $\frac{١}{١١}$ $(س + ٢)^{١١}$ (د) ١١ $(س + ٢)^{١١}$

(٤٤) الدالة د : د (س) = $\frac{١}{س^٤ + ١}$ هى مشتقه عكسية للدالة ....

(أ) هـ (س) = $\frac{-١}{(س^٤ + ١)^٢}$ (ب) ر (س) = $\frac{-٤ س^٣}{س^٤ + ١}$

(جـ) ق (س) = $\frac{٤ س^٣}{س^٤ + ١}$ (د) م (س) = $\frac{-٤ س^٣}{(س^٤ + ١)^٢}$

ثانيًا الأسئلة المقالية

١ أوجد كلًّا مما يأتي :

① $\int \text{س}^{2} \, \text{ءس}$

② $\int \text{صفر} \, \text{ءس}$

③ $\int \frac{\text{ءس}}{5}$

④ $\int -4\,\text{س}^{3} \, \text{ءس}$

⑤ $\int \frac{12}{5}\,\text{ف}^{5} \, \text{ءف}$

⑥ $\int -2\,\text{ع} \, \text{ءع}$

⑦ $\int -\frac{8}{5}\,\text{س}^{-3} \, \text{ءس}$

---

٢ أوجد كلًّا من التكاملات الآتية :

① $\int 6\,\text{ع}^{-\frac{2}{3}} \, \text{ءع}$

② $\int \sqrt{\text{س}} \, \text{ءس}$

③ $\int 5\sqrt[3]{\text{س}} \, \text{ءس}$

④ $\int \frac{1}{\sqrt[5]{\text{س}^{3}}} \, \text{ءس}$

⑤ $\int \frac{12}{\text{س}\sqrt{\text{س}}} \, \text{ءس}$

⑥ $\int \frac{6\sqrt{\text{ص}}}{\sqrt[3]{\text{ص}}} \, \text{ءص}$

---

٣ أوجد كلًّا من التكاملات الآتية :

① $\int (\text{س} + 1) \, \text{ءس}$

② $\int (5 - 2\text{ن}) \, \text{ءن}$

③ $\int (3\text{س}^{2} + 2\text{س} - 1) \, \text{ءس}$

④ $\int (4\text{س}^{3} - 6\text{س}^{2} + 8\text{س} - 5) \, \text{ءس}$

⑤ $\int (\text{ن}^{3} - 6\text{ن}^{4}) \, \text{ءن}$

⑥ $\int (\text{س}^{4} - \text{س}^{-2} + 5) \, \text{ءس}$

⑦ $\int \left(\frac{1}{\text{س}^{2}} + \sqrt{\text{س}} + 3\right) \text{ءس}$

⑧ $\int \left(\frac{3}{\text{س}^{3}} + \frac{2}{\text{س}^{2}} + 5\right) \text{ءس}$

⑨ $\int \left(\text{س}^{3} + \sqrt{\text{س}}\right) \text{ءس}$

⑩ $\int (\text{أ}\text{س}^{2} - \text{ب}\text{س} + \text{حـ}) \, \text{ءس}$

⑪ $\int \left(\frac{5}{3}\sqrt[3]{\text{س}^{2}} + \frac{7}{4}\sqrt[4]{\text{س}^{3}}\right) \text{ءس}$

---

٤ أوجد كلًّا من التكاملات الآتية :

① $\int 7\text{س}^{2}(\text{س}^{4} - 1) \, \text{ءس}$

② $\int \text{س}^{2}\left(2\text{س} + \frac{1}{\text{س}}\right) \text{ءس}$

③ $\int (2\text{س} + 3)(\text{س} - 1) \, \text{ءس}$

④ $\int (\text{س} - 2)(4\text{س}^{2} + 1) \, \text{ءس}$

⑤ $\int \text{س}^{3}(2 - \text{س})^{2} \, \text{ءس}$

⑥ $\int (1 - \text{س}^{2})^{2}(1 + \text{س}^{2})^{2} \, \text{ءس}$

⑦ $\int \left(\text{س} + \frac{1}{\text{س}}\right)^{2} \text{ءس}$

⑧ $\int \sqrt{\text{س}}\left(1 + \sqrt{\text{س}}\right) \text{ءس}$

⑨ $\int \left(\frac{1}{\text{ع}^{2}} + 2\text{ع}^{2}\right)^{2} \text{ءع}$

⑩ $\int \sqrt{\text{س}}\left(\text{س}\sqrt{\text{س}} + 2\sqrt{\text{س}} - \frac{1}{\sqrt{\text{س}}}\right) \text{ءس}$

٥ أوجد كلًّا من التكاملات الآتية :

① $\int \frac{٣ س^{٢} - ٤ س}{س} \, ء س$

② $\int \frac{س^{٥} - ٣ س^{٣} + ٢}{س^{٢}} \, ء س$

③ $\int \frac{س^{٧} + ٥ س^{٦} - س^{٣}}{س^{٣}} \, ء س$

④ $\int \frac{٤ س^{٢} - ٩}{٢ س - ٣} \, ء س$

⑤ $\int \frac{س^{٢} - ٥ س + ٦}{س - ٢} \, ء س$

⑥ $\int \frac{س^{٢} - ٢ س - ٨}{س + ٢} \, ء س$

⑦ $\int \frac{س^{٣} - ٢٧}{س - ٣} \, ء س$

⑧ $\int \frac{س^{٣} + ١}{س + ١} \, ء س$

⑨ $\int \frac{٤ س^{٣} - ١٢ س^{٢}}{س - ٣} \, ء س$

⑩ $\int \frac{(س + ١)^{٢}}{\sqrt{س}} \, ء س$

⑪ $\int \frac{(س^{٢} + ٢)^{٢}}{س^{٢}} \, ء س$

٦ أوجد كلًّا مما يأتى :

① $\int (س - ٧)^{٩} \, ء س$

② $\int ٦ (س - ٢)^{٥} \, ء س$

③ $\int ٣ (٣ س + ١)^{٢} \, ء س$

④ $\int (٢ س - ٣)^{٥} \, ء س$

⑤ $\int ٧ (٢ س - ٧)^{٦} \, ء س$

⑥ $\int (٢ س - ٣)^{\frac{٧}{٢}} \, ء س$

⑦ $\int (٢ س - ٧)^{-٣} \, ء س$

⑧ $\int (٣ س + ٥)^{-٩} \, ء س$

⑨ $\int \left((٣ - ٢ س)^{٥} + ٣\right) ء س$

⑩ $\int \frac{١٥}{(٣ س - ٥)^{٦}} \, ء س$

⑪ $\int \sqrt{٢ س + ٧} \, ء س$

⑫ $\int \sqrt[٣]{(٤ - ٣ س)^{٢}} \, ء س$

⑬ $\int ١٥ \sqrt{(٣ س - ٢)^{٥}} \, ء س$

⑭ $\int \frac{٧}{\sqrt{٣ س - ٤}} \, ء س$

⑮ $\int \frac{ء س}{\sqrt[٥]{٢ س + ٩}}$

٧ أوجد كلًّا من التكاملات الآتية :

① $\int س^{٦} \left(١ - \frac{٢}{س}\right)^{٦} ء س$

② $\int س \sqrt[٣]{\frac{٢}{س^{٢}} - \frac{١}{س^{٢}}} \, ء س$

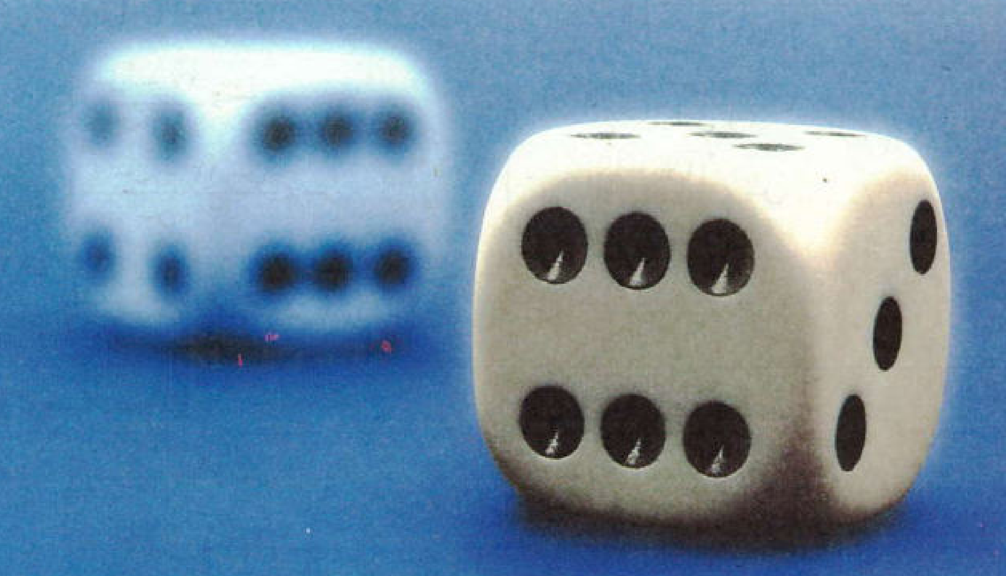
③ $\int (٤ س^{٢} + ٤ س + ١)^{٥} \, ء س$

④ $\int \sqrt{س - ٣} \, (س - ٣)^{٤} \, ء س$

⑤ $\int \frac{(٤ س^{٢} - ٤ س + ١)^{٧}}{(٢ س - ١)^{٢}} \, ء س$

الوحدة الرابعة

الاحتمال



الدرس 1	بعض المصطلحات والمفاهيم الأساسية - الأحداث - العمليات على الأحداث.
الدرس 2	مسلمات وقوانين الاحتمال - حساب الاحتمال.



الدرس 1

بعض المصطلحات والمفاهيم الأساسية - الأحداث - العمليات على الأحداث

* لاحظ كلًا من المواقف التالية :

سلة بها ٣ كرات حمراء متماثلة

أنا متأكد أن لون الكرة المسحوبة أحمر



ليست تجربة عشوائية

سلة بها ٣ كرات متماثلة ألوانها (حمراء - خضراء - سوداء)

أنا لا أعلم لون الكرة المسحوبة ولكنها إما حمراء أو خضراء أو سوداء



تجربة عشوائية

سلة تحتوى على ٣ كرات متماثلة غير معروف ألوانها



ليست تجربة عشوائية

* **التجربة العشوائية :**

هى كل تجربة يمكن معرفة جميع النواتج الممكنة لها قبل إجرائها ولكن لا نستطيع أن نحدد أيًا من هذه النواتج سوف يتحقق فعلاً عند إجرائها.

* **فضاء العينة (أو فضاء النواتج) :**

هو مجموعة كل النواتج الممكنة الحدوث لتجربة عشوائية ما ويرمز له عادة بالرمز (ف) ويرمز لعدد عناصر فضاء العينة بالرمز ں (ف).

مثال ١

بيِّن أيًا من التجارب التالية عشوائية وأيها غير عشوائية ثم اكتب فضاء العينة لكل من التجارب العشوائية ، مبينًا عدد عناصره :

١ إلقاء قطعة نقود مرة واحدة وملاحظة الوجه الظاهر.

٢ إلقاء حجر نرد مرة واحدة وملاحظة العدد الظاهر على الوجه العلوى.

٣ سحب بطاقة من خمس بطاقات مرقمة من ١٠ إلى ١٤ وملاحظة العدد المكتوب على البطاقة.

٤ سحب بطاقة مرقمة من حقيبة تحتوى على مجموعة من البطاقات المرقمة (دون أن نعرف أرقامها) وملاحظة رقم البطاقة المسحوبة.

٥ سحب كرة من كيس يحتوى على كرة سوداء وكرة حمراء وكرة صفراء وكرة بيضاء وملاحظة لون الكرة المسحوبة.

الحل

١ التجربة عشوائية ، النواتج الممكنة لهذه التجربة هى : صورة (ص) ، كتابة (ك)

∴ ف = {ص ، ك} ، ن(ف) = ٢

٢ التجربة عشوائية ، ف = {١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ ، ٥ ، ٦} ، ن(ف) = ٦

٣ التجربة عشوائية ، ف = {١٠ ، ١١ ، ١٢ ، ١٣ ، ١٤} ، ن(ف) = ٥

٤ التجربة غير عشوائية.

٥ التجربة عشوائية ، ف = {أسود ، أحمر ، أصفر ، أبيض} ، ن(ف) = ٤

مثال ٢

اكتب فضاء العينة لتجربة إلقاء قطعة نقود مرتين متتاليتين وملاحظة تتابع الصور والكتابات مبينًا عدد عناصره.

الحل

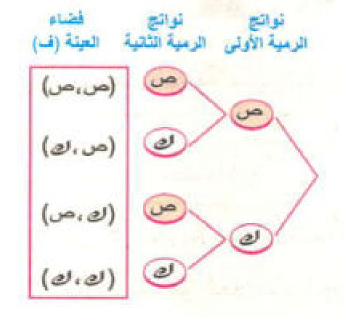
كل ناتج من نواتج التجربة هو زوج مرتب على الصورة : (ناتج الرمية الأولى ، ناتج الرمية الثانية)

وحيث إن النواتج الممكنة لكل من الرميتين الأولى والثانية هى : صورة (ص) أ، كتابة (ك)

∴ ف = {(ص ، ص) ، (ص ، ك) ، (ك ، ص) ، (ك ، ك)}

أى أن : ف = {ص ، ك} × {ص ، ك} ، ن(ف) = $٢^٢$ = ٤

ويمكن التوصل إلى عناصر فضاء العينة بواسطة الشجرة البيانية المقابلة :



* **لاحظ أن :** (ص ، ك) ≠ (ك ، ص)

ملاحظة

فضاء نواتج إلقاء قطعتى نقود متمايزتين (مختلفتين فى اللون أو الشكل أو الحجم ...) معًا فى آن واحد هو نفس فضاء نواتج إلقاء قطعة نقود واحدة مرتين متتاليتين. ويكون كل ناتج من نواتج التجربة هو زوج مرتب على الصورة (وجه القطعة الأولى ، وجه القطعة الثانية).

مثال ٣

اكتب فضاء العينة لتجربة إلقاء حجر نرد مرتين متتاليتين وملاحظة العدد الذى يظهر على الوجه العلوى فى الرميتين مبينًا عدد عناصره.

الحـــل

كل ناتج من نواتج التجربة هو زوج مرتب على الصورة : (ناتج الرمية الأولى ، ناتج الرمية الثانية).

∴ ف = {(س ، ص) : س ∈ {١، ٢، ٣، ٤، ٥، ٦} ، ص ∈ {١، ٢، ٣، ٤، ٥، ٦}}

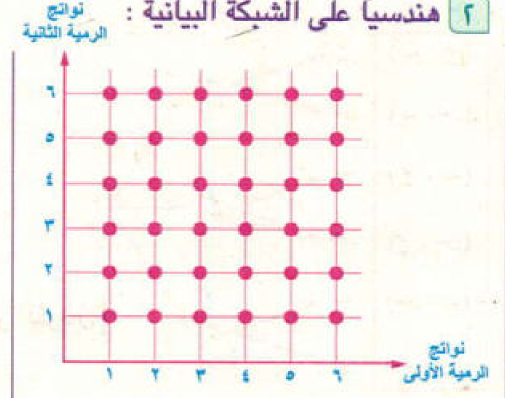
أى أن : ف = {١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ ، ٥ ، ٦} × {١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ ، ٥ ، ٦} ، ن(ف) = ٦^٢ = ٣٦

ويمكن تمثيل فضاء العينة (ف) بالصور التالية :

١ على صورة جدول :

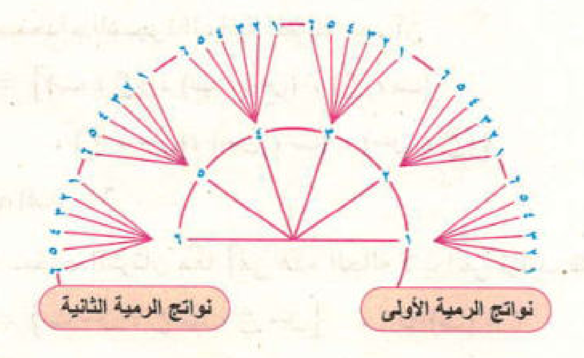
نواتج الرمية الأولى \ نواتج الرمية الثانية	١	٢	٣	٤	٥	٦
١	(١ ، ١)	(١ ، ٢)	(١ ، ٣)	(١ ، ٤)	(١ ، ٥)	(١ ، ٦)
٢	(٢ ، ١)	(٢ ، ٢)	(٢ ، ٣)	(٢ ، ٤)	(٢ ، ٥)	(٢ ، ٦)
٣	(٣ ، ١)	(٣ ، ٢)	(٣ ، ٣)	(٣ ، ٤)	(٣ ، ٥)	(٣ ، ٦)
٤	(٤ ، ١)	(٤ ، ٢)	(٤ ، ٣)	(٤ ، ٤)	(٤ ، ٥)	(٤ ، ٦)
٥	(٥ ، ١)	(٥ ، ٢)	(٥ ، ٣)	(٥ ، ٤)	(٥ ، ٥)	(٥ ، ٦)
٦	(٦ ، ١)	(٦ ، ٢)	(٦ ، ٣)	(٦ ، ٤)	(٦ ، ٥)	(٦ ، ٦)

٢ هندسيًا على الشبكة البيانية :





٣ بالشجرة البيانية :



ملاحظتان

١ فضاء العينة لتجربة إلقاء حجر نرد مرتين متتاليتين هو نفسه فضاء العينة لتجربة إلقاء حجرى نرد متمايزين مرة واحدة.

٢ عدد عناصر فضاء العينة = (ن)^ر حيث ن هو عدد النواتج الممكنة للرمية الواحدة ، ر هو عدد الرميات.

فمثلاً عند إلقاء حجر نرد ثلاث مرات فإن عدد عناصر فضاء العينة = (٦)^٣ = ٢١٦

مثال ٤

صندوق به ٣ كرات إحداها بيضاء والثانية حمراء والثالثة سوداء. سحبت كرتان من الصندوق ولوحظ لونهما.

أوجد فضاء العينة مبينًا عدد عناصره فى كل من الحالات الآتية :

١ إذا سحبت الكرتان الواحدة بعد الأخرى مع الإحلال.

٢ إذا سحبت الكرتان الواحدة وراء الأخرى بدون إحلال.

٣ إذا سحبت الكرتان معًا.

الحـــل

نرمز للكرة البيضاء (ب) ، والكرة الحمراء (ح) ، والكرة السوداء (س)

١ إذا سحبت الكرتان الواحدة بعد الأخرى مع الإحلال

«معناها أن الكرة المسحوبة أولاً تعاد إلى الصندوق قبل السحبة الثانية».

وباستخدام الشجرة البيانية المقابلة نجد أن :

ف = {(ب ، ب) ، (ب ، ح) ، (ب ، س)

، (ح ، ب) ، (ح ، ح) ، (ح ، س)

، (س ، ب) ، (س ، ح) ، (س ، س)}

، ن(ف) = ٩

السحبة الأولى | السحبة الثانية | فضاء العينة (ف)

ب ← ب (ب ، ب) ، ح (ب ، ح) ، س (ب ، س)

ح ← ب (ح ، ب) ، ح (ح ، ح) ، س (ح ، س)

س ← ب (س ، ب) ، ح (س ، ح) ، س (س ، س)

٢ إذا سحبت الكرتان الواحدة وراء الأخرى بدون إحلال

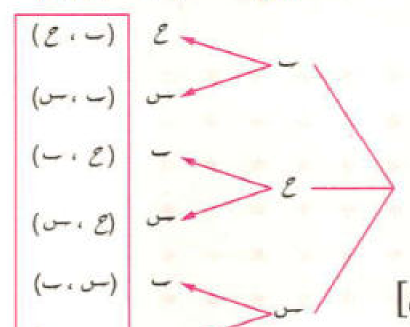
«معناها أن الكرة المسحوبة أولاً لا تعاد إلى الصندوق قبل السحبة الثانية»

وباستخدام الشجرة البيانية المقابلة نجد أن :

ف = {(ب ، ح) ، (ب ، س) ، (ح ، ب)

، (ح ، س)، (س ، ب) ، (س ، ح)}

، ن(ف) = ٦



٣ إذا سحبت الكرتان معًا [فى هذه الحالة لا يراعى ترتيب ظهور الكرتين]

ف = {ب س ، ح ب ، ح س} ، ن(ف) = ٣

مثال ٥

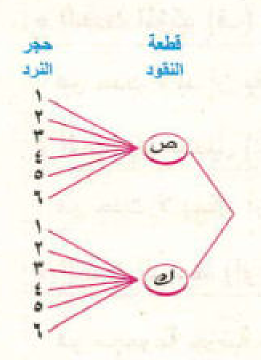
اكتب فضاء العينة لكل من التجارب العشوائية التالية مبينًا هل هو منته أم غير منته :

١ إلقاء قطعة نقود ثم حجر نرد وملاحظة ما يظهر على وجهيهما العلويين (ماذا يحدث إذا ألقى حجر النرد أولاً ثم قطعة النقود).

٢ التسديد على هدف ٤ مرات على الأكثر على أن تتوقف عن التسديد عند إصابته.

٣ التسديد على هدف ما إلى أن تتم إصابة الهدف وملاحظة عدد مرات التسديد.

الحـــل



[١] $ف_١$ = {ص ، ك} × {١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ ، ٥ ، ٦}

= {(ص ، ١) ، (ص ، ٢) ، (ص ، ٣) ، (ص ، ٤) ، (ص ، ٥)

، (ص ، ٦) ، (ك ، ١) ، (ك ، ٢) ، (ك ، ٣)

، (ك ، ٤) ، (ك ، ٥) ، (ك ، ٦)}

، ن($ف_١$) = ٢ × ٦ = ١٢ «هذا الفضاء منته»

* أما إذا ألقى حجر النرد أولاً ثم قطعة النقود

فإن : $ف_٢$ = {١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ ، ٥ ، ٦} × {ص ، ك}

= {(١ ، ص) ، (٢ ، ص) ، (٣ ، ص) ، (٤ ، ص) ، (٥ ، ص) ، (٦ ، ص)

، (١ ، ك) ، (٢ ، ك) ، (٣ ، ك)

، (٤ ، ك) ، (٥ ، ك) ، (٦ ، ك)}

، ن($ف_٢$) = ٦ × ٢ = ١٢

لاحظ أن :

$ف_١ \neq ف_٢$ ولكن ن($ف_١$) = ن($ف_٢$)

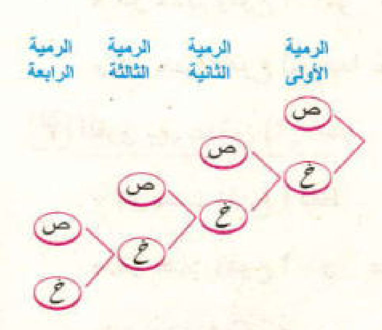
[٢] إذا رمزنا للإصابة بالرمز (ص) ورمزنا للخطأ بالرمز (خ) وباستخدام الشجرة البيانية المقابلة نجد أن :

ف = {ص ، (خ ، ص) ، (خ ، خ ، ص)

، (خ ، خ ، خ ، ص) ، (خ ، خ ، خ ، خ)}

، ن(ف) = ٥

«هذا الفضاء منته ويسمى أيضًا بالفضاء غير المنتظم»



[٣] ف = {١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ ، .....} «هذا الفضاء غير منته»

ملاحظـة

يكون فضاء العينة منتهيًا إذا كان عدد عناصره محدودًا ويكون غير منته إذا كان عدد عناصره غير محدود وسندرس فقط فضاء النواتج المنتهى.

الأحـــداث

* **الحدث :**

هو أى مجموعة جزئية من فضاء العينة.

* **وقوع الحدث :**

يقال إن حدثًا ما قد وقع إذا كان ناتج التجربة العشوائية هو أحد عناصر المجموعة التى يتألف منها هذا الحدث.

* **الحدث المؤكد (ف) :**

هو حدث لا بد أن يقع عند إجراء التجربة العشوائية.

* **الحدث المستحيل (∅) :**

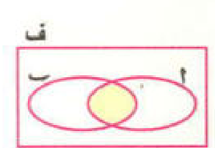
هو حدث لا يمكن أن يقع عند إجراء التجربة العشوائية.

* **الحدث البسيط (أو الأولى) :**

هو مجموعة جزئية من فضاء العينة (ف) تحتوى على عنصر واحد فقط.

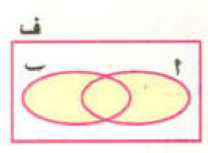
العمليات على الأحداث

١ تقاطع حدثين ($أ \cap ب$) :



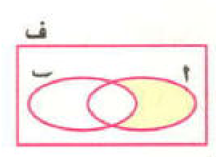
* هو حدث وقوع أ و ب معًا
* هو حدث وقوع الحدثين معًا.

٢ اتحاد حدثين ($أ \cup ب$) :



* هو حدث وقوع أ أو ب أو كليهما
* هو حدث وقوع أحدهما على الأقل.

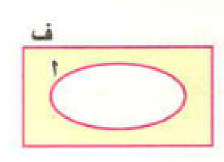
٣ الفرق بين حدثين ($أ - ب$) :



* هو حدث وقوع أ فقط
* هو حدث وقوع أ و عدم وقوع ب

$أ - ب = أ \cap \bar{ب}$

٤ الحدث المكمل ($\bar{أ}$) :



* هو حدث عدم وقوع أ

فمثلاً فى تجربة إلقاء حجر نرد مرة واحدة وملاحظة العدد الظاهر على الوجه العلوى

نجد أن : ف = {١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ ، ٥ ، ٦} وإذا كان : أ حدث الحصول على عدد زوجى

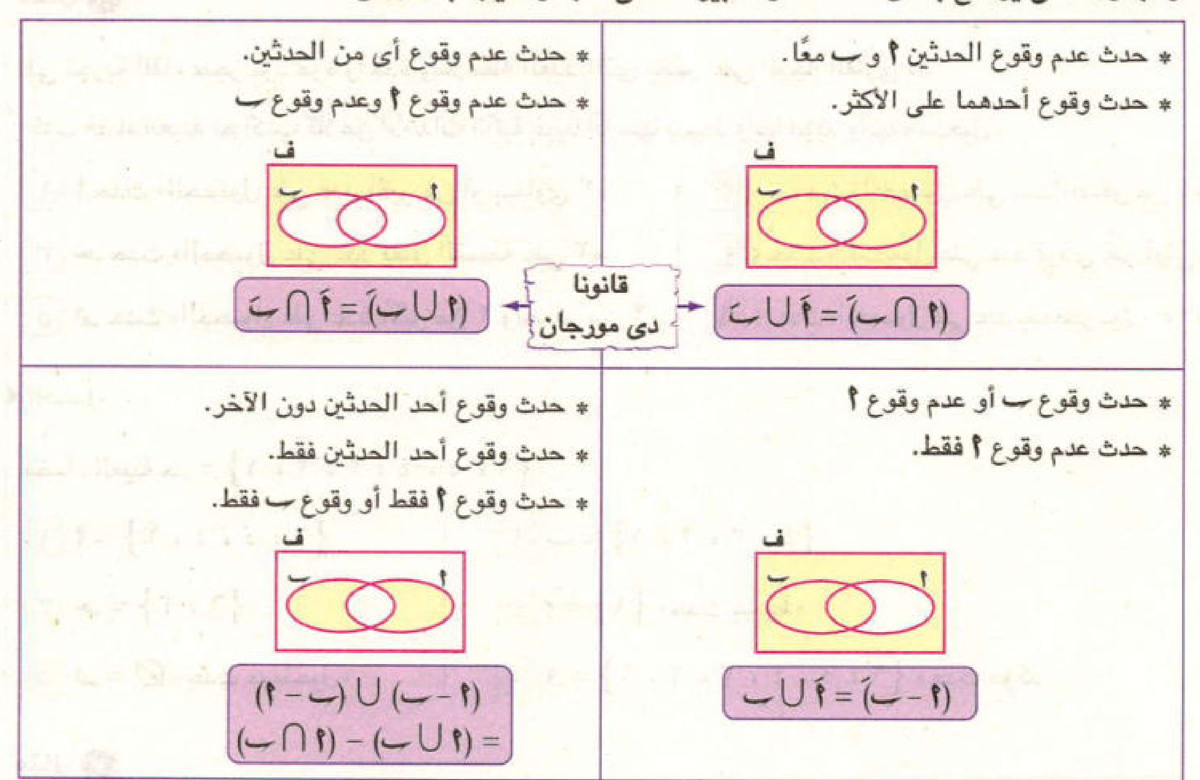
، ب حدث الحصول على عدد أولى فإن : أ = {٢ ، ٤ ، ٦} ، ب = {٢ ، ٣ ، ٥}

، حدث وقوع أحد الحدثين على الأقل = $أ \cup ب$ = {٢ ، ٣ ، ٤ ، ٥ ، ٦}

، حدث وقوع الحدثين معًا = $أ \cap ب$ = {٢} ، حدث وقوع أ فقط = أ − ب = $أ \cap \bar{ب}$ = {٤ ، ٦}

، حدث عدم وقوع أ = $\bar{أ}$ = {١ ، ٣ ، ٥}

* **والجدول الآتى يوضح بعض الأحداث والتعبير اللفظى عنها وتمثيلها بشكل ڤن :**



* **الأحداث المتنافية :** يقال إن الحدثين متنافيان إذا استحال وقوعهما معًا (فى نفس الوقت) أى أن وقوع أحدهما ينفى (يمنع) وقوع الآخر.

فمثلًا : إذا كان أ «حدث نجاح باسم فى امتحان ما» ، ب «حدث رسوبه فى نفس الامتحان» فإن وقوع أحد الحدثين ينفى وقوع الآخر.

∴ أ ، ب حدثان متنافيان.

تعريف

١ يقال إن الحدثين أ ، ب من فضاء عينة ف متنافيان إذا وفقط إذا كان أ ∩ ب = $\varnothing$

٢ يقال لعدة أحداث إنها متنافية إذا وفقط إذا كانت متنافية مثنى مثنى.

ملاحظتان

* الأحداث البسيطة (الأولية) المختلفة فى أى تجربة عشوائية تكون متنافية.
* الحدث أ ومكمله أَ حدثان متنافيان ويكون :

١ أ ∩ أَ = $\varnothing$ (الحدث المستحيل).   ٢ أ ∪ أَ = ف (الحدث المؤكد).

مثال ٦

فى تجربة إلقاء حجر نرد مرة واحدة وملاحظة العدد الذى يظهر على الوجه العلوى له.

اكتب فضاء العينة ثم اكتب كلاً من الأحداث الآتية مبينًا أيًا منها بسيط وأيها مؤكد وأيها مستحيل :

١ أ حدث «الحصول على عدد أكبر من أو يساوى ٣».

٢ ب حدث «الحصول على عدد أصغر من ٥».

٣ حـ حدث «الحصول على عدد يقبل القسمة على ٣».

٤ ء حدث «الحصول على عدد فردى غير أولى».

٥ هـ حدث «الحصول على عدد أكبر من ٢ وأصغر من ٣».

٦ و حدث «الحصول على عدد ينحصر بين ٠ ، ٧».

الحل

فضاء العينة ف = {١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ ، ٥ ، ٦}

١ أ = {٣ ، ٤ ، ٥ ، ٦}

٢ ب = {١ ، ٢ ، ٣ ، ٤}

٣ حـ = {٣ ، ٦}

٤ ء = {١} «حدث بسيط»

٥ هـ = ∅ «حدث مستحيل»

٦ و = {١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ ، ٥ ، ٦} «حدث مؤكد»

مثال ٧

فى تجربة اختيار عدد صحيح من بين الأعداد ١ إلى ١٠ **اكتب فضاء النواتج ثم عيِّن كلاً من الأحداث الآتية :**

١ أ حدث «الحصول على عدد زوجى».

٢ ب حدث «الحصول على عدد أولى».

٣ حـ حدث «الحصول على عدد فردى».

٤ ء حدث «الحصول على عدد يقبل القسمة على ٤».

٥ هـ حدث «الحصول على عدد $\leq$ ٣».

٦ و حدث «الحصول على عدد مربع كامل».

٧ ك حدث «الحصول على عدد زوجى أولى».

٨ ل حدث «الحصول على عدد زوجى أو أولى».

٩ س حدث «الحصول على عدد س يحقق المعادلة : س^{٢} − ٥ س = ٣٦».

١٠ ص حدث «الحصول على عدد س يحقق المتباينة : ٣ س − ١ $\geq$ ٢٠».

الحل

ف = {١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ ، ٥ ، ٦ ، ٧ ، ٨ ، ٩ ، ١٠}

١ أ = {٢ ، ٤ ، ٦ ، ٨ ، ١٠}

٢ ب = {٢ ، ٣ ، ٥ ، ٧}

٣ حـ = {١ ، ٣ ، ٥ ، ٧ ، ٩}

٤ ء = {٤ ، ٨}

٥ هـ = {١ ، ٢ ، ٣}

٦ و = {١ ، ٤ ، ٩}

٧ ك = أ $\cap$ ب = {٢}

٨ ل = أ $\cup$ ب = {٢ ، ٣ ، ٤ ، ٥ ، ٦ ، ٧ ، ٨ ، ١٠}

٩ س = {٩}

١٠ ص = {٧ ، ٨ ، ٩ ، ١٠}

مثال ٨

فى تجربة رمى قطعة نقود مرتين متتاليتين وملاحظة تتابع ظهور الصور والكتابات اكتب فضاء العينة ف ثم عبِّر عن كل من الأحداث التالية :

١ أ حدث «الحصول على صورة فى الرمية الأولى».

٢ ب حدث «الحصول على صورة فى إحدى الرميتين».

٣ حـ حدث «الحصول على صورة فى إحدى الرميتين وكتابة فى الرمية الأخرى».

٤ ء حدث «الحصول على نفس الشىء فى الرميتين».

٥ هـ حدث «الحصول على صورة فى الرميتين».

٦ و حدث «الحصول على صورة على الأكثر فى الرميتين».

◄ الحل

ف = {(ص ، ص) ، (ص ، ك) ، (ك ، ص) ، (ك ، ك)}

١ أ = {(ص ، ص) ، (ص ، ك)}

٢ ب = {(ص ، ص) ، (ص ، ك) ، (ك ، ص)}

٣ حـ = {(ص ، ك) ، (ك ، ص)}

٤ ء = {(ص ، ص) ، (ك ، ك)}

٥ هـ = {(ص ، ص)}

٦ و = {(ص ، ك) ، (ك ، ص) ، (ك ، ك)}

مثال ٩

من مجموعة الأرقام {١ ، ٢ ، ٣ ، ٤} كون عدد من رقمين مختلفين.

اكتب فضاء العينة لهذه التجربة ثم أوجد كلًا من الأحداث الآتية :

١ أ حدث «مجموع الرقمين = ٧».

٢ ب حدث «مجموع الرقمين عدد زوجى».

٣ حـ حدث «مجموع الرقمين عدد أولى».

٤ ء حدث «العدد الناتج يقبل القسمة على ٣».

٥ هـ حدث «رقم الآحاد زوجى».

٦ و حدث «رقم العشرات أولى».

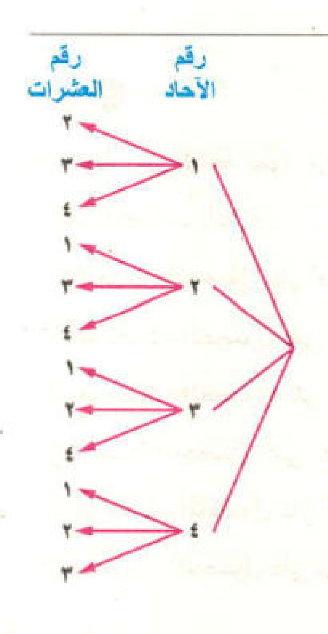
ثم أوجد كلاً من : أ ∪ ب ، ب ∩ ء ، هـ − ب ، أ ∩ حـ

◄ الحل

باستخدام الشجرة البيانية المقابلة نجد أن :

ف = {٢١ ، ٣١ ، ٤١ ، ١٢ ، ٣٢ ، ٤٢ ، ١٣ ، ٢٣ ، ٤٣ ، ١٤ ، ٢٤ ، ٣٤}

١ أ = {٤٣ ، ٣٤}



٢ ب = {٣١ ، ١٣ ، ٤٢ ، ٢٤}

٣ حـ = {٢١ ، ٤١ ، ١٢ ، ٣٢ ، ٢٣ ، ٤٣ ، ١٤ ، ٣٤}

٤ ء = {٢١ ، ١٢ ، ٤٢ ، ٢٤}

٥ هـ = {١٢ ، ٣٢ ، ٤٢ ، ١٤ ، ٢٤ ، ٣٤}

٦ و = {٢١ ، ٣١ ، ٣٢ ، ٢٣ ، ٢٤ ، ٣٤}

أ ∪ ب = {٤٣ ، ٣٤ ، ٣١ ، ١٣ ، ٤٢ ، ٢٤}

، ب ∩ ء = {٤٢ ، ٢٤} ، هـ − ب = {١٢ ، ٣٢ ، ١٤ ، ٣٤}

، أ ∩ ـبَ = (أ ∪ ب)َ = {٢١ ، ٤١ ، ١٢ ، ٣٢ ، ٢٣ ، ١٤}

مثال ١٠

فى تجربة إلقاء حجر نرد مرتين متتاليتين وملاحظة العدد الذى يظهر على الوجه العلوى فى الرميتين.

ارسم شكلاً هندسيًا لفضاء العينة ثم اكتب كلاً من الأحداث الآتية موضحًا إياها على الشكل الهندسى لفضاء العينة :

١ أ حدث «الحصول على عددين مجموعهما فردى وأكبر من ٦».

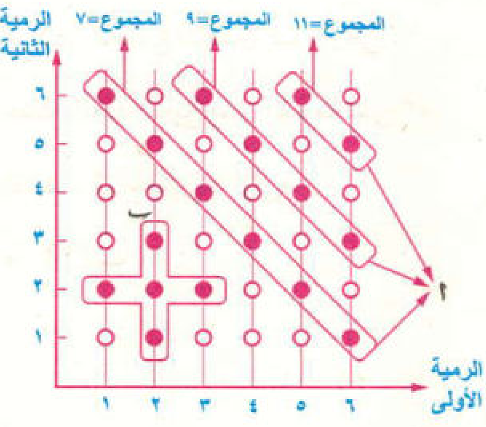
٢ ب حدث «الحصول على عددين أحدهما ٢ ومجموعهما أصغر من أو يساوى ٥».

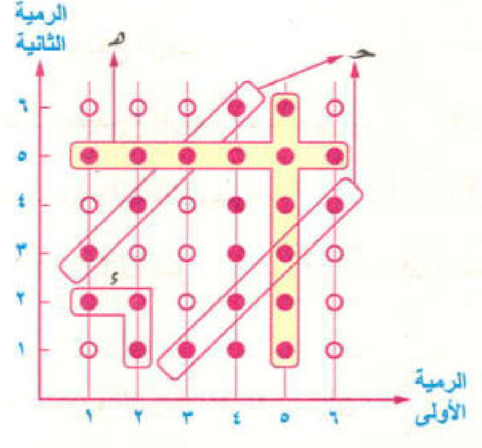
٣ حـ حدث «الحصول على عددين الفرق المطلق بينهما يساوى ٢».

٤ ء حدث «الحصول على عددين أكبرهما هو العدد ٢».

٥ هـ حدث «الحصول على العدد ٥ مرة واحدة على الأقل». بيِّن هل الأحداث أ ، ب ، ء متنافية أم لا.

الحــل





١ أ = {(٦ ، ١) ، (٥ ، ٢) ، (٤ ، ٣) ، (٣ ، ٤) ، (٢ ، ٥) ، (١ ، ٦) ، (٦ ، ٣)
، (٥ ، ٤) ، (٤ ، ٥) ، (٣ ، ٦) ، (٦ ، ٥) ، (٥ ، ٦)}

٢ ب = {(٢ ، ١) ، (٢ ، ٢) ، (٢ ، ٣) ، (٣ ، ٢) ، (١ ، ٢)}

لاحظ أنه :

إذا كان الفرق المطلق بين عددين = ٢

فإن العددين يمكن أن يكونا (٥ ، ٣)

أو (٣ ، ٥) ، ...

لأن : |٥ - ٣| = |٣ - ٥| = ٢

٣ حـ = {(٣ ، ١) ، (٤ ، ٢) ، (٥ ، ٣) ، (٦ ، ٤) ، (١ ، ٣)
، (٢ ، ٤) ، (٣ ، ٥) ، (٤ ، ٦)}

٤ ء = {(١ ، ٢) ، (٢ ، ١) ، (٢ ، ٢)}

٥ هـ = {(٥ ، ١) ، (٥ ، ٢) ، (٥ ، ٣) ، (٥ ، ٤)
، (٥ ، ٥) ، (٥ ، ٦) ، (٦ ، ٥) ، (٤ ، ٥) ، (٣ ، ٥) ، (٢ ، ٥) ، (١ ، ٥)}

∵ أ ∩ ب = ∅ ∴ الحدثان أ ، ب متنافيان

، ∵ أ ∩ ء = ∅ ∴ الحدثان أ ، ء متنافيان

، ∵ ب ∩ ء ≠ ∅ ∴ الأحداث أ ، ب ، ء غير متنافية.

مثال ١١

ألقيت قطعة نقود مرة واحدة. فإذا كان الوجه الظاهر يحمل كتابة فسوف يلقى حجر نرد مرة واحدة أما إذا كان يحمل صورة فسوف تلقى قطعة النقود مرة ثانية.

اكتب فضاء العينة ثم اكتب كلاً من الأحداث الآتية :

١ أ حدث «ظهور كتابة وعدد زوجي».

٢ ب حدث «ظهور صورة أو عدد أولي».

٣ حـ حدث «ظهور كتابة على الأقل».

٤ ء حدث «ظهور كتابة وعدد مربع كامل».

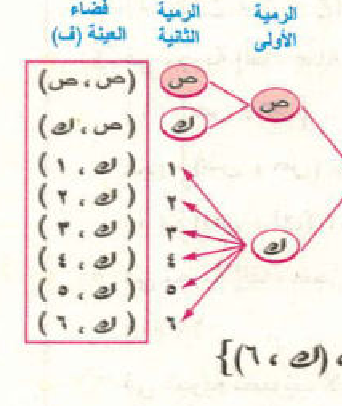
٥ هـ حدث «ظهور صورة أو عدد أصغر من ٣».

٦ و حدث «عدم وقوع حـ».

٧ ن حدث «وقوع أ وعدم وقوع ء».

٨ ع حدث «وقوع أ ، هـ معًا».

الحـــل



باستخدام الشجرة البيانية المقابلة نجد أن :

ف = {(ص ، ص) ، (ص ، ك) ، (ك ، ١) ، (ك ، ٢)
، (ك ، ٣) ، (ك ، ٤) ، (ك ، ٥) ، (ك ، ٦)}

١ أ = {(ك ، ٢) ، (ك ، ٤) ، (ك ، ٦)}

٢ ب = {(ص ، ص) ، (ص ، ك) ، (ك ، ٢)
، (ك ، ٣) ، (ك ، ٥)}

٣ حـ = {(ص ، ك) ، (ك ، ١) ، (ك ، ٢) ، (ك ، ٣) ، (ك ، ٤) ، (ك ، ٥) ، (ك ، ٦)}

٤ ء = {(ك ، ١) ، (ك ، ٤)}

٥ هـ = {(ص ، ص) ، (ص ، ك) ، (ك ، ١) ، (ك ، ٢)}

٦ و = حَـ = {(ص ، ص)}

٧ ن = أ - ء = {(ك ، ٢) ، (ك ، ٦)}

٨ ع = أ ∩ هـ = {(ك ، ٢)}

تمارين 14

على بعض المصطلحات والمفاهيم الأساسية - الأحداث - العمليات على الأحداث

من أسئلة الكتاب المدرسى • فهم • تطبيق • مستويات عليا

أولًا أسئلة الاختيار من متعدد

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

① فى تجربة اختيار أحد ارقام العدد ٢٦٣٤٥ عشوائيًا فإن فضاء العينة هو ....

(أ) {٥ ، ٤ ، ٣ ، ٢}　　(ب) {٤٥ ، ٦٣ ، ٢}

(جـ) {٢٦٣٤٥}　　(د) {٦ ، ٢ ، ٣ ، ٥ ، ٤}

② سحب بطاقة من مجموعة بطاقات مرقمة دون معرفة الأرقام المكتوبة على البطاقات يعبر عن ....

(أ) تجربة عشوائية.　　(ب) ليست تجربة عشوائية.

(جـ) حدث مستحيل.　　(د) حدث مؤكد.

③ إذا رمز إلى إصابة الهدف بالرمز ص وعدم اصابته بالرمز خ وكانت تجربة التسديد على الهدف ٣ مرات على الأكثر بحيث نتوقف عن التسديد عند إصابة الهدف فإن فضاء العينة = ...

(أ) {خ ، (خ ، ص) ، (خ ، خ ، ص) ، (خ ، خ ، خ)}

(ب) {ص ، (ص ، ص ، خ) ، (ص ، خ ، خ) ، (خ ، خ ، خ)}

(جـ) {(خ ، خ) ، (خ ، خ ، ص) ، ص}

(د) {(خ ، خ ، خ) ، (خ ، خ ، ص) ، (خ ، ص) ، ص}

④ فى تجربة إلقاء عملة معدنية مرتين متتاليين فإن فضاء العينة لهذه التجربة هو ....

(أ) {ص ، ك}　　(ب) {(ص ، ص) ، (ك ، ك)}

(جـ) {(ص ، ص) ، (ك ، ك) ، (ص ، ك) ، (ك ، ص)}

(د) {(ص ، ك) ، (ك ، ص)}

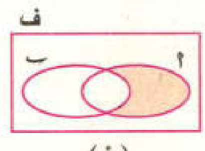
⑤ فى تجربة إلقاء حجر نرد ٣ مرات متتاليه فإن عدد عناصر فضاء العينة = ...

(أ) ٢٧　　(ب) ٨١　　(جـ) ٣٦　　(د) ٢١٦

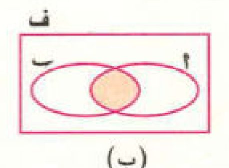
⑥ فى تجربة تصويب لاعب على المرمى عدة مرات تتوقف التجربة إذا أصاب الهدف مرتين أو أخطأ الهدف مرتين فإن عدد عناصر فضاء العينة = ...

(أ) ٩　　(ب) ٨　　(جـ) ٤　　(د) ٦

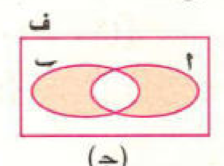
⑦ أى من الأشكال الآتية يعبر الجزء المظلل فيه عن وقوع أى من الحدثين أ ، ب دون الآخر ....



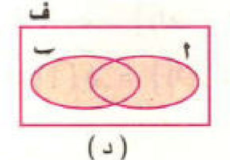
(أ)



(ب)



(جـ)



(د)

(٨) أى من الأشكال الآتية يعبر الجزء المظلل فيه عن أَ ∪ بَ ؟

(أ) (ب) (جـ) (د)

(٩) إذا كان : أ ، ب حدثين من فضاء العينة ف فإن الجزء المظلل بالشكل المقابل يعبر عن ....

(أ) أ ∪ ب (ب) أَ ∩ ب

(جـ) أ ∪ بَ (د) أ ∩ ب

(١٠) إذا كان : أ ، ب حدثين من فضاء العينة ف فإن الجزء المظلل بالشكل المقابل يعبر عن ....

(أ) أ ∪ ب (ب) أَ ∩ ب

(جـ) (أ ∩ ب)َ (د) (أ ∪ ب) − (أ ∩ ب)

(١١) إذا كان : أ ، ب حدثين من فضاء العينة ف فإن الجزء المظلل بالشكل المقابل يعبر عن ....

(أ) أ − ب (ب) ب ∪ أ

(جـ) أَ ∪ ب (د) أَ

(١٢) فى الشكل المقابل :

الجزء المظلل يعبر عن الحدث ....

(أ) وقوع أ ، ب (ب) وقوع أ أ، ب أ، كلاهما.

(جـ) وقوع أحد الحدثين على الأقل. (د) وقوع أحد الحدثين على الأكثر.

(١٣) إذا كان أ ، ب حدثين من فضاء العينة لتجربة عشوائية فإن حدث عدم وقوع أى من الحدثين يساوى ....

(أ) أ ∩ ب (ب) أ − ب (جـ) أَ ∩ بَ (د) أَ ∪ بَ

(١٤) إذا كان : أ ، ب حدثين متنافيين فإن : أ − ب = ...

(أ) أ (ب) ب (جـ) ب − أ (د) أَ

(١٥) إذا كان أ ، ب حدثين من فضاء عينة لتجربة عشوائية فإن حدث وقوع ب فقط = ...

(أ) ب (ب) أ ∩ ب (جـ) أ − ب (د) ب − أ

(١٦) (أ ∪ ب)َ = ...

(أ) أَ ∩ بَ (ب) أَ ∪ بَ (جـ) ف − (أ ∩ ب) (د) (أ ∩ ب)َ

(١٧) (أ − ب)َ = ...

(أ) ف − أ (ب) ب ∪ أَ (جـ) (ب − أ)َ (د) أَ ∪ (ب − أ)

(١٨) إذا كان : أ ، ب حدثين من فضاء العينة لتجربة عشوائية فإن حدث وقوع أ و ب معًا هو ....

(أ) $أ \cup ب$ (ب) $(أ \cap ب)'$ (جـ) $\varnothing$ (د) $أ \cap ب$

(١٩) عند سحب بطاقة من بين ١٠ بطاقات متماثلة ومرقمة من ١ إلى ١٠

فإن حدث ظهور عدد يقبل القسمة على ٢ على البطاقة المسحوبة هو ....

(أ) {٢ ، ٦} (ب) {٢ ، ٤ ، ٦ ، ٨}

(جـ) {٢ ، ٤ ، ٦ ، ٨ ، ١٠ ، ١٢} (د) {٢ ، ٤ ، ٦ ، ٨ ، ١٠}

(٢٠) ألقيت قطعة نقود مرتين متتاليتين ولوحظ تتابع الصور والكتابات فإن حدث ظهور كتابة فى الرمية الأولى هو ....

(أ) {(ك ، ص)} (ب) {(ك ، ك) ، (ك ، ص)}

(جـ) {(ك ، ص ، ص) ، (ك ، ك ، ص) ، (ك ، ص ، ك) ، (ك ، ك ، ك)}

(د) {(ك ، ص) ، (ص ، ك) ، (ك ، ك)}

(٢١) فى تجربة تكوين عدد من رقمين مختلفين من مجموعة الأرقام {٢ ، ٣ ، ٥} تم استخدام الشجرة البيانية المقابلة فإن عدد عناصر الحدث «العدد الناتج عدد فردى» هو ....

رقم الأحاد — رقم العشرات
٢ ← ٣ ، ٥
٣ ← ٢ ، ٥
٥ ← ٢ ، ٣

(أ) ٦ (ب) ٣ (جـ) ٤ (د) ٢

(٢٢) فى تجربة إلقاء حجر نرد مرة واحدة فإن أى من الأحداث الآتية هو حدث أولى ؟

(أ) حدث ظهور عدد أولى. (ب) حدث ظهور عدد أكبر من أو يساوى ٥

(جـ) حدث ظهور عدد أكبر من ٦ (د) حدث ظهور عدد زوجى له عاملان مختلفان فقط.

(٢٣) ألقى حجر نرد فإذا حدث وكان العدد الظاهر على الوجه العلوى للحجر عددًا زوجيًا فسوف تلقى قطعة نقود مرة واحدة أما إذا كان العدد الظاهر فرديًا فإن قطعة النقود سوف تلقى مرتين فإن عدد عناصر فضاء العينة لتلك التجربة = ...

(أ) ٢٤ (ب) ١٨ (جـ) ٣٦ (د) ١٢

(٢٤) من مجموعة الأرقام {٢ ، ٣ ، ٤} تم تكوين عدد مكون من رقمين مختلفين فإن حدث «مجموع رقمى العدد هو عدد أولى ≤ ٧» = ...

(أ) {٤٣ ، ٣٤} (ب) {٤٣}

(جـ) {٣٢ ، ٢٣ ، ٤٣ ، ٣٤} (د) $\varnothing$

(٢٥) فى تجربة إلقاء حجر نرد مرتين متتاليتين وملاحظة الرقم الظاهر على الوجه العلوى وكان أ «حدث الحصول على نفس الرقم فى المرتين» ، ب «حدث الحصول على رقمين مجموعهم أكبر من ٩»
فإن : أ − ب = ...

(أ) {(١ ، ١) ، (٢ ، ٢) ، (٣ ، ٣) ، (٤ ، ٤) ، (٦ ، ٦)}

(ب) {(١ ، ١) ، (٢ ، ٢) ، (٣ ، ٣) ، (٤ ، ٤)}

(جـ) {(٦ ، ٦)}

(د) {(١ ، ١) ، (٣ ، ٣) ، (٥ ، ٥)}

ثانيًا الأسئلة المقالية

١ اكتب فضاء العينة لكل من التجارب العشوائية الآتية ، مبينًا عدد عناصره :

(١) إلقاء ثلاث قطع نقود متمايزة مرة واحدة وملاحظة تتابع ظهور الصور والكتابات.

(٢) الحصول على عدد مكون من رقمين مختلفين من الأرقام ١ ، ٢ ، ٣ ، ٤

(٣) الحصول على عدد مكون من رقمين من الأرقام ٠ ، ١ ، ٢

(٤) كيس به ٤ كرات واحدة حمراء والثانية بيضاء والثالثة سوداء والرابعة صفراء ، والتجربة هى سحب كرتين واحدة بعد الأخرى وملاحظة لونهما :
أولًا : مع الإحلال (إرجاع الكرة الأولى قبل سحب الثانية). **ثانيًا :** بدون إحلال.

(٥) إلقاء حجر نرد مرة واحدة وملاحظة العدد الظاهر على الوجه العلوى فإذا ظهر عدد أقل من ٦ تُلقى قطعة نقود مرة واحدة ، وإذا ظهر العدد ٦ تُلقى قطعة نقود مرتين متتاليتين.

(٦) إلقاء قطعة نقود ثم حجر نرد فيه وجهان يحملان الرقم ١ ، ووجهان يحملان الرقم ٢ ، ووجهان يحملان الرقم ٣ ، وملاحظة ما يظهر على وجهيهما العلويين.

(٧) إلقاء قطعة نقود ثلاث مرات متتالية وملاحظة عدد الصور.

---

٢ فى تجربة إلقاء حجر نرد مرة واحدة وملاحظة العدد الظاهر على الوجه العلوى اكتب فضاء العينة ف ثم عبر عن كل من الأحداث الآتية ، مبينًا أى هذه الأحداث بسيط وأيها مؤكد وأيها مستحيل :

(١) أ حدث «ظهور الرقم ٤».

(٢) ب حدث «عدم ظهور الرقم ٥».

(٣) حـ حدث «ظهور عدد أكبر من ٣».

(٤) ء حدث «ظهور عدد أصغر من ٨».

(٥) هـ حدث «ظهور عدد يقبل القسمة على ٧».

(٦) و حدث «ظهور عدد أولى».

(٧) ك حدث «ظهور عدد فردى أولى».

(٨) ل حدث «ظهور عدد زوجى أو أولى».

(٩) ن حدث «ظهور عدد ليس مربعًا كاملاً».

(١٠) س حدث «ظهور عدد س يحقق المعادلة : س (س − ٢) = ١٥».

(١١) ص حدث «ظهور عدد س يحقق المتباينة : س ≤ ٤».

---

٣ حقيبة بها ٢٠ بطاقة متماثلة ومرقمة من ١ إلى ٢٠ ، سحبت بطاقة واحدة عشوائيًا ولوحظ العدد المسجل على البطاقة المسحوبة ، اكتب الأحداث الآتية :

(١) أ حدث «العدد المسجل زوجي وأكبر من ١٠».

(٢) ب حدث «العدد المسجل عامل من عوامل ١٢».

(٣) حـ حدث «العدد المسجل فردى ويقبل القسمة على ٣».

(٤) ء حدث «العدد المسجل مضاعف للعددين ٢ ، ٥».

(٥) هـ حدث «العدد المسجل أولى».

(٦) و حدث «العدد المسجل يحقق المتباينة : ٥ س − ٣ ≤ ١٧».

---

٤ فى تجربة إلقاء حجر نرد مرة واحدة وملاحظة العدد الظاهر على الوجه العلوى ،

اكتب فضاء العينة (ف) ثم عيِّن كلًا من الأحداث الآتية :

(١) أ حدث «ظهور عدد فردى».

(٢) ب حدث «ظهور عدد أولى».

(٣) حدث وقوع أ و ب معًا.

(٤) حدث وقوع أحدهما على الأقل.

(٥) حدث عدم وقوع أ

(٦) حدث وقوع أ فقط.

(٧) حدث وقوع ب فقط.

(٨) حدث وقوع أحدهما فقط.

(٩) حدث وقوع أحدهما على الأكثر.

---

٥ فى تجربة رمى قطعة نقود مرتين متتاليتين وملاحظة تتابع الصور والكتابات.

اكتب فضاء العينة ف ثم عبر عن كل من الأحداث الآتية :

(١) أ حدث «الحصول على كتابة فى الرمية الأولى».

(٢) ب حدث «الحصول على كتابة فى إحدى الرميتين فقط».

(٣) حـ حدث «الحصول على صورة فى الرمية الأولى أو كتابة فى الرمية الثانية».

(٤) ء حدث «عدم ظهور صورة».

(٥) هـ حدث «ظهور نفس الشىء فى الرميتين».

(٦) و حدث «ظهور شىء مختلف فى الرميتين».

(٧) ز حدث «ظهور صورة واحدة بالضبط».

(٨) ع حدث «ظهور صورة واحدة على الأقل».

(٩) ط حدث «ظهور صورة واحدة على الأكثر».

٦ عند إلقاء قطعة نقود عدة مرات وتوقفت التجربة عند ظهور صورة أو ٣ كتابات.

اكتب فضاء النواتج ثم عيِّن الأحداث الآتية :

(١) أ حدث «ظهور صورة على الأكثر». | (٢) ب حدث «ظهور صورة على الأقل».

(٣) حـ حدث «ظهور كتابتين على الأقل». | (٤) ء حدث «ظهور صورتين على الأقل».

---

٧ من مجموعة الأرقام {١ ، ٢ ، ٣ ، ٤} كوِّن عددًا من رقمين مختلفين.

مثِّل فضاء النواتج ف بشكل شجرة ، ثم اكتب ف وعيِّن منها الأحداث الآتية :

(١) أ حدث «أن يكون رقم الآحاد فرديًا». | (٢) ب حدث «أن يكون رقم العشرات فرديًا».

(٣) حـ حدث «أن يكون كلا الرقمين فرديًا».

(٤) ء حدث «أن يكون رقم الآحاد أو رقم العشرات فرديًا».

(٥) هـ حدث «مجموعة الأعداد التى بها الآحاد ضعف العشرات».

---

٨ حقيبة بها ٣ كرات حمراء ، ٣ كرات بيضاء. سُحبت منها عشوائيًا ٣ كرات الواحدة بعد الأخرى بدون إحلال. **اكتب فضاء العينة ثم اكتب الأحداث الآتية :**

(١) أ حدث «الحصول على كرتين حمراوين على الأقل».

(٢) ب حدث «الحصول على كرتين بيضاوين على الأكثر».

(٣) حـ حدث «الحصول على كرتين بالضبط من لون واحد».

(٤) أ ∩ ب (٥) ب ∩ حـ (٦) حـ - أ

---

٩ سحبت بطاقتان الواحدة بعد الأخرى من بين ٨ بطاقات متماثلة ومرقمة من ١ إلى ٨ مع إعادة البطاقة المسحوبة أولًا قبل سحب البطاقة الثانية ، **ما عدد عناصر فضاء العينة ؟ وإذا كان :**

(١) أ حدث «العدد في السحبة الثانية ثلاثة أمثال العدد فى السحبة الأولى».

(٢) ب حدث «مجموع العددين أكبر من ١٣».

اكتب كلًا من أ ، ب ، هل أ ، ب حدثان متنافيان ؟ فسر ذلك.

---

١٠ فى تجربة إلقاء حجر نرد مرتين متتاليتين وملاحظة العدد الظاهر على الوجه العلوى فى كل مرة.

ارسم شكلاً هندسيًا لفضاء العينة ف ووضح عليه كلاً من الأحداث الآتية :

(١) أ حدث «ظهور العدد ٣ فى الرمية الأولى».

(٢) ب حدث «ظهور العدد ٣ فى الرمية الثانية».

(٣) حـ حدث «ظهور العدد ٣ فى أى من الرميتين».

(٤) ء حدث «ظهور عدد فى الرمية الأولى يزيد ٢ عن العدد فى الرمية الثانية».

(٥) هـ حدث «ظهور عدد فى الرمية الثانية يزيد ١ عن العدد فى الرمية الأولى».

١١ ألقى حجر نرد مرتين متتاليتين ولوحظ العدد الظاهر على الوجه العلوى فى كل مرة.

عيِّن كلًا من الأحداث الآتية :

(١) أ حدث «مجموع العددين ٨». (٢) ب حدث «مجموع العددين ١٠».

(٣) حـ حدث «المجموع ٨ أو ١٠». (٤) ء حدث «المجموع ١٥».

(٥) هـ حدث «ظهور عددين متساويين».

---

١٢ فى تجربة إلقاء حجرى نرد متمايزين وملاحظة العددين الظاهرين على الوجهين العلويين. **اكتب كلًا من الأحداث الآتية :**

(١) $أ_١$ حدث «الفرق المطلق بين العددين الظاهرين = ٣».

(٢) $أ_٢$ حدث «مجموع العددين الظاهرين يساوى ١٠ على الأقل».

(٣) $أ_٣$ حدث «أصغر العددين الظاهرين = ٤».

(٤) $أ_٢ \cap أ_٣$

(٥) $أ_٢ \cap \bar{أ}_٣$

(٦) $أ_٤$ حدث «أكبر العددين الظاهرين ≥ ٣».

(٧) $أ_٥$ حدث «أكبر العددين الظاهرين ≤ ٥».

وضح كلاً من $أ_٤$ ، $أ_٥$ على الشكل الهندسى لفضاء العينة ف

---

١٣ ألقيت قطعة نقود ثم حجر نرد ولوحظ الوجه العلوى لقطعة النقود والعدد الظاهر على الوجه العلوى لحجر النرد ، **مثِّل فضاء العينة بشكل شجرى ثم أوجد الأحداث الآتية :**

(١) أ حدث «ظهور كتابة وعدد زوجى». (٢) ب حدث «ظهور صورة وعدد فردى».

(٣) حـ حدث «وقوع الحدث أ ووقوع الحدث ب».

(٤) ء حدث «وقوع الحدث أ فقط». (٥) هـ حدث «عدم وقوع أ أو عدم وقوع ب».

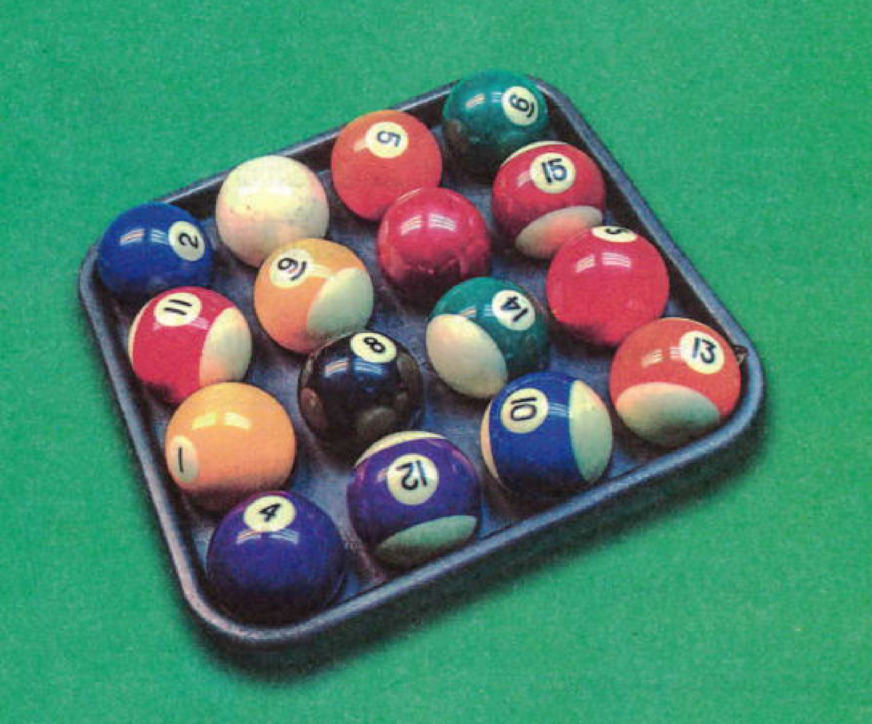
---

١٤ عند إلقاء قطعة نقود إذا كان الناتج صورة فسوف تلقى قطعة النقود مرة ثانية وتتوقف التجربة ، أما إذا كان الناتج كتابة فى المرة الأولى فسوف يلقى حجر نرد مرة واحدة.

اكتب فضاء العينة لتلك التجربة ثم اكتب كلًا من الأحداث الآتية :

(١) أ حدث «ظهور كتابة وعدد زوجى». (٢) ب حدث «ظهور صورة واحدة على الأقل».

(٣) حـ حدث «ظهور كتابة وعدد أولى».



الدرس

2

مسلمات وقوانين الاحتمال

- حساب الاحتمال

إذا كان لدينا فضاء عينة لتجربة عشوائية ما (ف) فإنه يمكننا تعريف مجموعة من الأحداث على هذا الفضاء ، ونستطيع أن نعبر عن مدى إمكانية وقوع أى حدث منها بصورة عددية بما يسمى احتمال الحدث ، وهو يحقق المسلمات الثلاث الآتية :

مسلمات الاحتمال

١ لكل حدث أ $\subset$ ف يوجد عدد حقيقى يسمى احتمال الحدث أ ويرمز له بالرمز ل (أ) حيث : صفر $\leq$ ل (أ) $\leq$ ١

أى أن : ل (أ) $\in$ [٠ ، ١]

٢ ل (ف) = ١ أى أن احتمال وقوع الحدث المؤكد = ١

٣ إذا كان أ ، ب حدثين متنافيين من فضاء العينة ف فإن : ل (أ $\cup$ ب) = ل (أ) + ل (ب)

ويمكن تعميم هذه القاعدة لعدة أحداث متنافية (مثنى مثنى) $أ_١$ ، $أ_٢$ ، ..... ، $أ_ر$

فيكون : ل ($أ_١$ $\cup$ $أ_٢$ $\cup$ ..... $\cup$ $أ_ر$) = ل ($أ_١$) + ل ($أ_٢$) + ... + ل ($أ_ر$)

نتائج هامة

١ ل ($\emptyset$) = صفر **أى أن :** احتمال وقوع الحدث المستحيل = صفر

٢ ل ($\overline{أ}$) = ١ - ل (أ) حيث $\overline{أ}$ هو الحدث المكمل للحدث أ

٣ ل (أ $\cup$ ب) = ل (أ) + ل (ب) - ل (أ $\cap$ ب)

حيث أ ، ب أى حدثين من فضاء العينة ف (ليسا بالضرورة حدثين متنافيين)

٤ ل (أ - ب) = ل (أ) - ل (أ $\cap$ ب)

٥ إذا كان : أ $\subset$ ب فإن : ل (أ) $\leq$ ل (ب) حيث أ ، ب حدثان من نفس فضاء العينة.

الجدول الآتى يلخص لنا احتمالات بعض الأحداث ، كما يوضح التعبير اللفظى عنها وتمثيلها بشكل ڤن :

احتمال الحدث	التعبير عنه لفظيًا	تمثيل الحدث بشكل ڤن
ل (ف)	* احتمال وقوع الحدث المؤكد = ١	ف
ل (∅)	* احتمال وقوع الحدث المستحيل = صفر	ف
ل (أ)	* احتمال وقوع الحدث أ	ف أ
ل (أَ) = ل (ف − أ)	* احتمال الحدث المكمل للحدث أ * احتمال عدم وقوع الحدث أ	ف أ
ل (أ ∩ ب)	* احتمال وقوع أ ، ب معًا .	ف ب أ
ل (أ ∪ ب)	* احتمال وقوع أ أو ب أو كليهما . * احتمال وقوع أحدهما على الأقل. * احتمال وقوع أى من الحدثين.	ف ب أ
ل (أ − ب) = ل (أ ∩ بَ) = ل (أ) − ل (أ ∩ ب)	* احتمال وقوع أ وعدم وقوع ب * احتمال وقوع أ فقط.	ف ب أ
ل (أَ ∪ بَ) = ل (أ ∩ ب)َ = ١ − ل (أ ∩ ب)	* احتمال عدم وقوع الحدثين معًا . * احتمال وقوع أحدهما على الأكثر.	ف ب أ
ل (أَ ∩ بَ) = ل (أ ∪ ب)َ = ١ − ل (أ ∪ ب)	* احتمال عدم وقوع أى من الحدثين. * احتمال عدم وقوع أ وعدم وقوع ب	ف ب أ
ل (أَ ∪ ب) = ل (أ − ب)َ = ١ − ل (أ − ب)	* احتمال وقوع ب أو عدم وقوع أ * احتمال عدم وقوع أ فقط.	ف ب أ
ل [(أ − ب) ∪ (ب − أ)] = ل (أ ∪ ب) − ل (أ ∩ ب)	* احتمال وقوع أحد الحدثين دون الآخر. * احتمال وقوع أحد الحدثين فقط.	ف ب أ

حساب الاحتمال

إذا كان ف فضاء عينة لتجربة عشوائية ما جميع نواتجها (الأحداث الأولية) متساوية الإمكانات ، فإن احتمال وقوع أى حدث أ ⊂ ف يعطى بالقانون :

ل (أ) = $\frac{\text{عدد النواتج التى تؤدى إلى وقوع الحدث أ}}{\text{عدد جميع النواتج الممكنة}}$ **أى أن :** ل (أ) = $\frac{\text{عدد عناصر أ}}{\text{عدد عناصر ف}}$ = $\frac{\text{ن (أ)}}{\text{ن (ف)}}$

فمثلًا : إذا كان لدينا صندوق به ٢٤ تفاحة منها ٤ تفاحات تالفة وسحبنا من الصندوق تفاحة واحدة بطريقة عشوائية

، فإن احتمال أن تكون التفاحة المسحوبة تالفة = $\frac{\text{عدد التفاحات التالفة}}{\text{عدد التفاحات فى الصندوق}}$

∴ ل (التفاحة المسحوبة تالفة) = $\frac{٤}{٢٤}$ = $\frac{١}{٦}$

ملاحظتان

١ فى أى تجربة عشوائية تعتمد على إلقاء حجر نرد أو قطعة نقود فإننا نعتبر أن حجر النرد أو قطعة النقود منتظمة تمامًا ما لم ينص على خلاف ذلك.

٢ فى أى تجربة عشوائية تعتمد على اختيار عنصر من مجموعة بها عدد محدود من العناصر فإننا نعتبر أن الاختيار يتم بطريقة عشوائية أى أن جميع عناصر فضاء العينة ف يكون لها قيم احتمالية متساوية (نفس فرص الحدوث).

ملاحظات هامة عند حل المسائل

١ إذا كان أ ⊂ ب فإن :



* ل (أ ∩ ب) = ل (أ) * ل (أ ∪ ب) = ل (ب)
* ل (أ − ب) = ل (∅) = صفر * ل (ب − أ) = ل (ب) − ل (أ)

---

٢ إذا كان أ ، ب حدثين متنافيين فإن :

* ل (أ ∩ ب) = صفر * ل (أ ∪ ب) = ل (أ) + ل (ب)
* ل (أ − ب) = ل (أ) * ل (ب − أ) = ل (ب)

---

٣ إذا كان : ل (أ) = ل (أ̄) فإن : ل (أ) = $\frac{١}{٢}$

وبصفة عامة : إذا كان : $\frac{\text{ل (أ)}}{\text{ل (أ̄)}}$ = $\frac{\text{م}}{\text{ن}}$ فإن : ل (أ) = $\frac{\text{م}}{\text{م + ن}}$

٤ قانونا «دى مورجان» : أَ ∪ بَ = (أ ∩ ب)َ ، أَ ∩ بَ = (أ ∪ ب)َ

ولذلك نجد أن : * ل (أَ ∪ بَ) = ل (أ ∩ ب)َ = ١ − ل (أ ∩ ب)

* ل (أَ ∩ بَ) = ل (أ ∪ ب)َ = ١ − ل (أ ∪ ب)

---

٥ **لاحظ الفرق بين التعبيرات الآتية :**

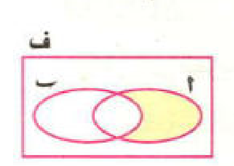
* احتمال عدم وقوع أ أو عدم وقوع ب ⟸ ل (أَ ∪ بَ)

* احتمال عدم وقوع أ أو وقوع ب ⟸ ل (أَ ∪ ب)

* احتمال عدم وقوع (أ أو ب) ⟸ ل (أ ∪ ب)َ «باقى التعبيرات اللفظية راجع الجدول السابق»

---

٦ أ − ب = أ ∩ بَ = بَ ∩ أ = بَ − أَ



ولذلك نجد أن :

* ل (أ ∩ بَ) = ل (أ − ب) = ل (أ) − ل (أ ∩ ب)

* ل (بَ − أَ) = ل (أ − ب) = ل (أ) − ل (أ ∩ ب)

* ل (أَ ∪ ب) = ل (أ ∩ بَ)َ = ل (أ − ب)َ = ١ − ل (أ − ب)



٧ من الشكل المقابل نجد أن :



* ل (أ − ب) + ل (ب − أ) = ل (أ ∪ ب) − ل (أ ∩ ب)

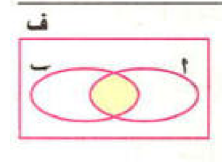
= ل (أ) + ل (ب) − ل (أ ∩ ب) − ل (أ ∩ ب)

= ل (أ) + ل (ب) − ٢ ل (أ ∩ ب)

* ل (أ ∪ ب) = ل (أ) + ل (ب − أ) = ل (ب) + ل (أ − ب)

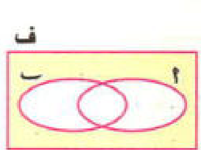
---

٨ * ل (أ − بَ) = ل (أ ∩ ب)



* ل (أَ − ب) = ل (أَ ∩ بَ)

= ل (أ ∪ ب)َ = ١ − ل (أ ∪ ب)



---

٩ يمكنك دائمًا حل مسائل الاحتمالات باستخدام أشكال فن بجانب القوانين والجدول السابقين.

مثال ①

إذا كان س ، ص حدثين من فضاء عينة ف وكان :

ل (س) = ٠,٣٥ ، ل (ص) = ٠,٤٨ ، ل (س ∪ ص) = ٠,٦

فأوجد : ① ل (سَ) ، ل (صَ) ② ل (س ∩ ص) ③ ل (س ∩ صَ) ④ ل (سَ ∩ صَ) ⑤ ل (سَ ∪ صَ)

الحـــل

① ل (سَ) = ١ − ل (س) = ١ − ٠,٣٥ = ٠,٦٥ ، ل (صَ) = ١ − ل (ص) = ١ − ٠,٤٨ = ٠,٥٢

② ∵ ل (س ∪ ص) = ل (س) + ل (ص) − ل (س ∩ ص)

∴ ٠,٦ = ٠,٣٥ + ٠,٤٨ − ل (س ∩ ص)

∴ ل (س ∩ ص) = ٠,٣٥ + ٠,٤٨ − ٠,٦ = ٠,٢٣

③ ل (س ∩ صَ) = ل (س − ص) = ل (س) − ل (س ∩ ص) = ٠,٣٥ − ٠,٢٣ = ٠,١٢

④ ل (سَ ∩ صَ) = ل (س ∪ ص)َ = ١ − ل (س ∪ ص) = ١ − ٠,٦ = ٠,٤

⑤ ل (سَ ∪ صَ) = ل (س ∩ ص)َ = ١ − ل (س ∩ ص) = ١ − ٠,٢٣ = ٠,٧٧

مثال ②

إذا كان أ ، ب حدثين من فضاء عينة لتجربة عشوائية وكان :

ل (أ) = ل (أَ) ، ل (أ ∩ ب) = $\frac{١}{١٦}$ ، ل (ب) = $\frac{٥}{٨}$ ل (أ) أوجد :

① ل (ب) ② ل (أ ∪ ب) ③ ل (أ − ب) ④ ل (ب ∪ أَ) ⑤ ل (أَ ∪ بَ)

الحـــل

∵ ل (أ) = ل (أَ) ∴ ل (أ) = $\frac{١}{٢}$

① ل (ب) = $\frac{٥}{٨}$ × $\frac{١}{٢}$ = $\frac{٥}{١٦}$

② ل (أ ∪ ب) = ل (أ) + ل (ب) − ل (أ ∩ ب) = $\frac{١}{٢}$ + $\frac{٥}{١٦}$ − $\frac{١}{١٦}$ = $\frac{٣}{٤}$

③ ل (أ − ب) = ل (أ) − ل (أ ∩ ب) = $\frac{١}{٢}$ − $\frac{١}{١٦}$ = $\frac{٧}{١٦}$

④ ل (ب ∪ أَ) = ل (أ − ب)َ = ١ − ل (أ − ب) = ١ − $\frac{٧}{١٦}$ = $\frac{٩}{١٦}$

⑤ ل (أَ ∪ بَ) = ل (أ ∩ ب) = $\frac{١}{١٦}$

مثال ٣

إذا كان أ ، ب حدثين من فضاء عينة لتجربة عشوائية وكان ل (ب) = $\frac{١}{٣}$ ، ل (أ ∩ بَ) = $\frac{١}{٤}$

أوجد قيمة ل (أ) إذا كان :

١ أ ، ب حدثين متنافيين. ٢ ب ⊂ أ ٣ ل (أ ∩ ب) = $\frac{١}{١٢}$

الحـــل

∵ ل (أ ∩ بَ) = $\frac{١}{٤}$ ∴ ل (أ − ب) = $\frac{١}{٤}$ ∴ ل (أ) − ل (أ ∩ ب) = $\frac{١}{٤}$

١ ∵ أ ، ب حدثان متنافيان. ∴ ل (أ ∩ ب) = صفر ∴ ل (أ) = $\frac{١}{٤}$

٢ ∵ ب ⊂ أ ∴ ل (أ ∩ ب) = ل (ب)

∴ ل (أ) − ل (ب) = $\frac{١}{٤}$ ∴ ل (أ) − $\frac{١}{٣}$ = $\frac{١}{٤}$ ∴ ل (أ) = $\frac{١}{٤}$ + $\frac{١}{٣}$ = $\frac{٧}{١٢}$

٣ ∵ ل (أ ∩ ب) = $\frac{١}{١٢}$ ∴ ل (أ) − $\frac{١}{١٢}$ = $\frac{١}{٤}$ ∴ ل (أ) = $\frac{١}{٤}$ + $\frac{١}{١٢}$ = $\frac{١}{٣}$

مثال ٤

إذا كان أ ، ب حدثين من فضاء عينة وكان :

ل (أ) = ٠,٥ ، ل (ب) = ٠,٦ ، ل (أ ∩ ب) = ٠,٤ **أوجد :**

١ احتمال وقوع أحد الحدثين على الأقل.

٢ احتمال وقوع أحد الحدثين على الأكثر.

٣ احتمال وقوع الحدث ب وعدم وقوع الحدث أ

٤ احتمال عدم وقوع الحدث أ

٥ احتمال عدم وقوع أى من الحدثين.

٦ احتمال وقوع أحد الحدثين دون الآخر.

الحـــل

١ احتمال وقوع أحد الحدثين على الأقل = ل (أ ∪ ب) = ل (أ) + ل (ب) − ل (أ ∩ ب) = ٠,٥ + ٠,٦ − ٠,٤ = ٠,٧

٢ احتمال وقوع أحد الحدثين على الأكثر = ل (أ ∩ ب)َ = ١ − ل (أ ∩ ب) = ١ − ٠,٤ = ٠,٦

٣ احتمال وقوع الحدث ب وعدم وقوع الحدث أ = ل (ب − أ) = ل (ب) − ل (أ ∩ ب) = ٠,٦ − ٠,٤ = ٠,٢

٤ احتمال عدم وقوع الحدث أ = ل (أَ) = ١ − ل (أ) = ١ − ٠,٥ = ٠,٥

٥ احتمال عدم وقوع أى من الحدثين = ل (أ ∪ ب)َ = ١ − ل (أ ∪ ب) = ١ − ٠,٧ = ٠,٣

٦ احتمال وقوع أحد الحدثين دون الآخر = ل (أ ∪ ب) − ل (أ ∩ ب) = ٠,٧ − ٠,٤ = ٠,٣

مثال ٥

ألقى حجر نرد منتظم مرة واحدة. أوجد احتمالات الأحداث الآتية :

١ $أ_1$ حدث «الحصول على العدد ٣».

٢ $أ_2$ حدث «الحصول على عدد أكبر من ٤».

٣ $أ_3$ حدث «الحصول على عدد زوجى».

٤ $أ_4$ حدث «الحصول على عدد أولى».

٥ $أ_5$ حدث «الحصول على عدد زوجى وأولى».

٦ $أ_6$ حدث «الحصول على عدد زوجى أو أولى».

الحل

ف = {١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ ، ٥ ، ٦} ∴ ن(ف) = ٦

١ $أ_1$ = {٣} ∴ ل($أ_1$) = $\frac{١}{٦}$

٢ $أ_2$ = {٥ ، ٦} ∴ ل($أ_2$) = $\frac{٢}{٦}$ = $\frac{١}{٣}$

٣ $أ_3$ = {٢ ، ٤ ، ٦} ∴ ل($أ_3$) = $\frac{٣}{٦}$ = $\frac{١}{٢}$

٤ $أ_4$ = {٢ ، ٣ ، ٥} ∴ ل($أ_4$) = $\frac{٣}{٦}$ = $\frac{١}{٢}$

٥ $أ_5$ = $أ_3 \cap أ_4$ = {٢} ∴ ل($أ_5$) = $\frac{١}{٦}$

٦ $أ_6$ = $أ_3 \cup أ_4$ = {٢ ، ٣ ، ٤ ، ٥ ، ٦} ∴ ل($أ_6$) = $\frac{٥}{٦}$

أ، ل($أ_6$) = ل($أ_3 \cup أ_4$) = ل($أ_3$) + ل($أ_4$) − ل($أ_3 \cap أ_4$) = $\frac{١}{٢}$ + $\frac{١}{٢}$ − $\frac{١}{٦}$ = $\frac{٥}{٦}$

مثال ٦

ألقيت قطعة نقود منتظمة مرتين متتاليتين. أوجد احتمالات الأحداث الآتية :

١ $أ_1$ حدث «الحصول على صورة فى كل من الرميتين».

٢ $أ_2$ حدث «الحصول على كتابة واحدة على الأكثر».

٣ $أ_3$ حدث «الحصول على كتابة واحدة على الأقل».

٤ $أ_4$ حدث «الحصول على صورة واحدة فقط».

الحل

ف = {(ص ، ص) ، (ص ، ك) ، (ك ، ص) ، (ك ، ك)} ∴ ن(ف) = ٤

١ $أ_1$ = {(ص ، ص)} ∴ ل($أ_1$) = $\frac{١}{٤}$

٢ $أ_2$ = {(ص ، ص) ، (ص ، ك) ، (ك ، ص)} ∴ ل($أ_2$) = $\frac{٣}{٤}$

٣ $أ_3$ = {(ص ، ك) ، (ك ، ص) ، (ك ، ك)} ∴ ل($أ_3$) = $\frac{٣}{٤}$

٤ $أ_4$ = {(ص ، ك) ، (ك ، ص)} ∴ ل($أ_4$) = $\frac{٢}{٤}$ = $\frac{١}{٢}$

مثال ٧

يوجه صيادان نيرانهما إلى ثعلب ، فإذا كان احتمال أن يصيب الأول الثعلب هو $\frac{١}{٢}$

واحتمال أن يصيب الثانى الثعلب هو $\frac{٢}{٣}$ واحتمال أن يصيب الاثنان معًا الثعلب هو $\frac{١}{٣}$ **فأوجد :**

١ احتمال إصابة الثعلب.　　　٢ احتمال عدم إصابة الثعلب.

٣ احتمال أن يصيب الصياد الأول وحده الثعلب.

٤ احتمال إصابة الثعلب من الصياد الثانى فقط.

٥ احتمال إصابة الثعلب من أحدهما فقط.

٦ احتمال إصابة الثعلب من أحدهما على الأكثر.

الحـــل

بفرض أن أ هو حدث أن يصيب الأول الثعلب　　∴ ل (أ) = $\frac{١}{٢}$

، ب هو حدث أن يصيب الثانى الثعلب　　∴ ل (ب) = $\frac{٢}{٣}$

فيكون أ ∩ ب هو حدث أن يصيب الاثنان معًا الثعلب　　∴ ل (أ ∩ ب) = $\frac{١}{٣}$

١ احتمال إصابة الثعلب = ل (أ ∪ ب) = ل (أ) + ل (ب) − ل (أ ∩ ب) = $\frac{١}{٢} + \frac{٢}{٣} - \frac{١}{٣} = \frac{٥}{٦}$

٢ احتمال عدم إصابة الثعلب = ل (أ ∪ ب)َ = ١ − $\frac{٥}{٦} = \frac{١}{٦}$

٣ احتمال أن يصيب الصياد الأول وحده الثعلب = ل (أ − ب) = ل (أ) − ل (أ ∩ ب) = $\frac{١}{٢} - \frac{١}{٣} = \frac{١}{٦}$

٤ احتمال إصابة الثعلب من الصياد الثانى فقط = ل (ب − أ) = ل (ب) − ل (أ ∩ ب) = $\frac{٢}{٣} - \frac{١}{٣} = \frac{١}{٣}$

٥ احتمال إصابة الثعلب من أحدهما فقط = ل (أ − ب) + ل (ب − أ) = $\frac{١}{٦} + \frac{١}{٣} = \frac{١}{٢}$

٦ احتمال إصابة الثعلب من أحدهما على الأكثر = ل (أ ∩ ب)َ = ١ − ل (أ ∩ ب) = ١ − $\frac{١}{٣} = \frac{٢}{٣}$

مثال ٨

صُمم حجر نرد بحيث كانت احتمالات ظهور الأعداد الفردية متساوية واحتمالات ظهور الأعداد الزوجية متساوية وكان احتمال ظهور أى عدد زوجى ضعف احتمال ظهور أى عدد فردى فإذا ألقى هذا الحجر مرة واحدة.

أوجد احتمال ظهور كل من الأعداد الستة للنرد ثم احسب احتمال كل من الحدثين الآتيين :

١ أ حدث «الحصول على عدد أولى».　　　٢ ب حدث «الحصول على عدد ≤ ٣».

الحـــل

فضاء العينة ف = {١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ ، ٥ ، ٦}

∴ ل (١) + ل (٢) + ل (٣) + ل (٤) + ل (٥) + ل (٦) = ل (ف) = ١

ويفرض أن : ل (١) = ل (٣) = ل (٥) = س ∴ ل (٢) = ل (٤) = ل (٦) = ٢ س

∴ س + ٢ س + س + ٢ س + س + ٢ س = ١

∴ ٩ س = ١ ∴ س = $\frac{١}{٩}$

∴ ل (١) = ل (٣) = ل (٥) = $\frac{١}{٩}$ ، ل (٢) = ل (٤) = ل (٦) = $\frac{٢}{٩}$

[١] ∵ أ = {٢ ، ٣ ، ٥}

∴ ل (أ) = ل ({٢ ، ٣ ، ٥}) = ل (٢) + ل (٣) + ل (٥) = $\frac{٢}{٩}$ + $\frac{١}{٩}$ + $\frac{١}{٩}$ = $\frac{٤}{٩}$

[٢] ∵ ب = {٣ ، ٤ ، ٥ ، ٦}

∴ ل (ب) = ل ({٣ ، ٤ ، ٥ ، ٦}) = ل (٣) + ل (٤) + ل (٥) + ل (٦) = $\frac{١}{٩}$ + $\frac{٢}{٩}$ + $\frac{١}{٩}$ + $\frac{٢}{٩}$ = $\frac{٦}{٩}$ = $\frac{٢}{٣}$

لاحظ أنه : اصطلح على التعبير عن الحدث ل ({و}) بالصورة ل (و)

ففى المثال السابق ل ({١}) = ل (١) ، ل ({٣}) = ل (٣) وهكذا .....

مثال ٩

تقدم ٥٠ شخصًا للاختبار لشغل إحدى الوظائف فوجد أن ٣٥ شخصًا يجيدون الإنجليزية ، ٢٠ شخصًا يجيدون الفرنسية ، ١٥ شخصًا يجيدون اللغتين الإنجليزية والفرنسية معًا

فإذا اختير أحد المتقدمين عشوائيًا **فاحسب احتمالات الأحداث الآتية :**

[١] $أ_١$ حدث «الشخص المختار يجيد إحدى اللغتين على الأقل».

[٢] $أ_٢$ حدث «الشخص المختار لا يجيد أيًا من اللغتين».

[٣] $أ_٣$ حدث «الشخص المختار يجيد الإنجليزية فقط».

[٤] $أ_٤$ حدث «الشخص المختار يجيد إحدى اللغتين فقط».

[٥] $أ_٥$ حدث «الشخص المختار يجيد لغة واحدة على الأكثر من الإنجليزية والفرنسية».

الحـل

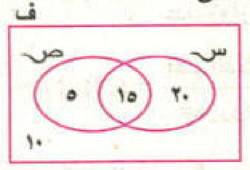
∵ عدد الأشخاص الذين يجيدون الإنجليزية = ٣٥ شخصًا.

، عدد الأشخاص الذين يجيدون الإنجليزية والفرنسية معًا = ١٥ شخصًا.

∴ عدد الأشخاص الذين يجيدون الإنجليزية فقط = ٣٥ − ١٥ = ٢٠ شخصًا.

بالمثل عدد الأشخاص الذين يجيدون الفرنسية فقط = ٢٠ − ١٥ = ٥ أشخاص.

∴ عدد الأشخاص الذين لا يجيدون أيًا من اللغتين = ٥٠ − (٢٠ + ٥ + ١٥) = ١٠ أشخاص.



ويمكن توضيح هذه الأعداد بالاستعانة بشكل ڤن المقابل.

حيث س تمثل مجموعة الأشخاص الذين يجيدون الإنجليزية وعددهم ٣٥ شخصًا ، ص تمثل مجموعة الأشخاص الذين يجيدون الفرنسية وعددهم ٢٠ شخصًا فيكون س ∩ ص تمثل مجموعة الأشخاص الذين يجيدون اللغتين معًا وعددهم ١٥ شخصًا ، ف تمثل مجموعة الأشخاص المتقدمين للاختبار وعددهم ٥٠ شخصًا منهم ١٠ أشخاص لا يجيدون أيًا من اللغتين.

١ $ل(أ_١) = \frac{\text{عدد الأشخاص الذين يجيدون إحدى اللغتين على الأقل}}{\text{عدد المتقدمين}} = \frac{٢٠ + ٥ + ١٥}{٥٠} = \frac{٤٠}{٥٠} = \frac{٤}{٥}$

لاحظ أن : $أ_١ = س \cup ص$

$\therefore ل(أ_١) = ل(س \cup ص) = ل(س) + ل(ص) - ل(س \cap ص) = \frac{٣٥}{٥٠} + \frac{٢٠}{٥٠} - \frac{١٥}{٥٠} = \frac{٤٠}{٥٠} = \frac{٤}{٥}$

٢ $ل(أ_٢) = \frac{\text{عدد الأشخاص الذين لا يجيدون أيًا من اللغتين}}{\text{عدد المتقدمين}} = \frac{١٠}{٥٠} = \frac{١}{٥}$

لاحظ أن : $أ_٢$ هو الحدث المكمل للحدث $أ_١$ $\therefore ل(أ_٢) = ١ - ل(أ_١) = ١ - \frac{٤}{٥} = \frac{١}{٥}$

٣ $ل(أ_٣) = \frac{\text{عدد الأشخاص الذين يجيدون الإنجليزية فقط}}{\text{عدد المتقدمين}} = \frac{٢٠}{٥٠} = \frac{٢}{٥}$

لاحظ أن : $أ_٣ = س - ص$

$\therefore ل(أ_٣) = ل(س - ص) = ل(س) - ل(س \cap ص) = \frac{٣٥}{٥٠} - \frac{١٥}{٥٠} = \frac{٢٠}{٥٠} = \frac{٢}{٥}$

٤ $ل(أ_٤) = \frac{\text{عدد الأشخاص الذين يجيدون إحدى اللغتين فقط}}{\text{عدد المتقدمين}} = \frac{٢٠ + ٥}{٥٠} = \frac{٢٥}{٥٠} = \frac{١}{٢}$

٥ $ل(أ_٥) = \frac{\text{عدد الأشخاص الذين يجيدون لغة واحدة على الأكثر}}{\text{عدد المتقدمين}} = \frac{٢٠ + ٥ + ١٠}{٥٠} = \frac{٣٥}{٥٠} = \frac{٧}{١٠}$

لاحظ أن : $أ_٥$ هو الحدث المكمل لحدث «الشخص المختار يجيد اللغتين معًا» أى مكمل للحدث $س \cap ص$

$\therefore ل(أ_٥) = ١ - ل(س \cap ص) = ١ - \frac{١٥}{٥٠} = \frac{٣٥}{٥٠} = \frac{٧}{١٠}$

مثال ١٠

بلغ عدد زوار أحد المعارض الفنية فى أحد الأيام ١٢٠ زائرًا موزعين كما فى الجدول المقابل : فإذا اختير عشوائيًا أحد الزوار

	عربى	أجنبى	المجموع
ذكر	٤٨	١٦	٦٤
أنثى	٣٢	٢٤	٥٦
المجموع	٨٠	٤٠	١٢٠

فاحسب احتمالات الأحداث الآتية :

١ $أ_١$ حدث «الشخص المختار من الذكور».

٢ $أ_٢$ حدث «الشخص المختار من الأجانب».

٣ $أ_٣$ حدث «الشخص المختار من الذكور الأجانب».

٤ $أ_٤$ حدث «الشخص المختار من الذكور أو من الأجانب».

الحل

١ $ل(أ_١) = \frac{\text{عدد الذكور}}{\text{عدد زوار المعرض}} = \frac{٦٤}{١٢٠} = \frac{٨}{١٥}$

٢ $ل(أ_٢) = \frac{\text{عدد الأجانب}}{\text{عدد زوار المعرض}} = \frac{٤٠}{١٢٠} = \frac{١}{٣}$

٣ $ل(أ_٣) = \frac{\text{عدد الذكور الأجانب}}{\text{عدد زوار المعرض}} = \frac{١٦}{١٢٠} = \frac{٢}{١٥}$

٤ **لاحظ أن :** $أ_٣ = أ_١ \cap أ_٢$ $\therefore ل(أ_٣) = ل(أ_١ \cap أ_٢) = \frac{٢}{١٥}$

وأن : $أ_٤ = أ_١ \cup أ_٢$

$\therefore ل(أ_٤) = ل(أ_١ \cup أ_٢) = ل(أ_١) + ل(أ_٢) - ل(أ_١ \cap أ_٢) = \frac{٨}{١٥} + \frac{١}{٣} - \frac{٢}{١٥} = \frac{٨ + ٥ - ٢}{١٥} = \frac{١١}{١٥}$

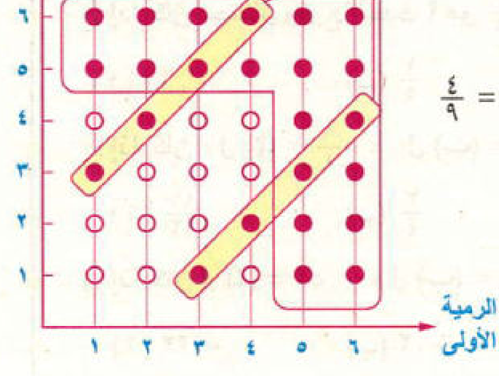
مثال ١١

فى تجربة إلقاء حجر نرد منتظم مرتين متتاليتين إذا كان الحدث ؟ هو حدث الحصول على عددين أحدهما ≤ ٥ ، الحدث ب هو حدث الحصول على عددين الفرق المطلق بينهما = ٢

فاحسب كلاً من :

١ ل (؟) ، ل (؟َ) | ٢ ل (ب) ، ل (بَ) | ٣ ل (؟ ∩ ب)
٤ ل (؟ ∪ ب) | ٥ ل (؟ − ب)

الحل



بالنظر إلى الشكل المقابل نجد أن :

١ عدد عناصر الحدث ؟ = ٢٠ عنصرًا

∴ ل (؟) = $\frac{٢٠}{٣٦}$ = $\frac{٥}{٩}$ ويكون ل (؟َ) = ١ − ل (؟) = ١ − $\frac{٥}{٩}$ = $\frac{٤}{٩}$

٢ عدد عناصر الحدث ب = ٨ عناصر

∴ ل (ب) = $\frac{٨}{٣٦}$ = $\frac{٢}{٩}$

ويكون ل (بَ) = ١ − ل (ب) = ١ − $\frac{٢}{٩}$ = $\frac{٧}{٩}$

٣ ∵ عدد العناصر المشتركة بين الحدثين ؟ ، ب = ٤ عناصر

∴ ل (؟ ∩ ب) = $\frac{٤}{٣٦}$ = $\frac{١}{٩}$

٤ ل (؟ ∪ ب) = ل (؟) + ل (ب) − ل (؟ ∩ ب) = $\frac{٥}{٩}$ + $\frac{٢}{٩}$ − $\frac{١}{٩}$ = $\frac{٦}{٩}$ = $\frac{٢}{٣}$

٥ ل (؟ − ب) = ل (؟) − ل (؟ ∩ ب) = $\frac{٥}{٩}$ − $\frac{١}{٩}$ = $\frac{٤}{٩}$

تمارين 15 على مسلمات وقوانين الاحتمال - حساب الاحتمال



من أسئلة الكتاب المدرسي • فهم • تطبيق • مستويات عليا

أولًا أسئلة الاختيار من متعدد

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

(١) احتمال الحدث المؤكد + احتمال الحدث المستحيل = ...

(أ) ∅ (ب) ف ∪ ∅ (جـ) صفر (د) ١

(٢) إذا كان احتمال وقوع الحدث أ هو $\frac{٣}{٥}$ فإن احتمال عدم وقوعه = ...

(أ) ٠,٦ (ب) $\frac{١}{٥}$ (جـ) صفر (د) ٤٠ ٪

(٣) إذا كان : ل (أ) = $\frac{١}{٤}$ ، ل (ب) = $\frac{٢}{٣}$ ، ل (أ ∩ ب) = $\frac{١}{٣}$ فإن : ل (أ ∪ ب) = ...

(أ) $\frac{١١}{١٢}$ (ب) $\frac{٣}{٤}$ (جـ) $\frac{٢}{٣}$ (د) $\frac{٧}{١٢}$

(٤) إذا كان ل (أ) = ٠,٥٢ ، ل (ب) = ٠,٥٦ ، ل (أ ∪ ب) = ٠,٨٦ فإن : ل (أ ∩ ب) = ...

(أ) ٠,٢٢ (ب) ٠,٣ (جـ) ٠,٣١ (د) ٠,٣٤

(٥) إذا كان ل (أ) = ٠,٤ ، ل (أ ∩ ب) = ٠,١ فإن : ل (أ − ب) = ...

(أ) ٠,١ (ب) ٠,٢ (جـ) ٠,٣ (د) ٠,٥

(٦) إذا كان ل (أ ∩ ب) = ٠,٦ ، ل (ب − أ) = ٠,١ فإن ل (ب) = ...

(أ) ٠,١ (ب) ٠,٥ (جـ) ٠,٦ (د) ٠,٧

(٧) إذا كان ل (أ) = ٠,٦ ، ل (ب − أ) = ٠,٣ فإن : ل (أ ∪ ب) = ...

(أ) ٠,٣ (ب) ٠,٧ (جـ) ٠,٩ (د) ١

(٨) إذا كان : أ ∩ ب = ∅ ، ل (أ) = ٠,٧ ، ل (بَ) = ٠,٤

فإن : ل (أ ∪ ب) = ...

(أ) ٠,٨ (ب) ٠,٣ (جـ) ١ (د) ٠,٩

(٩) إذا كان أ ، ب حدثين متنافيين من فضاء العينة ف وكان : ل (بَ) = $\frac{١}{٤}$ ، ل (أ ∪ ب)َ = ٠,٠٥

فإن : ل (أ) = ...

(أ) ٠,٧٥ (ب) ٠,٧ (جـ) ٠,٩٥ (د) ٠,٢

(١٠) إذا كان أ ، ب حدثين من فضاء عينة لتجربة عشوائية ما وكان : أ ⊃ ب ، ل (أ ∩ ب) = $\frac{٢}{٥}$

، ل (أ ∪ ب) = $\frac{٤}{٥}$ فإن : ل (أ) = ...

(أ) $\frac{١}{٥}$ (ب) $\frac{٢}{٥}$ (جـ) $\frac{٣}{٥}$ (د) $\frac{٤}{٥}$

(١١) فى تجربة إلقاء حجر نرد منتظم مرتين متتاليتين فإن احتمال الحصول على العدد ٥ فى إحدى الرميتين والعدد ٦ فى الرمية الأخرى هو ....

(أ) $\frac{١}{٣٦}$ (ب) $\frac{١}{٦}$ (جـ) $\frac{١}{١٨}$ (د) $\frac{١}{٩}$

(١٢) إذا أُختير حرفًا عشوائيًا من حروف المجموعة : ف = {أ ، ب ، حـ ، ء ، هـ ، و ، س ، ك ، م ، ع} فإن احتمال أن يكون هذا الحرف هو أحد حروف كلمة مبروك هو ....

(أ) $\frac{١}{٤}$ (ب) $\frac{١}{٣}$ (جـ) $\frac{١}{٢}$ (د) $\frac{٢}{٣}$

(١٣) فصل به ٤٢ طالبًا نجح منهم فى آخر العام ٣٥ طالبًا فإذا اختير طالب عشوائيًا فإن احتمال أن يكون راسبًا هو ....

(أ) $\frac{٥}{٦}$ (ب) $\frac{١}{٦}$ (جـ) صفر (د) ١

(١٤) إذا أُلقيت قطعة نقود منتظمة مرة واحدة فإن احتمال ظهور صورة أو كتابة يساوى ....

(أ) صفر (ب) $\frac{١}{٢}$ (جـ) $\frac{١}{٣}$ (د) ١

(١٥) ألقيت قطعة نقود منتظمة مرتين متتاليتين فإن احتمال ظهور صورة واحدة على الأكثر = ...

(أ) $\frac{٣}{٤}$ (ب) $\frac{١}{٢}$ (جـ) $\frac{٢}{٣}$ (د) $\frac{١}{٤}$

(١٦) صندوق به ٣٠ بطاقة متماثلة مرقمة من ١ إلى ٣٠ ، سحبت بطاقة واحدة عشوائيًا من هذا الصندوق فإن احتمال أن تكون البطاقة المسحوبة مرقمة بعدد فردى مكعب كامل = ...

(أ) صفر (ب) $\frac{١}{١٠}$ (جـ) $\frac{١}{٣٠}$ (د) $\frac{١}{١٥}$

(١٧) إذا كان : ل (أ) = ٠,٣ ، ل (ب) = ٠,٥ ، ل (أ ∩ ب) = ٠,١

فإن : ل (أَ ∩ بَ) = ...

(أ) ٠,٧ (ب) ٠,٤ (جـ) ٠,٣ (د) ٠,١

(١٨) إذا كان أ ، ب حدثين متنافيين فإن : ل (أَ ∪ بَ) = ...

(أ) صفر (ب) ١ (جـ) ٠,٥ (د) ٥٠٪

(١٩) إذا كان أ ، ب حدثين من فضاء عينة لتجربة عشوائية وكان : ل (أ) = $\frac{١}{٤}$

، ل (أ ∩ ب) = $\frac{١}{٥}$ فإن : ل (أَ ∪ ب) = ...

(أ) $\frac{١٩}{٢٠}$ (ب) $\frac{١}{٢٠}$ (جـ) $\frac{٧}{٢٠}$ (د) $\frac{١٣}{٢٠}$

(٢٠) إذا كان : ل (أ) = $\frac{١}{٢}$ ، ل (ب) = $\frac{٢}{٥}$ ، ل (أ ∪ ب) = $\frac{٤}{٥}$ فإن : ل (أَ ∩ ب) = ...

(أ) $\frac{١}{١٠}$ (ب) $\frac{٣}{١٠}$ (جـ) $\frac{٣}{٥}$ (د) ٠,٦

(٢١) إذا كان : أ ، ب حدثين من فضاء العينة ف لتجربة عشوائية ما وكان :

ل (أ) = $\frac{١}{٢}$ ، ل (أ ∪ ب)َ = $\frac{١}{٣}$ وكان أ ⊃ ب فإن : ل (ب) = ...

(أ) $\frac{١}{٦}$ (ب) $\frac{٢}{٣}$ (جـ) $\frac{١}{١٢}$ (د) $\frac{٥}{٦}$

(٢٢) إذا كان : أ ، ب حدثين من ف فضاء عينة لتجربة عشوائية وكان :

ل (أ ∪ ب) = ٠,٨٥ ، ل (أ) = ٠,٧٥ ، ل (بَ) = ٠,٦

فإن : ل (أَ ∪ بَ) = ...

(أ) ٠,٣ (ب) ٠,٤ (جـ) ٠,١٥ (د) ٠,٧

(٢٣) إذا كان : أ ، ب حدثين متنافيين من فضاء عينة لتجربة عشوائية وكان ل (أ) = $\frac{٢}{٣}$

فإن ل (أ − ب) = ...

(أ) صفر (ب) $\frac{١}{٣}$ (جـ) $\frac{٢}{٣}$ (د) ١

(٢٤) أ ، ب حدثان ينتميان إلى فضاء العينة ف المصاحب لتجربة عشوائية ما بحيث كان ل (أ) = ل (ب)

فإذا علمت أن ل (أ ∩ ب) = ٠,٢ ، ل (أ ∪ ب) = ٠,٨ فإن : ل (أَ ∩ ب) = ...

(أ) ٠,٥ (ب) ٠,٣ (جـ) ٠,٨ (د) ٠,٢

(٢٥) إذا كان أ ، ب حدثين من فضاء العينة (ف) وكان ل (أ) : ل (ب) = ٢ : ٣ ، ل (أ ∩ ب) = ٠,١

، ل (أ ∪ ب) = ٠,٧ فإن : ل (أ) = ...

(أ) ٠,١٦ (ب) ٠,٤٨ (جـ) ٠,٣٢ (د) ٠,٦

(٢٦) 📖 يحتوى صندوق على تسع بطاقات متماثلة تحمل الأرقام من ١ إلى ٩ ، اختيرت بطاقة عشوائيًا ،

فإن احتمال أن تحمل البطاقة المسحوبة رقمًا يقسم العدد ٩ أو رقمًا فرديًا هو ....

(أ) $\frac{١}{٣}$ (ب) $\frac{٧}{٩}$ (جـ) $\frac{١}{٢}$ (د) $\frac{٥}{٩}$

(٢٧) سُحبت بطاقة واحدة عشوائيًا من ٥٠ بطاقة متماثلة ومرقمة من ١ إلى ٥٠ فإن احتمال أن يكون العدد

على البطاقة المسحوبة مربع كامل هو ....

(أ) ٢٠٪ (ب) ١٤٪ (جـ) ١٢٪ (د) ٦٪

(٢٨) 📖 سحبت بطاقة عشوائيًا من ٥٠ بطاقة متماثلة ومرقمة من ١ إلى ٥٠ فإن احتمال أن يكون العدد على

البطاقة المسحوبة ليس مربعًا كاملاً ، وليس مضاعفًا للعدد ٧ هو ....

(أ) $\frac{٧}{٥٠}$ (ب) $\frac{٣٣}{٥٠}$ (جـ) $\frac{٣٧}{٥٠}$ (د) $\frac{١٣}{٥٠}$

(٢٩) كيس يحتوى على ٢٥ كرة منها ٤ كرات صفراء ، ٧ كرات حمراء ، والباقى أسود اللون

، فإذا سحبت كرة عشوائيًا . فإن احتمال أن تكون الكرة المسحوبة سوداء أو صفراء = ...

(أ) $\frac{٧}{٢٥}$ (ب) $\frac{٤}{٢٥}$ (جـ) $\frac{١٨}{٢٥}$ (د) $\frac{١٤}{٢٥}$

(٣٠) صندوق به ٢٠ بطاقة متماثلة ومرقمة من ١ إلى ٢٠ سُحبت منه بطاقة واحدة عشوائيًا فإن احتمال أن يكون العدد المكتوب على البطاقة المسحوبة أوليًا أكبر من ١٠ هو ....

(أ) $\frac{١}{١٠}$ (ب) $\frac{١}{٥}$ (جـ) $\frac{٣}{١٠}$ (د) $\frac{١}{٤}$

(٣١) إذا كان : أ ، ب حدثين من فضاء عينة لتجربة عشوائية وكان ل (أ) = $\frac{٩}{٢٠}$ ، ل (ب) = $\frac{٣}{١٠}$

، ل (أ ∪ ب) = ٢ ل (أ ∩ ب) فإن : ل (أ ∩ ب) = ...

(أ) $\frac{١}{٢}$ (ب) $\frac{١}{٤}$ (جـ) $\frac{١}{٥}$ (د) $\frac{١}{٦}$

(٣٢) إذا كان : أ ، ب حدثين من ف فضاء عينة لتجربة عشوائية فإذا كان :

ل (أ) = $\frac{٣}{٥}$ ل (أ ∪ ب) = ٠,٤٥ ، ل (أ − ب) = ٠,٢ فإن : ل (ب) = ...

(أ) ٠,٧٥ (ب) ٠,٦ (جـ) ٠,٦٥ (د) ٠,٥٥

(٣٣) إذا كان : أ ، ب حدثان من فضاء العينة وكان : ل (أ) = ٣ ل (أَ) ، ل (أ ∩ ب) = ٠,٢

فإن احتمال وقوع أ فقط = ...

(أ) ٠,٥٥ (ب) ٠,٠٥ (جـ) ٠,٣ (د) ٠,٧٥

(٣٤) إذا كان أ ، ب حدثين من فضاء النواتج لتجربة عشوائية وكان : ب ⊂ أ

، ل (أ) = ٢ ل (ب) = ٠,٦ فإن : ل (أ − ب) = ...

(أ) ٠,٣ (ب) ٠,٥ (جـ) ٠,٦ (د) ٠,٨

(٣٥) إذا كانت ف فضاء عينة لتجربة عشوائية ، أ ⊂ ف ، وكان : $\frac{ل (أَ)}{ل (أ)} = \frac{٣}{٥}$ فإن : ل (أ) = ...

(أ) $\frac{١}{٨}$ (ب) $\frac{٣}{٨}$ (جـ) $\frac{٥}{٨}$ (د) $\frac{٢}{٥}$

(٣٦) إذا كان : أ ، ب حدثين من فضاء العينة لتجربة عشوائية ، ل (أَ) = ل (أ) ، ل (أ ∩ ب) = $\frac{١}{٣}$

فإن : ل (أ − ب) = ...

(أ) $\frac{١}{٢}$ (ب) $\frac{٢}{٣}$ (جـ) $\frac{٥}{٦}$ (د) $\frac{١}{٦}$

(٣٧) إذا كان أ ، ب حدثين من فضاء العينة ف لتجربة عشوائية وكان : أ ⊂ ب ، ل (أ) = $\frac{١}{٢}$ ، احتمال وقوع ب فقط يساوى ٠,٢ فإن احتمال عدم وقوع ب = ...

(أ) ٠,١ (ب) ٠,٣ (جـ) ٠,٧ (د) ٠,٩

(٣٨) خمس بطاقات متماثلة مرقمة من ٢ إلى ٦ ، سحبت بطاقتان الواحدة بعد الأخرى مع الإحلال ، وملاحظة الرقم المسجل عليها لتكوين جميع الأعداد الممكنة ذات الرقمين فإن احتمال أن يكون رقم الآحاد عددًا أوليًا أو رقم العشرات عددًا فرديًا = ...

(أ) $\frac{٣}{٥}$ (ب) $\frac{٢}{٥}$ (جـ) $\frac{٢٣}{٢٥}$ (د) $\frac{١٩}{٢٥}$

(٣٩) صندوق به ٨ بطاقات مرقمة من ١ إلى ٨ ، سحبت بطاقتان واحدة بعد الأخرى مع الإحلال فإن احتمال أن يكون الفرق المطلق بين الرقمين يساوى ٣ هو ....

(أ) $\frac{٥}{٣٢}$ (ب) $\frac{٢}{١٧}$ (جـ) $\frac{٢١}{٦٤}$ (د) $\frac{١}{٤}$

(٤٠) إذا كان أ ، ب حدثين من فضاء عينة لتجربة عشوائية عناصرها ذات احتمالات متساوية ، وكان ل (ب) = $\frac{١}{٢}$ ، ل (أ) = ١ − ل (ب) ، فإن : ....

(أ) ن(أ) = ن(ب) (ب) ن(أ) > ن(ب)

(جـ) ن(أ) < ن(ب) (د) ن(أ) + ن(ب) = ١

(٤١) صمم حجر نرد بحيث عند إلقائه تكون احتمالات ظهور الأعداد ١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ ، ٥ متساوية ، احتمال ظهور العدد ٦ يساوى ثلاثة أمثال احتمال ظهور العدد ١ فإن احتمال ظهور عدد زوجى = ...

(أ) $\frac{١}{٢}$ (ب) $\frac{٣}{٨}$ (جـ) $\frac{٥}{٨}$ (د) $\frac{٣}{٤}$

(٤٢) ألقى حجر نرد منتظم مرة واحدة على منضدة ، ولوحظ العدد الظاهر على وجهه العلوى فإن احتمال ألا يزيد هذا العدد عن ٥ ولا يقل عن ٣ هو ....

(أ) $\frac{١}{٦}$ (ب) $\frac{١}{٣}$ (جـ) $\frac{١}{٢}$ (د) $\frac{٢}{٣}$

(٤٣) فى تجربة إلقاء حجر نرد مرتين فإن احتمال أن يكون مجموع العددين الظاهرين على الوجه العلوى عدد أولى = ...

(أ) $\frac{٧}{١٨}$ (ب) $\frac{١}{٢}$ (جـ) $\frac{٥}{١١}$ (د) $\frac{٥}{١٢}$

(٤٤) إذا ألقى حجر نرد منتظم ثلاث مرات متتالية فإن احتمال الحصول على ثلاثة أعداد متشابهة هو ....

(أ) $\frac{١}{٣٦}$ (ب) $\frac{١}{٦}$ (جـ) $\frac{٥}{٦}$ (د) $\frac{١}{٢١٦}$

(٤٥) إذا ألقى حجر نرد منتظم مرة واحدة فإن احتمال ظهور عدد زوجى غير أولى = ...

(أ) $\frac{١}{٣}$ (ب) $\frac{١}{٢}$ (جـ) $\frac{١}{٦}$ (د) $\frac{٥}{٦}$

(٤٦) ألقى حجر نرد ثلاث مرات ولوحظ العدد الظاهر على الوجه العلوى فإن احتمال أن يكون مجموع الأرقام الظاهرة هو ١٨ يساوى ....

(أ) $\frac{١}{٦}$ (ب) $\frac{١}{٣٦}$ (جـ) $\frac{١}{٢١٦}$ (د) $\frac{١}{١٠٨}$

(٤٧) ألقى حجر نرد منتظم مرة واحدة فإذا كان الحدث أ هو «ظهور عدد فردى» ، والحدث ب هو «ظهور عدد أقل من ٥» فإن احتمال وقوع أحدهما على الأقل هو ....

(أ) $\frac{١}{٦}$ (ب) $\frac{١}{٢}$ (جـ) $\frac{٥}{٦}$ (د) $\frac{١}{٣}$

(٤٨) فى تجربة إلقاء حجر نرد منتظم مرتين متتاليتين ، فإن احتمال الحصول على عدد زوجى فى الرمية الأولى وعدد أولى فى الرمية الثانية هو ....

(أ) $\frac{١}{٣}$ (ب) $\frac{١}{٦}$ (جـ) $\frac{١}{٩}$ (د) $\frac{١}{٤}$

(٤٩) أ ، ب ، حـ ثلاثة أحداث متنافية من فضاء العينة ف لتجربة عشوائية ما بحيث ف = أ ∪ ب ∪ حـ

فإذا كان ل (أ) = ل (ب) ، ل (حـ) = $\frac{١}{٢}$ ل (أ) فإن : ل (أ − حـ) = ...

(أ) $\frac{٤}{٥}$ (ب) $\frac{٢}{٥}$ (جـ) $\frac{٣}{٥}$ (د) $\frac{١}{٢}$

(٥٠) إذا كان أ ، ب حدثين من فضاء عينة لتجربة عشوائية وكان : ل (أ) = ٠,٥ ، ل (أ ∪ ب) = ٠,٦

، ل (أ ∩ بَ) = ٠,٣ فإن : ل (ب) = ...

(أ) ٠,٢ (ب) ٠,٣ (جـ) ٠,٥ (د) ٠,٩

(٥١) إذا كان فضاء العينة لتجربة عشوائية هو ف = {أ ، ب ، حـ ، ء} وكان ل ({ب}) = ٠,٣٣

، ل ({ب ، حـ}) = ٠,٤٥ ، ل ({ب ، ء}) = ٠,٦٥ فإن : ل ({أ}) = ...

(أ) ٠,٧٧ (ب) ٠,٢٣ (جـ) ٠,١١ (د) ٠,٠١

(٥٢) إذا كان ف = {أ ، ب ، حـ} فضاء عينة لتجربة عشوائية ما ،

وكان : ٢٠ ل (أ) = ١٥ ل (ب) = ١٢ ل (حـ) فإن : ل (ب) = ...

(أ) $\frac{١}{٣}$ (ب) $\frac{١}{٤}$ (جـ) $\frac{٥}{١٢}$ (د) $\frac{١٥}{٤٧}$

(٥٣) إذا كان ف فضاء النواتج لتجربة عشوائية حيث ف = {أ ، ب ، حـ} ، وكان $\frac{ل (أَ)}{ل (أ)} = \frac{٨}{٣}$

، $\frac{ل (بَ)}{ل (ب)} = \frac{٥}{٢}$ فإن : ل (حـ) = ...

(أ) $\frac{٣}{١١}$ (ب) $\frac{٢}{٧}$ (جـ) $\frac{٦}{٧٧}$ (د) $\frac{٣٤}{٧٧}$

(٥٤) إذا كان أ ، ب حدثين من فضاء عينة لتجربة عشوائية ، وكان ل (بَ) = ٠,٥ ، ل (أ ∪ ب) = ٠,٨

، ل (أ ∩ ب) = ل (أ) × ل (ب) فإن : ل (أ) = ...

(أ) ٠,٥ (ب) ٠,٧ (جـ) ٠,٤ (د) ٠,٦

(٥٥) إذا كان : أ ، ب حدثين من فضاء عينة لتجربة عشوائية فإن احتمال وقوع أحدهما فقط هو ....

(أ) ل (أ ∪ ب) (ب) ل (أ ∪ ب)َ

(جـ) ل (أ ∪ ب) − ل (أ ∩ ب) (د) ل (أ ∩ ب)

(٥٦) إذا كان : أ ، ب حدثين من فضاء العينة لتجربة عشوائية ف

فإن احتمال وقوع أحد الحدثين دون الآخر = ...

(أ) ل (أ) + ل (ب) (ب) ل (أ) + ل (ب) − ل (أ ∩ ب)

(جـ) ل (أ) + ل (ب) + ل (أ ∩ ب) (د) ل (أ) + ل (ب) − ٢ ل (أ ∩ ب)

(٥٧) إذا كان أ ، ب حدثين من فضاء عينة لتجربة عشوائية ، وكان احتمال وقوع الحدث ب وعدم وقوع الحدث أ = ٠,١٨ ، واحتمال وقوع أحد الحدثين أ ، ب بالضبط = ٠,٤٣ فإن احتمال وقوع أ فقط = ...

(أ) ٠,٢٥ (ب) ٠,٠٩ (جـ) ٠,٦١ (د) ٠,٧

(٥٨) أربع رجال أ ، ب ، حـ ، ء يقفوا فى صف واحد فإن احتمال أن يقف الرجل (أ) على أحد نهايتى الصف هو ....

(أ) $\frac{١}{٢}$ (ب) $\frac{١}{٣}$ (جـ) $\frac{١}{٤}$ (د) $\frac{١}{٦}$

(٥٩) إذا كان احتمال نجاح طالب فى الرياضيات ٠,٨ واحتمال نجاحه فى اللغة الفرنسية ٠,٧ واحتمال نجاحه فى المادتين معًا ٠,٥٦

فإن احتمال نجاحه فى الرياضيات وعدم نجاحه فى اللغة الفرنسية = ...

(أ) ٠,٢٤ (ب) ٠,٩٤ (جـ) ٠,٤٤ (د) ٠,٢

(٦٠) فى احتفال أحد الأندية الرياضية بافتتاح مجمع للصالات ، إذا كان احتمال حضور المحافظ ٠,٨ ، واحتمال حضور وزير الشباب والرياضة ٠,٩ ، واحتمال حضورهما معًا ٠,٧٢

فإن احتمال حضور أحدهما على الأقل = ...

(أ) ٠,٨ (ب) ٠,٧٥ (جـ) ٠,٩٨ (د) ٠,٢٨

(٦١) مجموعة من الطلاب تتكون من ٤٨ ولدًا و ٣٢ بنتًا منها ١٨ ولدًا و ٨ بنات من القسم العلمى فإذا اختير أحد الطلاب عشوائيًا فإن احتمال أن يكون بنتًا أو من القسم العلمى هو ....

(أ) $\frac{١٣}{٤٠}$ (ب) $\frac{١}{٨}$ (جـ) $\frac{٣}{٨}$ (د) $\frac{٥}{٨}$

(٦٢) إذا كان أ ، ب حدثين من فضاء العينة (ف) لتجربة عشوائية حيث ل (ب) = $\frac{٥}{٧}$

فإن : ل (أَ ∩ ب) + ل (أ ∩ ب) = ...

(أ) $\frac{٢}{٧}$ (ب) $\frac{٥}{٧}$ (جـ) ١ (د) صفر

(٦٣) إذا كان أ ، ب حدثين من أحداث تجربة عشوائية حيث ل (أ − ب) = ٠,٣

، ل (ب − أ) = $\frac{٤}{١٥}$ ، ل (أَ ∩ بَ) = $\frac{١}{٥}$ فإن : ل (أ ∩ ب) = ...

(أ) $\frac{١}{٢}$ (ب) $\frac{٨}{١٥}$ (جـ) ٠,٦ (د) $\frac{٧}{٣٠}$

(٦٤) إذا كان أ ، ب حدثين متنافيين من فضاء العينة ف وكان : ل (بَ) = $\frac{٣}{٤}$

، ل (ف − (أ ∪ ب)) = $\frac{٢}{٣}$ فإن : ل (أ) = ...

(أ) $\frac{١}{٣}$ (ب) $\frac{١}{٤}$ (جـ) $\frac{٢}{٧}$ (د) $\frac{١}{١٢}$

(٦٥) إذا كان أ ، ب حدثين من فضاء عينة لتجربة عشوائية وكان : ل (أ − ب) = ل (أ ∩ ب)

، ٧ ل (أ) = ٦ ل (ب) ، ل (أ ∪ ب) = $\frac{٥}{٦}$ فإن : ل (أ) = ...

(أ) $\frac{١}{٣}$ (ب) $\frac{١}{٤}$ (جـ) $\frac{١}{٢}$ (د) $\frac{٢}{٣}$

(٦٦) إذا كان ل (أ) = ل (أَ) ، ل (ب) = $\frac{١}{٤}$ ، ل (أ ∪ بَ) = $\frac{٧}{٨}$ حيث أ ، ب حدثان من فضاء تجربة عشوائية

فإن : ل (أَ ∪ بَ) = ...

(أ) $\frac{١}{٨}$ (ب) $\frac{١}{٢}$ (جـ) $\frac{٣}{٨}$ (د) $\frac{٧}{٨}$

(٦٧) صندوق يحتوى على ١٠ كرات بيضاء ، س كرة حمراء ، ص كرة سوداء فإذا سُحبت كرة عشوائيًا من الصندوق وكان احتمال أن تكون الكرة بيضاء = $\frac{١}{٤}$ ، واحتمال أن تكون حمراء = $\frac{٣}{٥}$ فإن عدد الكرات السوداء = ...

(أ) ٢٤ (ب) ٦ (جـ) ٣٤ (د) ٤٠

(٦٨) إذا كان أ ، ب حدثين من فضاء عينة لتجربة عشوائية ، وكان عدد النواتج التى تؤدى إلى وقوع الحدث أ يساوى ١٢ ، وعدد النواتج التى تؤدى إلى وقوع الحدث ب يساوى ١٦ ، وعدد النواتج التى تؤدى إلى وقوع الحدثين أ ، ب معًا يساوى ٨ ، وكان ل (أ ∪ ب) = $\frac{٢}{٥}$ فإن : ل (أَ ∪ بَ) = ...

(أ) $\frac{٢}{٧}$ (ب) $\frac{٨}{٢٥}$ (جـ) $\frac{٢١}{٢٥}$ (د) $\frac{١}{٢}$

(٦٩) إذا كان أ ، ب حدثين من فضاء العينة لتجربة عشوائية وكان : ل (أ ∩ بَ) = $\frac{١}{١٢}$ ، ل (أَ ∩ ب) = $\frac{٥}{١٢}$ ، ل (أ ∪ ب)َ = $\frac{١}{٤}$ فإن : ل (أ ∩ ب) = ...

(أ) $\frac{١}{٣}$ (ب) $\frac{٢}{٣}$ (جـ) $\frac{١}{٤}$ (د) $\frac{١}{٦}$

(٧٠) إذا كان أ ، ب حدثان من فضاء العينة لتجربة عشوائية وكان : ل (أَ) = $\frac{٣}{٤}$ ، ل (بَ) = $\frac{٢}{٣}$ ، ل (أ ∩ ب) = $\frac{١}{٨}$ فإن : ل (أَ ∩ بَ) = ...

(أ) $\frac{٧}{٢٤}$ (ب) $\frac{١٣}{٢٤}$ (جـ) $\frac{١١}{٢٤}$ (د) $\frac{١٩}{٢٤}$

(٧١) إذا كان احتمال نجاح طالب فى التاريخ ٠,٦٢ واحتمال نجاحه فى الجغرافيا هو ٠,٢٤ واحتمال نجاحه فى إحداهما على الأقل هو ٠,٨١ فإن احتمال نجاح الطالب فى المادتين معًا هو ....

(أ) ٠,١٨ (ب) ٠,٠٥ (جـ) ٠,٥ (د) ٠,٨٦

ثانيًا الأسئلة المقالية

١ إذا كان أ ، ب حدثين من فضاء نواتج لتجربة عشوائية ما ، ل (أ) = ٠,٣ ، ل (ب) = ٠,٨ ، ل (أ ∩ ب) = ٠,٢ احسب كلًا من :

(١) ل (أَ) (٢) ل (أ ∪ ب)
(٣) ل (أ − ب) (٤) ل (أَ ∪ بَ)

«٠,٧ ، ٠,٩ ، ٠,١ ، ٠,٨»

٢ إذا كان أ ، ب حدثين من ف فضاء عينة لتجربة عشوائية ، وكان ل (أ) = $\frac{٣}{٥}$ ل (أ ∪ ب) = ٠,٤٥ . فأوجد ل (ب) فى كل من الحالات الآتية :

(١) أ ، ب حدثان متنافيان. (٢) أ ⊂ ب (٣) ل (أ − ب) = ٠,٢

«٠,٢ ، ٠,٧٥ ، ٠,٥٥»

٣ إذا كان أ ، ب ، حـ ثلاثة أحداث متنافية مثنى مثنى وكان :
ل (أ) = ٠,١٢ ، ل (ب) = ٠,٢٨ ، ل (حـ) = ٠,٣٢ فاحسب قيمة كل من :

(١) ل (أ ∪ حـ) (٢) ل (أ − حـ) (٣) ل (أ ∩ ب)
(٤) ل (حـ ∩ بَ) (٥) ل (أ ∪ ب ∪ حـ) (٦) ل (أ ∩ ب ∩ حـ)
(٧) ل (أ ∪ ب)َ

«٠,٤٤ ، ٠,١٢ ، صفر ، ١ ، ٠,٧٢ ، صفر ، ٠,٦»

٤ إذا كان أ ، ب حدثين من فضاء العينة ف لتجربة عشوائية ما

وكان : ل (أ) = $\frac{١}{٢}$ ، ل (ب) = س ، ل (أ ∪ ب)َ = $\frac{١}{٣}$

أولًا : أوجد قيمة س فى كل من الحالتين الآتيتين : (١) أ ، ب حدثان متنافيان. (٢) أ ⊂ ب

ثانيًا : إذا كانت : س = $\frac{١}{٤}$ فأوجد : ل (أ ∩ ب)

«$\frac{١}{٦}$ ، $\frac{٢}{٣}$ ، $\frac{١}{١٢}$»

---

٥ إذا كان أ ، ب حدثين من فضاء نواتج لتجربة عشوائية ف

، ل (ب) = $\frac{٤}{٥}$ ل (أ) ، ل (أ − ب) = ٠,٢٤ ، ل (ب ∩ أَ) = ٠,١٥

أوجد : ل (أ) ، ل (ب) ، ل (أ ∪ ب) ، ل (أَ ∪ بَ)

«٠,٤٥ ، ٠,٣٦ ، ٠,٦ ، ٠,٧٩»

---

٦ إذا كان ف فضاء النواتج لتجربة عشوائية حيث ف = {أ ، ب ، حـ}

، وكان $\frac{\text{ل (أَ)}}{\text{ل (أ)}}$ = $\frac{٧}{٣}$ ، ٢ ل (ب) = ٣ ل (بَ) فأوجد : $\frac{\text{ل (حـَ)}}{\text{ل (حـ)}}$

«٩»

---

٧ إذا كان ف = {أ ، ب ، حـ ، ء} فضاء عينة لتجربة عشوائية أوجد :

ل (أ) ، ل (ب) إذا كان : ل (أ) = ٣ ل (ب) ، ل (حـ) = ل (ء) = $\frac{٧}{١٨}$

«$\frac{١}{٦}$ ، $\frac{١}{١٨}$»

---

٨ إذا كان أ ، ب حدثين من فضاء عينة لتجربة عشوائية ، وكان : ل (أ) = ٠,٦٥ ، ل (بَ) = ٠,٢٥

، ل (أ − ب) = ٠,٠٥ فأوجد احتمال كل من الأحداث الآتية :

(١) وقوع الحدث ب
(٢) عدم وقوع الحدث أ
(٣) وقوع الحدث ب فقط.
(٤) وقوع أحدهما على الأكثر.
(٥) عدم وقوع أى من الحدثين أ أو ب
(٦) عدم وقوع الحدث أ أو وقوع الحدث ب
(٧) عدم وقوع الحدث أ ووقوع الحدث ب

«٠,٧٥ ، ٠,٣٥ ، ٠,١٥ ، ٠,٤ ، ٠,٢ ، ٠,٩٥ ، ٠,١٥»

---

٩ إذا كان أ ، ب حدثين من فضاء عينة لتجربة عشوائية ف ، وكان :

ل (أَ) = $\frac{١}{٣}$ ل (أ) ، ل (ب) = $\frac{١}{٢}$ ، ل (أَ ∪ بَ) = $\frac{٥}{٨}$ فأوجد :

(١) احتمال وقوع أحد الحدثين على الأقل.
(٢) احتمال وقوع أحد الحدثين على الأكثر.
(٣) احتمال وقوع الحدث ب فقط.
(٤) احتمال وقوع أحد الحدثين فقط.

«$\frac{٧}{٨}$ ، $\frac{٥}{٨}$ ، $\frac{١}{٨}$ ، $\frac{١}{٢}$»

---

١٠ إذا كان أ ، ب حدثين من فضاء عينة لتجربة عشوائية ، وكان احتمال وقوع الحدث أ = ٠,٥

، واحتمال وقوع الحدث ب = ٠,٦ واحتمال عدم وقوع الحدثين معًا = ٠,٨ فأوجد :

(١) احتمال وقوع الحدث أ والحدث ب معًا.
(٢) احتمال وقوع أحد الحدثين على الأقل.
(٣) احتمال وقوع الحدث ب وعدم وقوع الحدث أ

«٠,٢ ، ٠,٩ ، ٠,٤»

١١ يصوب لاعبان أ ، ب فى وقت واحد نحو هدف ما ، فإذا كان احتمال أن يصيب اللاعب أ الهدف هو $\frac{٢}{٥}$ ، واحتمال أن يصيب اللاعب ب الهدف هو $\frac{١}{٤}$ ، واحتمال أن يصيب اللاعبان معًا الهدف هو $\frac{١}{١٠}$ **أوجد احتمالات الأحداث الآتية :**

(١) أ١ حدث «إصابة الهدف».
(٢) أ٢ حدث «إصابة الهدف من ب فقط».
(٣) أ٣ حدث «عدم إصابة الهدف».
(٤) أ٤ حدث «إصابة الهدف من أحدهما على الأكثر».
(٥) أ٥ حدث «إصابة الهدف من أحدهما دون الآخر».

« $\frac{١١}{٢٠}$ ، $\frac{٣}{٢٠}$ ، $\frac{٩}{٢٠}$ ، $\frac{٩}{١٠}$ ، $\frac{٩}{٢٠}$ »

---

١٢ إذا كان احتمال نجاح حسن فى اختبار الرياضيات هو ٠,٧٢ ، واحتمال رسوبه فى اختبار الفيزياء هو ٠,٣٧ ، وكان احتمال نجاحه فى أحد الاختبارين على الأقل هو ٠,٨٨ . **فأوجد احتمالات الأحداث الآتية :**

(١) نجاح حسن فى كلا الاختبارين.
(٢) نجاح حسن فى أحد الاختبارين على الأكثر.
(٣) نجاح حسن فى أحد الاختبارين دون الآخر.
(٤) رسوب حسن فى كلا الاختبارين.

«٠,٤٧ ، ٠,٥٣ ، ٠,٤١ ، ٠,١٢»

---

١٣ **الربط بالرياضة :** صرح مدرب أحد الفرق الرياضية أثناء لقاء صحفى معه بأن احتمال فوز فريقه فى مباراة الذهاب ٠,٧ ، واحتمال فوز فريقه فى مباراة الإياب ٠,٩ ، وأن احتمال فوزه فى المباراتين معًا ٠,٥ . هل يتفق ما صرح به مدرب الفريق مع مفهوم الاحتمال ؟ فسر إجابتك.

---

١٤ أ ، ب حدثان من ف ، ل دالة احتمال على ف ، فإذا كان :

ل (أ) = س ، ل (ب) = ٤ س ، ل (أ ∪ ب) = ٦ س − ٠,٤ .

فأوجد قيمة س إذا كان :

(١) أ ، ب حدثين متنافيين.
(٢) أ ⊂ ب
(٣) ل (أ ∩ ب) = $\frac{٤}{٥}$ س

« $\frac{٧}{٤٥}$ ، ٠,١٤ ، $\frac{١}{٧}$ »

---

١٥ فى تجربة إلقاء حجر نرد مرة واحدة وملاحظة العدد الظاهر على الوجه العلوى.

أوجد احتمالات الأحداث الآتية :

(١) أ حدث «ظهور الرقم ٥».
(٢) ب حدث «عدم ظهور الرقم ٣».
(٣) حـ حدث «ظهور عدد أكبر من ٢».
(٤) ء حدث «ظهور عدد أكبر من ٤ أو أقل من ٣».
(٥) هـ حدث «ظهور عدد أكبر من ٢ وأقل من ٣».
(٦) و حدث «ظهور عدد من عوامل ٦».
(٧) ن حدث «ظهور عدد فردى يقبل القسمة على ٣».

« $\frac{١}{٦}$ ، $\frac{٥}{٦}$ ، $\frac{٢}{٣}$ ، $\frac{٢}{٣}$ ، ٠ ، $\frac{٢}{٣}$ ، $\frac{١}{٦}$ »

١٦ ألقى حجر نرد منتظم كتب على أوجهه الأعداد ٨ ، ٩ ، ١٠ ، ١١ ، ١٢ ، ١٣
ولوحظ العدد على الوجه العلوى. **احسب :**

(أ) احتمال كل من الأحداث التالية :

(١) أ حدث «ظهور عدد فردى».
(٢) ب حدث «ظهور عدد أولى».
(٣) حـ حدث «ظهور عدد زوجى».
(٤) ء حدث «ظهور عدد أكبر من ١٢».
(٥) هـ حدث «ظهور عدد مكون من رقمين».
(٦) و حدث «ظهور عدد مكون من رقم واحد».

(ب) ل (أ ∪ حـ) ، ل (هـ ∪ و) ، ل (ب ∩ ء).

«$\frac{١}{٢}$ ، $\frac{١}{٣}$ ، $\frac{١}{٢}$ ، $\frac{١}{٦}$ ، $\frac{٢}{٣}$ ، $\frac{١}{٣}$ ، ١ ، ١ ، $\frac{١}{٦}$»

---

١٧ مجموعة بطاقات متماثلة ومرقمة من ١ إلى ٣٠ ، سحبت منها بطاقة واحدة عشوائيًا ولوحظ العدد المدون عليها. **احسب احتمال أن تكون البطاقة المسحوبة تحمل :**

(١) عددًا يقبل القسمة على ٣
(٢) عددًا يقبل القسمة على ٥
(٣) عددًا يقبل القسمة على ٣ ، ٥
(٤) عددًا يقبل القسمة على ٣ أو ٥
(٥) عددًا زوجيًا يقبل القسمة على ٣
(٦) عددًا فرديًا مكعبًا كاملًا.
(٧) عددًا أوليًا أصغر من ١٥
(٨) عددًا به رقم ٢ أو رقم ٣

«$\frac{١}{٣}$ ، $\frac{١}{٥}$ ، $\frac{١}{١٥}$ ، $\frac{٧}{١٥}$ ، $\frac{١}{٦}$ ، $\frac{١}{١٥}$ ، $\frac{١}{٥}$ ، $\frac{١}{٢}$»

---

١٨ كيس يحتوى على ٥٠ كرة متماثلة ، ٢٥ كرة منها بيضاء ومرقمة بالأرقام من ١ إلى ٢٥ ، ١٥ كرة منها حمراء ومرقمة بالأرقام من ١ إلى ١٥ ، والباقى كرات زرقاء ومرقمة بالأرقام من ١ إلى ١٠ فإذا سحبت كرة عشوائيًا من الكيس. **احسب احتمال أن تكون الكرة المسحوبة :**

(١) حمراء أو بيضاء.
(٢) حمراء وتحمل عددًا زوجيًا.
(٣) تحمل عددًا أقل من أو يساوى ٨
(٤) تحمل عددًا أقل من أو يساوى ١٢
(٥) تحمل عددًا أكبر من أو يساوى ١٤
(٦) عليها عدد $ن$ حيث ٦ ≤ $ن$ ≤ ٢٠

«٠,٨ ، ٠,١٤ ، ٠,٤٨ ، ٠,٦٨ ، ٠,٢٨ ، ٠,٦»

---

١٩ حقيبة بها ٣ كرات سوداء ، ٣ كرات حمراء فإذا سحبت منها عشوائيًا ٣ كرات بدون إحلال.
فأوجد احتمال كل مما يأتى :

(١) أ حدث «الحصول على كرتين حمراوين على الأكثر».
(٢) ب حدث «الحصول على كرتين بالضبط من نفس اللون».
(٣) حـ حدث «الحصول على كرتين حمراوين على الأقل».
(٤) ء حدث «الحصول على كرتين بالضبط حمراوين متتاليتين».

«$\frac{٧}{٨}$ ، $\frac{٣}{٤}$ ، $\frac{١}{٢}$ ، $\frac{١}{٤}$»

٢٠ فى تجربة إلقاء قطعة نقود منتظمة ثلاث مرات متتالية. **أوجد احتمالات الأحداث الآتية :**

(١) أ حدث «ظهور صورتين على الأقل». (٢) ب حدث «ظهور كتابة واحدة فقط».

(٣) حـ حدث «ظهور كتابتين بالضبط».

(٤) ء حدث «ظهور صورة فى الرمية الأولى وكتابة فى الرمية الثانية».

(٥) هـ حدث «ظهور صورتين متتاليتين على الأقل».

(٦) و حدث «ظهور عدد فردى من الصور».

(٧) ن حدث «ظهور كتابة على الأقل».

«$\frac{1}{2}$ ، $\frac{3}{8}$ ، $\frac{3}{8}$ ، $\frac{1}{4}$ ، $\frac{3}{8}$ ، $\frac{1}{2}$ ، $\frac{7}{8}$»

---

٢١ فى تجربة إلقاء قطعة نقود ثم حجر نرد منتظم وملاحظة الوجه الظاهر لقطعة النقود والعدد الظاهر على الوجه العلوى لحجر النرد ، إذا كان أ هو حدث ظهور صورة وعدد أولى ، ب حدث ظهور عدد زوجى.

احسب احتمال وقوع كلٍّ من الحدثين أ ، ب ثم احسب كل من الأحداث الآتية :

(١) حدث «وقوع أحد الحدثين على الأقل». (٢) حدث «وقوع الحدثين معًا».

(٣) حدث «وقوع ب فقط». (٤) حدث «وقوع أحد الحدثين فقط».

«$\frac{1}{4}$ ، $\frac{1}{2}$ ، $\frac{2}{3}$ ، $\frac{1}{12}$ ، $\frac{5}{12}$ ، $\frac{7}{12}$»

---

٢٢ صمم حجر نرد بحيث يكون وجهان فيه يحملان العدد ٢ ووجهان يحملان العدد ٤ ووجهان يحملان العدد ٦ ، فإذا ألقى هذا الحجر مرتين ، اكتب فضاء العينة لهذه التجربة ، وإذا كان أ هو حدث ظهور العدد ٢ فى الرمية الأولى ، ب هو حدث أن يكون الفرق المطلق بين العددين فى الرميتين هو ٢

فاكتب كلاً من الحدثين أ ، ب ثم أوجد كلاً من :

(١) ل (أ ∩ ب) (٢) ل (أ ∪ ب) (٣) ل (أَ ∩ ب)

«$\frac{1}{9}$ ، $\frac{2}{3}$ ، $\frac{1}{3}$»

---

٢٣ فى تجربة إلقاء حجر نرد مرتين وملاحظة العدد الذى يظهر على الوجه العلوى فى كل مرة ،

احسب احتمال كل من الأحداث التالية :

(١) أ حدث «ظهور العدد ٤ فى الرمية الأولى».

(٢) ب حدث «مجموع العددين فى الرميتين يساوى ٨».

(٣) حـ حدث «مجموع العددين فى الرميتين أقل من أو يساوى ٥».

(٤) ء حدث «مجموع العددين قابلاً للقسمة على ٦».

(٥) هـ حدث «الفرق المطلق بين العددين مساويًا عددًا أوليًا».

(٦) و حدث «ظهور الرقم ٣ مرة واحدة على الأقل».

(٧) ن حدث «ظهور عدد فردى فى الرمية الأولى وعدد زوجى فى الرمية الثانية».

«$\frac{1}{6}$ ، $\frac{5}{36}$ ، $\frac{5}{18}$ ، $\frac{1}{6}$ ، $\frac{4}{9}$ ، $\frac{11}{36}$ ، $\frac{1}{4}$»

٢٤ حجرا نرد متمايزان منتظمان أحدهما على أوجهه الأرقام ١ ، ١ ، ٣ ، ٣ ، ٦ ، ٦ ، والثانى على أوجهه الأرقام ٢ ، ٢ ، ٤ ، ٤ ، ٥ ، ٥ فإذا ألقى الحجران مرة واحدة. **فأوجد احتمال كل من الأحداث الآتية :**

(١) أ حدث «ظهور عددين فرديين».

(٢) ب حدث «مجموع العددين الظاهرين أكبر من أو يساوى ٧».

(٣) حـ حدث «مجموع العددين زوجى». «$\frac{٢}{٩}$ ، $\frac{٥}{٩}$ ، $\frac{٤}{٩}$»

---

٢٥ إذا كان ف فضاء عينة لتجربة عشوائية جميع نواتجها متساوية الإمكانات ، وكان أ ، ب حدثين من ف ، ل (أ ∪ ب) = $\frac{٥}{٦}$ ، ل (ب) = $\frac{٥}{١٢}$ ، عدد النواتج التى تؤدى إلى وقوع الحدث أ يساوى ١٣ وعدد النواتج الممكنة للتجربة يساوى ٢٤ **فأوجد :**

(١) احتمال وقوع الحدثين أ ، ب معًا. (٢) احتمال وقوع أحد الحدثين دون الآخر.

(٣) ل (أ ∪ ب) «$\frac{١}{٨}$ ، $\frac{١٧}{٢٤}$ ، $\frac{٧}{٨}$»

---

٢٦ **الربط بالرياضة :** عينة عشوائية تتكون من ٦٠ شخصًا شملهم استطلاع للرأى ، وجد أن ٤٠ شخصًا ، منهم يشجع نادى الهلال ، و ٢٨ شخصًا يشجع نادى النجمة ، وأن ٨ أشخاص لا يشجعون أيًا من الناديين. إذا اختير شخص عشوائيًا من أفراد العينة ، **فما احتمال أن يكون الشخص المختار من مشجعى :**

(١) أحد الناديين على الأقل. (٢) الناديين معًا.

(٣) نادى الهلال فقط. (٤) أحد الناديين فقط. «$\frac{١٣}{١٥}$ ، $\frac{٤}{١٥}$ ، $\frac{٢}{٥}$ ، $\frac{٣}{٥}$»

---

٢٧ تقدم لمسابقة فى الشعر للصف الثانى الثانوى بإحدى المدارس الثانوية المشتركة ٢٥ من الطلاب موزعين كما هو موضح بالجدول المقابل.

أوجد احتمال أن يكون الفائز بالمركز الأول :

(١) طالبة.

(٢) من القسم العلمى.

(٣) طالب من القسم الأدبى.

(٤) طالبة أو من القسم الأدبى.

	أدبى	علمى	المجموع
طالب	٨	٧	١٥
طالبة	٦	٤	١٠
المجموع	١٤	١١	٢٥

«$\frac{٢}{٥}$ ، $\frac{١١}{٢٥}$ ، $\frac{٨}{٢٥}$ ، $\frac{١٨}{٢٥}$»

---

٢٨ كتب طارق ٧٥ خطابًا على الآلة الكاتبة ، فوجد أن ٦٠٪ منها بلا أخطاء ، وكتب زياد ٢٥ خطابًا أخرى ، فوجد أن ٨٠٪ منها بلا أخطاء ، فإذا اختير خطاب عشوائيًا مما تم كتابته بواسطة طارق وزياد ، **فأوجد احتمال أن يكون هذا الخطاب :**

(١) بلا أخطاء. (٢) زياد هو الذى كتب الخطاب.

(٣) زياد لم يخطئ فى كتابته. (٤) طارق قد أخطأ فى كتابته. «٠,٦٥ ، ٠,٢٥ ، ٠,٢ ، ٠,٣»

الجزء الخاص
بالامتحانات

الرياضيات
العامة

- اختبارات تراكمية
- اختبارات شهرية
- امتحانات نهائية

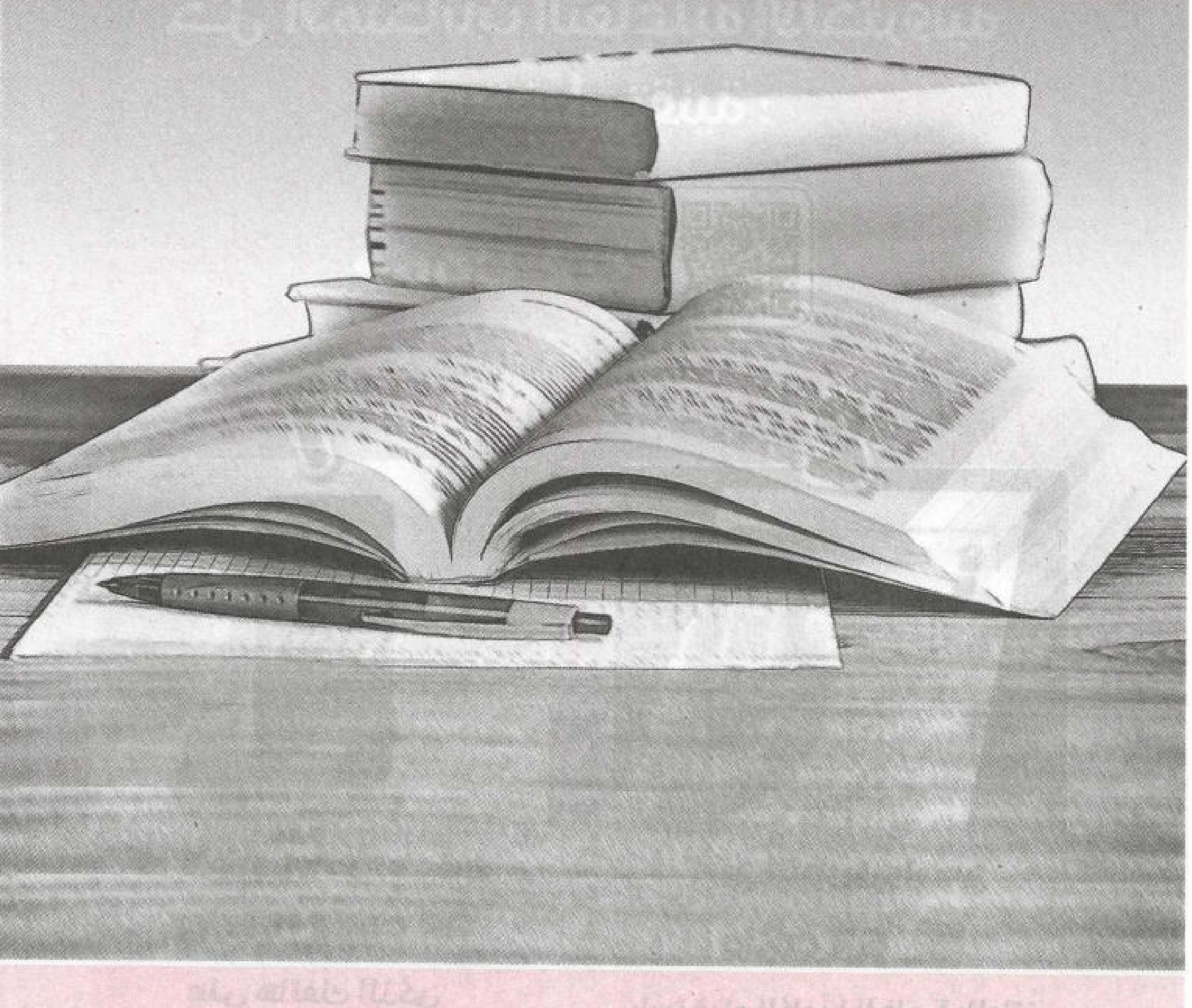




إعداد نخبة من خبراء التعليم

الصف الثانى الثانوى
القسم الأدبى
الفصل الدراسى الثانى

محتويات الكتاب



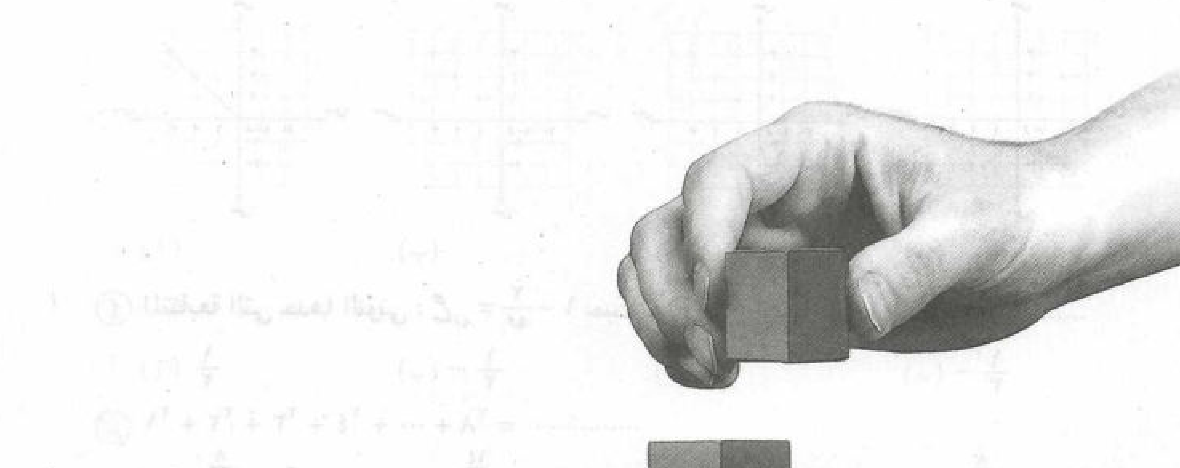
- الاختبارات التراكمية القصيرة.
- الاختبارات الشهرية.
- امتحانات الكتاب المدرسى.
- الامتحانات النهائية.
- الإجابات.

الاختبارات التراكمية القصيرة

أولًا : اختبارات تراكمية قصيرة في الجبر.

ثانيًا : اختبارات تراكمية قصيرة في التفاضل والتكامل.

ثالثًا : اختبارات تراكمية قصيرة في الاحتمال.







اختبار 1 على درس 1 من الوحدة الأولى

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

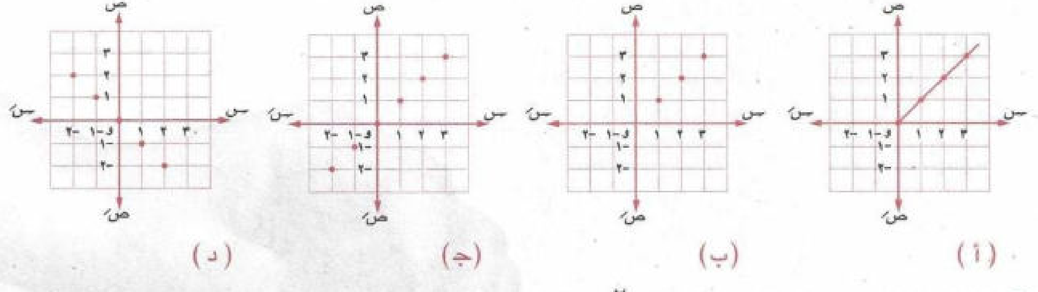
① المتابعة $(ح_ن)$ المعرفة كالآتى : $ح_١ = ٣$ ، $ح_{ن+١} = ح_ن - ١$ حيث $ن \geq ١$
فإن الحد الثالث يساوى ....

(أ) ٢ (ب) ١ (جـ) ٤ (د) ٣

② الحد النونى للمتتابعة : $(٢ ، ٢ ، \frac{٨}{٣} ، ٤ ، ...)$ يساوى ....

(أ) $ن - ١$ (ب) $٢^ن - ١$ (جـ) $٢^{ن-١}$ (د) $\frac{٢^ن}{ن}$

③ أى الأشكال الآتية يمثل متتابعة ؟



(أ) (ب) (جـ) (د)

④ المتتابعة التى حدها النونى : $ح_ن = \frac{٢}{ن} - ١$ حيث $ن \in ص_+$ حدها الرابع يساوى ....

(أ) $\frac{١}{٢}$ (ب) $-\frac{١}{٢}$ (جـ) $\frac{١}{٣}$ (د) $-\frac{١}{٣}$

⑤ $١^٢ + ٢^٢ + ٣^٢ + ٤^٢ + ... + ٨^٢ =$ ....

(أ) $\sum_{ر=١}^{٨} ر^٢$ (ب) $\sum_{ر=١}^{٦٤} ر$ (جـ) $\sum_{ر=١}^{٨} ٢ ر$ (د) $\sum_{ر=١}^{٨} ٢ ر^٢$

⑥ الحد الذى قيمته صفر فى المتتابعة : (−٢٠ ، −١٨ ، −١٦ ، −١٤ ، ...) هو ....

(أ) $ح_{١٠}$ (ب) $ح_{١١}$ (جـ) $ح_٨$ (د) $ح_٥$

⑦ الحد التالى فى المتتابعة : $(\frac{٣}{٥} ، \frac{٧}{٤} ، \frac{١١}{٣} ، \frac{١٥}{٢} ، ...)$ هو ....

(أ) $\frac{١٩}{٢}$ (ب) ١٩ (جـ) $-\frac{٢٦}{٥}$ (د) $\frac{١٦}{٣}$

⑧ قيمة المتسلسلة : $\sum_{ر=٧}^{٢٢} ٣ ر$ = ...

(أ) ٢٥٥ (ب) ٧٦٥ (جـ) ٨٠٧ (د) ٨٢٨

⑨ قيمة المتسلسلة (٧ + ١٢ + ١٧ + ٢٢) باستخدام رمز التجميع هى ....

(أ) $\sum_{ر=١}^{٤}$ (٧ ر + ١) (ب) $\sum_{ر=١}^{٤}$ (٤ ر + ٣)

(جـ) $\sum_{ر=١}^{٤}$ (٥ ر + ٢) (د) $\sum_{ر=١}^{٤}$ (٣ ر + ٤)

⑩ $\sum_{ر=٤}^{٧}$ (٢ $ر^٢$ − ١) = ...

(أ) ١٣٢ (ب) ١٥٦ (جـ) ٢٤٨ (د) ٢٧٣

⑪ الحد العام للمتتابعة : ((٣ × ٥) ، (٤ × ٦) ، (٥ × ٧) ، (٦ × ٨) ، ...)
هو $ح_ن$ = ...

(أ) ن(ن + ١) (ب) ٣ ن × (ن + ٢)

(جـ) (ن + ٢) (ن + ٤) (د) $ن^٢$ + ٥ ن + ٦

⑫ الحد السادس فى متتابعة الأعداد الطبيعية التى تقبل القسمة على ٥ هو ....

(أ) ٥ (ب) ١٠ (جـ) ٢٥ (د) ٣٠

اختبـار 2 حتى درس 2 من الوحدة الأولى

الدرجة الكلية
....
١٢

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

① الوسط الحسابى للعددين : ٨ ، ١٢ هو ....

(أ) ٨ (ب) ١٢ (جـ) ١٠ (د) ٢

② إذا كان $ح_ن$ = ١٥ − ٣ ن فإن أول حد سالب فى المتتابعة هو ....

(أ) $ح_٣$ (ب) $ح_٥$ (جـ) $ح_٦$ (د) $ح_{١٥}$

③ $(ح_ن) = (٣ن - ٥)$ متتابعة حسابية أساسها = ... وحدها الثانى = ...

(أ) ٣ ، ١ (ب) ١ ، ٣ (جـ) ٣ ، -٢ (د) ٥ ، -٢

④ إذا كانت : أ ، ٢٤ ، ب حدودًا متتالية من متتابعة حسابية فإن القيمة العددية للمقدار (أ + ب) تساوى ....

(أ) ٢٤ (ب) ٤٨ (جـ) ١٢ (د) ٦

⑤ قيمة الحد الأوسط فى المتتابعة : (٢ ، ٥ ، ٨ ، ١١ ، ..... ، ١٢٨) هى ....

(أ) ٢٢ (ب) ٤٣ (جـ) ٦٥ (د) ٢٧٩٥

⑥ قيمة المتسلسلة : $\sum_{ر=١}^{١٥} (ر^٢ + ر + ١) =$ ....

(أ) ١٣٧٥ (ب) ٣٧٢٠ (جـ) ١٤٤٠٠ (د) ٢٢٣٢٠٠٠

⑦ إذا كانت : (س ، -٣ ، ٤ س - ١ ، ...) متتابعة حسابية فإن : س = ...

(أ) $\frac{٤}{٥}$ (ب) $\frac{-٢}{٥}$ (جـ) -١ (د) -٥

⑧ عدد حدود المتتابعة : (٧ ، ١١ ، ١٥ ، ... ، ٢٧١) هو ....

(أ) ٣٤ (ب) ١٦٩ (جـ) ٦٧ (د) ٣١٣

⑨ إذا كانت أ ، ب ، حـ فى تتابع حسابى فأى مما يأتى صحيح ؟

(أ) أ + ب = ب + حـ (ب) أ + ب = ٢ حـ

(جـ) $\frac{ب}{أ} = \frac{حـ}{ب}$ (د) أ + حـ = ٢ ب

⑩ عند إدخال ن وسط حسابى بين أ ، ب يكون أساس المتتابعة الحسابية هو ....

(أ) $\frac{أ - ب}{ن + ١}$ (ب) $\frac{أ - ب}{ن + ٢}$ (جـ) $\frac{ب - أ}{ن + ١}$ (د) $\frac{ب - أ}{ن + ٢}$

⑪ عند إدخال ٧ أوساط حسابية بين العددين -٢٤ ، ١٦ فإن قيمة الوسط الرابع هى ....

(أ) صفر (ب) -٩ (جـ) ١ (د) -٤

⑫ أول حد سالب فى المتتابعة : (٣٥ ، ٣٣ ، ٣١ ، ٢٩ ، ...) هو ....

(أ) $ح_{١٨}$ (ب) $ح_{١٩}$ (جـ) $ح_{٣٦}$ (د) $ح_{٢٤}$

الدرجة الكلية ١٢

اختبار 3 حتى درس 3 من الوحدة الأولى

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

(١) مجموع ٢٥ حدًا الأولى من حدود المتتابعة : (٣ − ٢ ن) يساوى ....

(أ) ٦٥٠ (ب) ٦٠٠ (جـ) −٥٧٥ (د) −٦٠٠

(٢) الوسط الحسابى للعددين : ٣ س − ٧ ، ٥ س + ٣ هو ....

(أ) ٤ س − ٥ (ب) ٤ س − ٢ (جـ) ٤ س + ٢ (د) ٨ س − ٤

(٣) قيمة المتسلسلة : $\sum_{ر=٢}^{٧} (٣ ر - ١)$ = ...

(أ) ٦٢ (ب) ٧٠ (جـ) ٧٥ (د) ٧٧

(٤) المتسلسلة : ٧ + ١٤ + ٢١ + ... + ١٤٠ رمز المجموع لها على الصورة ....

(أ) $\sum_{ر=١}^{٢٠} ٧ ر$ (ب) $\sum_{ر=١}^{١٠} ٧ ر$

(جـ) $\sum_{ر=١}^{١٠} (ر + ٦)$ (د) $\sum_{ر=١}^{١٠} (٦ ر + ١)$

(٥) مجموع حدود المتتابعة : (١ ، ٣ ، ٥ ، ... ، ١٧ ، ١٩) هو ....

(أ) ٢٠ (ب) ٥٠ (جـ) ١٠٠ (د) ٣٠

(٦) إذا كان : $ح_{ن} - ح_{ن+١}$ = ٣ فإن أساس المتتابعة الحسابية ($ح_{ن}$) = ...

(أ) ٣ (ب) −٣ (جـ) ١ (د) −١

(٧) إذا كان ($ح_{ن}$) متتابعة حسابية وكان : $ح_{٢} + ح_{٧} + ح_{١١} + ح_{١٥} = ٧٢$

فإن $ج_{١٧}$ الأولى من هذه المتتابعة يساوى ....

(أ) ٣٠٦ (ب) ٢٠٤ (جـ) ١٥٣ (د) ٦١٢

(٨) أى المتتابعات الحسابية الآتية مجموع العشرين حدًا الأولى منها ٨٢٠ ؟

(أ) (٢ ، ٦ ، ١٠ ، ...) (ب) (١ ، ٥ ، ٩ ، ...)

(جـ) (٣ ، ٧ ، ١١ ، ...) (د) (٤ ، ٨ ، ١٢ ، ...)

⑨ الحد الأوسط فى المتتابعة الحسابية : (-٥ ، ٠ ، ٥ ، ... ، ٩٥) هو ....

(أ) $ح_{١٠}$ (ب) $ح_{١٥}$ (جـ) $ح_{٩}$ (د) $ح_{١١}$

⑩ لإيجاد أكبر مجموع لحدود المتتابعة : (٦٧ ، ٦٤ ، ٦١ ، ...) بدءًا من حدها الأول نوجد ....

(أ) $جـ_{٢٤}$ (ب) $جـ_{٢٥}$ (جـ) $جـ_{٢٣}$ (د) $جـ_{٣٠}$

⑪ مجموع الوسطين الحسابيين الأول والأخير بين العددين ٧ ، ٣١ يساوى ....

(أ) ١٩ (ب) ٣٨ (جـ) ٢٤ (د) ١٣

⑫ قيمة المتسلسلة : ٤ + ٩ + ١٤ + ... + (٥ن - ١) باستخدام رمز التجميع هى ....

(أ) $\sum_{ر=٤}^{ن} (٥ر - ١)$ (ب) $\sum_{ر=١}^{ن} (٥ر + ١)$

(جـ) $\sum_{ر=١}^{ن} (٥ر - ١)$ (د) $\sum_{ر=١}^{٥ن-١} (٣ر + ١)$

الدرجة الكلية ١٢

اختبار 4 حتى درس 4 من الوحدة الأولى

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

① إذا كانت : س > ٠ فإن أساس المتتابعة الهندسية :

(٤ ، س - ٣ ، ٢س + ٦ ، ...) هو ....

(أ) ٥ (ب) ١٥ (جـ) ٣ (د) ٢٤

② الحد النونى للمتتابعة الهندسية : $(\frac{-١}{٢} ، \frac{١}{٤} ، \frac{-١}{٨} ، ...)$ يساوى ....

(أ) $(\frac{-١}{٢})^{ن-١}$ (ب) $(\frac{١}{٢})^{ن-١}$ (جـ) $(\frac{١}{٢})^{ن}$ (د) $(-\frac{١}{٢})^{ن}$

③ الحد التالى فى المتتابعة الهندسية : $(٨ ، ٦ ، \frac{٩}{٢} ، \frac{٢٧}{٨} ، ...)$ يساوى ....

(أ) $\frac{١٣}{٨}$ (ب) $\frac{٢٧}{١٦}$ (جـ) $\frac{٩}{٤}$ (د) $\frac{٨١}{٣٢}$

④ الوسط الهندسى للعددين ٤ ، ١٦ هو ....

(أ) ٨ (ب) -٨ (جـ) ± ٨ (د) ٤

⑤ لأى متتابعة هندسية يكون $ح_١ × ح_٥$ = ...

(أ) $(ح_٢)^٢$ (ب) $(ح_١)^٢$ (جـ) $(ح_٥)^٢$ (د) $(ح_٣)^٢$

⑥ إذا كانت : ($أ^٢$ ، أب ، $ب^٢ - ٩$) متتابعة حسابية فأى مما يأتى صحيح ؟

(أ) أ + ب = ٣ (ب) $(أ - ب)^٢ = ٩$

(جـ) أ - ب > ٣ (د) أ + ب = -٣

⑦ رتبة أخر حد سالب فى المتتابعة الحسابية : (-٩٨ ، -٩٦ ، -٩٤ ، ...) تساوى ....

(أ) ٤٩ (ب) ٥٠ (جـ) ٥١ (د) ٤٨

⑧ جميع المتتابعات الآتية هندسية ما عدا المتتابعة ....

(أ) (٣ ، -٦ ، ١٢ ، -٢٤ ، ...) (ب) (لو أ ، لو $أ^٢$ ، لو $أ^٣$ ، لو $أ^٤$ ، ...)

(جـ) ($\frac{٣}{٢}$ ، ١ ، $\frac{٢}{٣}$ ، $\frac{٤}{٩}$ ، ...) (د) ($\frac{٣ب}{أ٢}$ ، ٣ ، $\frac{٦أ}{ب}$ ، $\frac{١٢أ^٢}{ب^٢}$ ، ...)

⑨ إذا كان أ ، ب ، حـ فى تتابع هندسى وأساس المتتابعة = ر

فإن جميع العبارات الآتية صحيحة ما عدا ....

(أ) ر = $\frac{ب}{أ}$ (ب) ر = $\frac{حـ}{ب}$ (جـ) ر = $\frac{ب^٢}{أحـ}$ (د) ر = $\frac{ب + حـ}{أ + ب}$

⑩ الوسط الحسابى لعددين حقيقيين موجبين مختلفين .... وسطهما الهندسى.

(أ) = (ب) > (جـ) < (د) ≥

⑪ إذا كانت ($ح_ن$) ، ($حَ_ن$) متتابعتين هندسيتين فأى مما يأتى يمثل متتابعة هندسية ؟

(أ) $(ح_ن)^ك$ (ب) (ك $حَ_ن$) (جـ) ($ح_ن حَ_ن$) (د) كل ما سبق.

⑫ الحد السابع فى المتتابعة ($ح_ن$) حيث : $ح_ن = ٨ × (\frac{١}{٢})^{ن - ١}$ يساوى ....

(أ) ٨ (ب) ٤ (جـ) $\frac{١}{٢}$ (د) $\frac{١}{٨}$

اختبار 5 حتى درس 5 من الوحدة الأولى

الدرجة الكلية .... / ١٢

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

① مجموع حدود المتتابعة الهندسية : (٨١ ، ٢٧ ، ٩ ، .....) يساوى ....

(أ) $\frac{٢٤٣}{٤}$ (ب) ١١٧ (جـ) ١١٨ (د) $\frac{٢٤٣}{٢}$

(٢) عدد حدود المتتابعة الحسابية : (٧ ، ١١ ، ١٥ ، ..... ، ٢٧١) هو ....

(أ) ٣٤ (ب) ٦٧ (جـ) ١٦٩ (د) ٩٣١٣

(٣) إذا كانت : س ، ص ، ع ثلاثة أعداد مختلفة فى تتابع هندسى فإن : ....

(أ) ٢ ص < س + ع (ب) $ص^2$ > س ع

(جـ) ص = س ع (د) $\sqrt{ص}$ = س ع

(٤) متتابعة مجموع ن حدًا الأولى منها يعطى بالعلاقة : $ح_ن = 3^{ن+1} - 4$

فإن الحد الثالث منها يساوى ....

(أ) ١٨ (ب) ٢٣ (جـ) ٥٤ (د) ٧٧

(٥) متتابعة هندسية فيها $ح_ن = \frac{1}{2} ح_{ن-1}$ فإن أساس المتتابعة = ...

(أ) $\frac{1}{2}$ (ب) ٢ (جـ) $\frac{3}{2}$ (د) $\frac{2}{3}$

(٦) إذا كانت : (أ ، ٣٢٠ ، ب ، حـ ، ٤٠ ، ....) متتابعة هندسية جميع حدودها موجبة

فإن : أ + ب + حـ = ...

(أ) ٦٤٠ (ب) ٢٤٠ (جـ) ١٢٠٠ (د) ٨٨٠

(٧) قيمة المتسلسلة : $\sum_{ر=7}^{23} 3 ر$ = ...

(أ) ٢٥٠ (ب) ٧٦٥ (جـ) ٨٠٧ (د) ٨٢٨

(٨) الحد النونى للمتتابعة : (٢ ، ٢ ، $\frac{8}{3}$ ، ٤ ، ...) يساوى ....

(أ) ن − ١ (ب) $2^{ن-1}$ (جـ) $2^ن - 1$ (د) $\frac{2^ن}{ن}$

(٩) متتابعة هندسية حدها الرابع يساوى ٨ وحدها السابع يساوى ٦٤ فإن مجموع العشرة حدود الأولى منها = ...

(أ) ٢٥٦ (ب) ٥١٢ (جـ) ١٠٢٣ (د) ١٠٢٤

(١٠) إذا كان الوسط الهندسى للعددين : ٢٥ ، ص هو ١٠ فإن : ص = ...

(أ) ١٦ (ب) ٨ (جـ) ٤ (د) $\frac{2}{5}$

(١١) الوسط الحسابى للعددين : $(أ + ب)^2$ ، $(أ - ب)^2$ هو ....

(أ) ٢ أ (ب) أ + ب (جـ) $أ^2 + ب^2$ (د) $أ^2 - ب^2$

(١٢) متتابعة هندسية أساسها $\frac{1}{2}$ وحدها الثالث = ٢ فإن مجموع عدد غير منته من حدودها بدءًا من الحد الثانى = ...

(أ) ١ (ب) ٢ (جـ) ٤ (د) ٨

الدرجة الكلية

١٢

اختبار 6 حتى درس 1 من الوحدة الثانية

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

(١) عدد طرق ترتيب جلوس ٥ أشخاص حول مائدة على شكل دائرة هو ....

(أ) ١ (ب) ٢ (جـ) ٢٤ (د) ١٢٠

(٢) عدد طرق تكوين عدد مكون من رقمين من الأرقام : ٠ ، ١ ، ٢ ، ٣ يساوى ....

(أ) ١٢ (ب) ١٦ (جـ) ٩ (د) ٨

(٣) إذا كان : (س ، ص ، ع) فى تتابع هندسى فإن : $ص^٢$ = ...

(أ) س ع (ب) $\pm\sqrt{س ع}$

(جـ) $س^٢ ع^٢$ (د) $\frac{س + ع}{٢}$

(٤) إذا كان : $^{٥}ل_{ر+١} = ٦٠$ فإن : ر = ...

(أ) ٥ (ب) ٤ (جـ) ٣ (د) ٢

(٥) المتسلسلة التى يمكن جمع عدد لا نهائى من حدودها هى ....

(أ) ٢ + ٤ + ٦ + ... (ب) ٢ + ٤ + ٨ + ...

(جـ) ٦ + ٤ + ٢ + ... (د) ٨ + ٤ + ٢ + ...

(٦) إذا كان : $^{ن}ل_{س} + ^{س}ل_{ن} = ١٤٤٠$ فإن : $^{ن+٤}ق_{س-٥}$ = ...

(أ) ٧٢٠ (ب) ٢٤ (جـ) ٦ (د) ١٠

(٧) مجموع ن وسطًا حسابيًا بين العددين أ ، ب = ...

(أ) ن (أ + ب) (ب) $\frac{ن}{٢}$ (أ + ب)

(جـ) $\frac{(ن + ١)(أ + ب)}{٢}$ (د) $\frac{أ + ب}{٢}$

(٨) إذا كان : $\underline{|ن - ١} = ١٢٠$ ، $\underline{|ن - ر} = ٦$ فإن : $^{ن}ل_{ر}$ = ...

(أ) ٧٢٠ (ب) ٦ × ٥ × ٤ (جـ) ٣ × ٤ × ٥ (د) ٦ × ٥

(٩) متتابعة حسابية فيها : $\frac{ح_٧}{ح_٣} = \frac{١٥}{٧}$ فإن : $\frac{ح_٧}{ح_٣}$ = ...

(أ) $\frac{٢٢}{١٧}$ (ب) $\frac{٢١}{٥}$ (جـ) $\frac{١٦}{١٥}$ (د) $\frac{١٥}{٧}$

(١٠) إذا كان : $ن \underline{|٢ن - ١} = ١٢$ فإن : ن = ...

(أ) ٤ (ب) ٢ (جـ) ٦ (د) ٥

(١١) $\sum_{ر=١}^{٤} (٢ر + ١)$ = ...

(أ) ٢٥ (ب) ٣٠ (جـ) ٣٥ (د) ٢٤

(١٢) $^{ه}ل_{٤}$ = ...

(أ) $\underline{|ه}$ (ب) $\frac{\underline{|ه}}{\underline{|٤}}$ (جـ) ٢٠ (د) ٦٠

الدرجة الكلية

....

١٢

اختبار 7 حتى درس 2 من الوحدة الثانية

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

(١) عدد الأزواج المرتبة (أ ، ب) التى يمكن تكوينها من عناصر المجموعة {١ ، ٢ ، ٣}

حيث أ ≠ ب هو ....

(أ) ٢ (ب) ٣ (جـ) ٦ (د) ٩

(٢) إذا كان : $^{ن}ق_{١٠} = ^{ن}ق_{١٤}$ فإن : $^{٢٥}ق_{ن}$ = ...

(أ) ٢٤ (ب) ٢٥ (جـ) ١ (د) ٤٩

(٣) إذا كان مجموع عدد غير منته من حدود المتتابعة الهندسية التى حدها الأول ١٢ هو ٩٦

فإن أساسها يساوى ....

(أ) $\frac{١}{٣}$ (ب) $\frac{١}{٢}$ (جـ) $\frac{٧}{٨}$ (د) $\frac{٣}{٤}$

(٤) إذا كان : $^{ه}ل_{ر} = ٦٠$ فإن : ر = ...

(أ) ٤ (ب) ٣ (جـ) ٢ (د) ٥

⑤ متتابعة حدها العام $ح_ن = ١٥ - ٣ن$ فإن أول حد سالب فى المتتابعة هو ....

(أ) $ح_٣$ (ب) $ح_٥$ (جـ) $ح_٦$ (د) $ح_{١٥}$

⑥ يراد تقسيم ٨ ألعاب مختلفة بين ثلاثة أطفال بحيث يأخذ الطفل الأول ٣ ألعاب والثانى لعبتين والثالث يأخذ الباقى فبكم طريقة يمكن إجراء التقسيم ؟

(أ) ${}^{٨}ق_٣ + {}^{٨}ق_٢ + {}^{٨}ق_٨$ (ب) ${}^{٨}ق_٣ \times {}^{٨}ق_٢$

(جـ) ${}^{٨}ق_٣ \times {}^{٥}ق_٢ \times {}^{٥}ق_٢$ (د) ${}^{٨}ق_٣ \times {}^{٥}ق_٢$

⑦ إذا كانت : ${}^{٦}ق_س = {}^{٤}ق_س$ فإن : س = ...

(أ) صفر (ب) ١ (جـ) ٤ (د) ١٠

⑧ شخص له ٥ أصدقاء فإن عدد طرق دعوة صديق أو أكثر منهم للعشاء = ...

(أ) ٣٢ (ب) ٣١ (جـ) ٢٥ (د) ١٦

⑨ عدد الحدود التى يلزم أخذها من حدود المتتابعة : (-٤٣ ، -٣٦ ، -٢٩ ، ...) ابتداء من حدها الأول ليكون المجموع ٢٢١ هو ....

(أ) ١٨ (ب) ١٦ (جـ) ١٩ (د) ١٧

⑩ مجموع الحدود الفردية الرتبة من حدود المتتابعة الحسابية (٢ ، ٥ ، ٨ ، ... ، ١١٠) يساوى ....

(أ) ١٠٠٨ (ب) ١٠٢٤ (جـ) ١٠٦٤ (د) ١٠٢٠

⑪ إذا كان : س > ٠ فإن أساس المتتابعة الهندسية : (٤ ، س - ٣ ، ٢س + ٦ ، ...) يساوى ....

(أ) ١ (ب) ٥ (جـ) ٣ (د) ٢٤

⑫ إذا كانت : $\frac{|ن+١}{|ن-١} = ٤٢$ فإن : ن = ...

(أ) ٣ (ب) ٦ (جـ) ٧ (د) ٩

ثانيًا اختبارات تراكمية قصيرة فى التفاضل والتكامل

الدرجة الكلية
......
١٢

اختبار 1 على درس 1 من الوحدة الثالثة

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

(١) متوسط تغير الدالة د حيث : د (س) = س^٢ عندما تتغير س من ٣ إلى ٣,١ يساوى ....

(أ) ٠,٦١ (ب) ٦,١ (جـ) ٩ (د) ٩,٦١

(٢) معدل تغير الدالة د : د (س) = س^٢ عند س = ١ هو ....

(أ) ١ (ب) ٢ (جـ) صفر (د) ٣

(٣) إذا كان متوسط التغير فى د يساوى ٧ عندما تتغير س من ٢ إلى ٥
وكانت : د (٣) = ٨ فإن : د (٥) = ...

(أ) ٢٢ (ب) ١٢ (جـ) ٧ (د) غير ذلك.

(٤) متوسط التغير فى حجم مكعب عندما يتغير طول حرفه من ٥ سم إلى ٧ سم يساوى ....

(أ) ١٢٥ (ب) ٣٤٣ (جـ) ٢١٨ (د) ١٠٩

(٥) متوسط تغير الدالة د حيث : د (س) = √س عندما تتغير س من ٤ إلى ٤,٤١ يساوى ....

(أ) ٤٠ (ب) ٠,٤١ (جـ) $\frac{٤١}{١٠}$ (د) $\frac{١٠}{٤١}$

(٦) عندما تتغير س من $س_١$ إلى $س_٢$ فإن التغير فى الدالة د يساوى ....

(أ) د ($س_٢$ − $س_١$)
(ب) د ($س_١$) − د ($س_٢$)
(جـ) د ($س_٢$) − د ($س_١$)
(د) د ($س_١$ − $س_٢$)

(٧) دائرة طول نصف قطرها نق فإن متوسط التغير فى محيط الدائرة عندما تتغير نق من $نق_١$ إلى $نق_٢$ هو ....

(أ) ٢ π $نق_١$ (ب) ٢ π ($نق_٢$ − $نق_١$)

(جـ) π $نق_١$ (د) ٢ π

(٨) أى الدوال الآتية يكون التغير فى د يساوى صفر لجميع قيم التغير فى س من أ إلى أ + هـ ؟

(أ) د : د (س) = $س^٢$ (ب) د : د (س) = ٣ س − ٢

(جـ) د : د (س) = ٧ (د) د : د (س) = جا س

(٩) صفيحة على شكل مربع تتمدد بانتظام محتفظة بشكلها فإن معدل التغير فى مساحتها عندما يكون طول ضلعها ٥ سم يساوى ....

(أ) ١٠ (ب) ٥ (جـ) ٢٥ (د) ١٠٠

(١٠) إذا كانت : د (س) = أ س + ب فإن متوسط التغير للدالة د عندما تتغير س من $س_١$ إلى $س_٢$ هو ....

(أ) − أ (ب) أ (جـ) أ + ب (د) ١

(١١) كرة من المعدن تتمدد محتفظة بشكلها الكروى فإن معدل التغير فى حجم الكرة بالنسبة إلى طول نصف قطرها عندما يكون طول نصف قطرها ٧ سم هو ....

(أ) ٤٩ π (ب) ١٨ π (جـ) ١٩٦ π (د) ٣٩٢ π

(١٢) إذا كانت : د (س) = $س^٥$ فإن : $\underset{هـ \leftarrow ٠}{نهـا} \frac{د (س + هـ) − د (س)}{هـ}$ = ...

(أ) ٥ (ب) ٥ $س^٤$ (جـ) $س^٥$ (د) غير موجودة.

الدرجة الكلية
....
١٢

اختبار 2 حتى درس 2 من الوحدة الثالثة

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

① متوسط تغير الدالة د : د (س) = $س^٢$ عندما تتغير س من ٤ إلى ٤,١ يساوى ....

(أ) ٨,١ (ب) ٠,٨١ (جـ) ١٦ (د) ١٦,٨١

② سقط حجر فى بركة ماء فتكونت موجة دائرية تزداد بانتظام بحيث تظل محتفظة بشكلها الدائرى فإن معدل التغير فى مساحتها عندما يكون طول نصف قطرها ٥ سم يساوى ....

(أ) ٥ π (ب) ١٠ π (جـ) ١٥ π (د) ٢٠ π

③ معدل التغير للدالة د : د (س) = ٣ $س^٢$ + ٢ عند س = ٢ هو ....

(أ) ٤ (ب) ١٢ (جـ) ١٠ (د) ١٤

④ إذا كانت د (س) = $\sqrt{س}$ + ٥ باستخدام تعريف المشتقة فإن : دَ (٩) = ...

(أ) $\frac{١}{٢}$ (ب) $\frac{١}{٣}$ (جـ) $\frac{١}{٦}$ (د) $\frac{١}{١٨}$

⑤ نهـا هـ ← ٠ $\frac{د (هـ + ٣) - د (هـ - ٢) + د (-٢) - د (٣)}{هـ}$ = ...

(أ) دَ (٣) + دَ (-٢) (ب) دَ (٣)

(جـ) دَ (-٢) (د) دَ (٣) - دَ (-٢)

⑥ إذا كان منحنى الدالة د : د (س) = $س^٢$ - ١ يمر بالنقطتين أ (٢ ، د (٢)) ، ب (٣ ، د (٣)) فإن : $\frac{\text{ميل القاطع } \overleftrightarrow{أب}}{\text{ميل المماس للمنحنى عند أ}}$ = ...

(أ) ٥ (ب) $\frac{٥}{٤}$ (جـ) $\frac{٤}{٥}$ (د) ١

⑦ إذا كانت الدالة د : د (س) = ٣ س - ٢

فإن دالة التغير ت (هـ) = ... عند س = ١

(أ) ٦ هـ (ب) ٣ هـ (جـ) هـ (د) ٣

⑧ إذا كانت : د (س) = $س^٢$ + ٥ فإن : دَ (س) = ...

(أ) $س^٢$ (ب) س (جـ) ٢ س (د) ٢ س + ٥

⑨ إذا كانت : د (س) = $س^٣$ − ٣ فإن قياس الزاوية الموجبة التى يصنعها المماس مع الاتجاه الموجب لمحور السينات عند النقطة (٢ ، ٥) يساوى .... (لأقرب دقيقة).

(أ) °١٤ ´٣٥ (ب) °٨٥ ´١٤ (جـ) °١١٠ ´١٨ (د) °٥٨ ´٤١

⑩ إذا كان متوسط التغير فى د يساوى ٢,٤ عندما تتغير س من ٣ إلى ٣,٢ فإن التغير فى د يساوى ....

(أ) ٠,٣٢ (ب) ٠,٤٨ (جـ) ٣,٦ (د) ٧,٢

⑪ إذا كان متوسط التغير فى د يساوى ٥ عندما تتغير س من ٢ إلى ٤ وكان د (٢) = ٦ فإن : د (٤) = ...

(أ) −٤ (ب) ٧ (جـ) ٨ (د) ١٦

⑫ ميل المماس لمنحنى الدالة ص = د (س) عند النقطة ($س_١$ ، د ($س_١$)) يساوى ....

(أ) $\frac{د (س_١ + هـ) − د (س_١)}{هـ}$

(ب) $\underset{هـ \to ٠}{نهـا} \frac{د (س_١ + هـ) − د (س_١)}{هـ}$

(جـ) د ($س_١$ + هـ) − د ($س_١$)

(د) $\frac{د (س_٢) − د (س_١)}{س_٢ − س_١}$

الدرجة الكلية
....
١٢

اختبار 3 حتى درس 3 من الوحدة الثالثة

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

① عندما تتغير قيمة س من ١ إلى ١,٣ حيث : د (س) = $س^٣$ فإن متوسط التغير للدالة يساوى ....

(أ) ٢,١٩٧ (ب) ١ (جـ) ٧,٣٢ (د) ٣,٩٩

② إذا كان : د (س) = $\frac{١}{س + ١}$ فإن : دَ (١) = ...

(أ) $\frac{١}{٤}$ (ب) $-\frac{١}{٤}$ (جـ) ١ (د) −١

③ معدل تغير الدالة د : د (س) = $س^{١٥}$ عند س = ١ هو ....

(أ) ١ (ب) ١٥ (جـ) ١٤ (د) صفر

④ إذا كانت : $\frac{ء}{ءس}$ [$(أ س)^{٣}$] = ٢٤ عندما س = ١ فإن قيمة أ تساوى ....

(أ) ٨ (ب) ٢ (جـ) ١ (د) ٢٤

⑤ إذا كانت : د (س) = ٤ س + ١ فإن التغير فى د عندما تتغير س من ٢ إلى ٢,١ يساوى ....

(أ) ٠,٤ (ب) ٠,١ (جـ) ٤,١ (د) ٤

⑥ إذا كان : س ص = ٨١ فإن : $\frac{ءص}{ءس}$ = ... عند س = ٩

(أ) −٩ (ب) −١ (جـ) ١ (د) ٩

⑦ إذا كانت : ص = $\frac{س^{٢} + ٦}{س^{٢} + ٥}$ فإن : صَ عندما س = ١ تساوى ....

(أ) $-\frac{١}{٤}$ (ب) $\frac{٦}{٥}$ (جـ) $\frac{٧}{٦}$ (د) $\frac{١١}{١٢}$

⑧ إذا كانت : ص = ٣ $\sqrt[٤]{س}$ فإن : $\frac{ءص}{ءس}$ = ...

(أ) ١٢ $س^{٣}$ (ب) ١٢ $\sqrt[٤]{س}$ (جـ) $\frac{٣}{٤ \sqrt[٣]{س^{٤}}}$ (د) $\frac{٣}{٤ \sqrt[٤]{س^{٣}}}$

⑨ إذا كان للدالة د مماس أفقى عند س = −٣ فإن : ....

(أ) د غير قابلة للاشتقاق عند س = −٣ (ب) دَ (−٣) = −٣

(جـ) $\lim_{هـ \to ٠} \frac{د(-٣ + هـ) - د(-٣)}{هـ}$ = صفر (د) د (س) = −٣

⑩ إذا كانت د : د (س) = (٤ $س^{٢}$ + ٣) (٥ − $س^{٢}$) فإن : دَ (١) = ...

(أ) ١٤ (ب) ١٨ (جـ) ٣٢ (د) ٤٦

⑪ إذا كانت : د (س) = أ حيث أ ثابت فإن متوسط التغير للدالة د هو ....

(أ) أ (ب) −أ (جـ) صفر (د) ١/أ

⑫ إذا كانت : د (س) = (س + أ) ($س^{٢}$ − أ) وكان : دَ (−١) = ٤ فإن : أ = ...

(أ) $\frac{٢}{٣}$ (ب) $\frac{١}{٣}$ (جـ) $\frac{-٢}{٣}$ (د) $\frac{-١}{٣}$

الدرجة الكلية
....
١٢

اختبار 4 حتى درس 4 من الوحدة الثالثة

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

① إذا كانت : د (س) = $\frac{١}{س}$ فإن : دَ (١) = ...

(أ) ١ (ب) صفر (جـ) −١ (د) ٢

② إذا كان : ص = $\sqrt{٢ - س}$ فإن : $\frac{ءص}{ءس}$ = ...

(أ) $\frac{-١}{٢ ص}$ (ب) −١ (جـ) −٢ ص − ١ (د) −٢ ص

③ $\frac{ء}{ءس}$ (ص^{٥}) = ...

(أ) ٥ ص^{٤} (ب) ٥ ص^{٤} صَ (جـ) ص^{٥} صَ (د) $\frac{٥ ص^{٤}}{صَ}$

④ إذا كانت : د (س) = (س^{٢} − ٢)^{٥} فإن : دَ (١) = ...

(أ) ٥ (ب) ١٠ (جـ) −٥ (د) −١٠

⑤ إذا كان منحنى الدالة د هو مستقيم يمر بالنقطتين (١ ، ٢) ، (٢ ، ٣)

فإن متوسط التغير للدالة د عندما تتغير س من ١ إلى ٢ هو ....

(أ) ١ (ب) ٢ (جـ) صفر (د) −١

⑥ إذا كانت : د (س) = (س − ٣)^{٥} وكان : دَ (أ) = ٥ فإن : أ = ...

(أ) ٤ أ، −٢ (ب) ٤ أ، ٢ (جـ) −٤ أ، −٢ (د) −٤ أ، ٢

⑦ إذا كان : ص = ع^{٥} ، ع = س^{٢} − ١ فإن : $\left(\frac{ءص}{ءس}\right)_{س = ٢}$ = ...

(أ) $\frac{٣٢}{٣}$ (ب) ١٦٢٠ (جـ) ١٢٦٠ (د) ٩٦

⑧ إذا كانت : ص = ع^{٢} + ع ، ع = ٢ س^{٢} فإن : $\frac{ءص}{ءس} - \frac{ءع}{ءس}$ = ...

(أ) ١٦ س (ب) ١٦ س^{٢} (جـ) ١٦ س^{٣} (د) ٨ س^{٣}

(٩) إذا كان متوسط التغير فى د يساوى ٧ عندما تتغير $س$ من ٣ إلى ٥ وكانت د (٣) = ٨
فإن : د (٥) = ...

(أ) ٢٢ (ب) ١٢ (جـ) ٧ (د) غير ذلك.

(١٠) إذا كانت : ص = (ع + ١)^{٣} ، ع = $س^{٦}$ – ١ فإن : $\frac{ءص}{ءس}$ = ...

(أ) $س^{١٨}$ (ب) $س^{٨}$ (جـ) ١٨ $س^{١٧}$ (د) ٨ $س^{٧}$

(١١) $\frac{ء}{ءس}$ ($س^{\frac{١}{٣}}$) = ...

(أ) $\frac{١}{٣}$ $س^{-\frac{٢}{٣}}$ (ب) $\frac{١}{٣}$ $س^{\frac{٢}{٣}}$ (جـ) $\frac{١}{\sqrt[٣]{س}}$ (د) – $س$

(١٢) إذا كان : ص = ($س$ + ك)^{٢} ، $\frac{ءص}{ءس}$ = ١٢ عند $س$ = صفر
فإن : ك = ...

(أ) ٢ (ب) ± ٢ (جـ) –٢ (د) ٤

الدرجة الكلية ..... / ١٢

اختبار 5 حتى درس 5 من الوحدة الثالثة

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

(١) ميل المماس لمنحنى الدالة د حيث : د ($س$) = ٣ $س^{٢}$ + ٢ $س$ – ١
عندما $س$ = ٢ يساوى ....

(أ) ٤ (ب) ٨ (جـ) ١٨ (د) ١٤

(٢) إذا كانت : د ($س$) = ٣ $س^{٢}$ – ٥ $س$ + ١ وكانت : د (أ) = دَ (أ) فإن : أ = ...

(أ) $\frac{٢}{٣}$ أ، –٣ (ب) $\frac{٢}{٣}$ أ، ٣ (جـ) $\frac{-٢}{٣}$ أ، ٣ (د) $\frac{-٢}{٣}$ أ، –٣

(٣) معادلة المماس لمنحنى الدالة د حيث د ($س$) = $س^{٢}$ + ٣ عندما $س$ = ١
هى ....

(أ) ص = ٢ $س$ (ب) ص – ٢ $س$ = ٥

(جـ) $س$ + ص = ٢ (د) ٢ $س$ – ص + ٢ = صفر

(٤) إذا كانت معادلة العمودى للمنحنى : ص = د (س) عند النقطة (٢ ، −١)
هى س − ٢ ص = ٤ فإن : دَ (٢) = ...

(أ) ٢ (ب) −٢ (جـ) ١ (د) −١

(٥) $\frac{د}{د س}$ (س^٢ $\sqrt[٣]{س + ١}$) = ... عند س = ٧

(أ) $\frac{٣٨٥}{١٢}$ (ب) $\frac{٧}{٦}$ (جـ) ٩٨ (د) $\frac{٢٨٠}{٣}$

(٦) إذا كانت : ص = د (أ) حيث أ ثابت فإن : $\frac{د ص}{د س}$ = ...

(أ) دَ (أ) (ب) $\frac{د (أ + هـ) − د (أ)}{هـ}$

(جـ) ١ (د) صفر

(٧) النقطة الواقعة على منحنى الدالة ص = $\frac{١}{س − ٣}$ والتى عندها المماس يوازى المستقيم
س + ص = ٠ من النقط التالية هى ....

(أ) (−٢ ، −$\frac{١}{٥}$) (ب) (٤ ، −٤) (جـ) (٤ ، ١) (د) (٢ ، −٢)

(٨) إذا كان المستقيم : ص + س − ١ = ٠ يمس منحنى الدالة د : د (س) = س^٢ − ٣ س + أ
فإن : أ = ...

(أ) ٢ (ب) ٣ (جـ) ٤ (د) ٥

(٩) قياس الزاوية الموجبة التى يصنعها المماس للمنحنى ص = س^٢ − ١ مع الاتجاه الموجب
لمحور السينات عند س = $\frac{١}{٢}$ يساوى ....

(أ) $\frac{\pi}{٤}$ (ب) $\frac{\pi}{٣}$ (جـ) $\frac{\pi}{٦}$ (د) π

(١٠) التغير فى الدالة د عندما تتغير س من ٥ إلى ٥,٢ هو ....

(أ) د (٥,٢) − د (٥) (ب) $\frac{د (٥,٢) − د (٥)}{٠,٢}$

(جـ) د (٥,٢) − د (هـ) (د) نهـــا$_{هـ \leftarrow ٠}$ $\frac{د (٥ + هـ) − د (٥)}{هـ}$

(١١) متوسط التغير فى حجم مكعب عندما يتغير طول حرفه من ٥ سم إلى ٧ سم
يساوى ....

(أ) ١٢٥ (ب) ٣٤٣ (جـ) ٢١٨ (د) ١٠٩

⑫ معدل تغير ($س^٢$ + ٤) بالنسبة إلى س عندما س = ٢ يساوى ....

(أ) ٤ (ب) ٨ (جـ) $\frac{١}{٤}$ (د) ١٢

الدرجة الكلية

....

١٢

اختبار 6 حتى درس 6 من الوحدة الثالثة

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

① $\int$ (٢ س + ١)^٥ ءس = ... + ث

(أ) (٢ س + ١)^٦ (ب) $\frac{١}{٢}$ (٢ س + ١)^٦

(جـ) $\frac{١}{١٢}$ (٢ س + ١)^٦ (د) $\frac{١}{٦}$ (٢ س + ١)^٦

② $\int$ س^٥ $\left(١ + \frac{٣}{س}\right)^٥$ ءس = ... + ث

(أ) (س + ٣)^٦ (ب) $\frac{١}{٦}$ (س + ٣)^٦

(جـ) ٥ (س + ٣)^٤ (د) $\frac{١}{١٨}$ (س + ٣)^٦

③ $\int \frac{س^٣ - ٨}{س - ٢}$ ءس = ... + ث

(أ) س^٢ + ٢ س + ٤ (ب) س^٣ + س^٢ + ٤ س

(جـ) $\frac{١}{٣}$ س^٣ + س^٢ + ٤ س (د) ٢ س + ٢

④ ميل المماس لمنحنى الدالة د حيث : د (س) = ٣ س^٢ + ٢ س − ١

عندما س = ٢ يساوى ....

(أ) ٤ (ب) ٨ (جـ) ١٧ (د) ١٤

⑤ إذا كان : د (س) = م س^٢ + ن س + ل حيث : م ، ن ، ل ثوابت

فإن : دَ (١) + دَ (٤) − دَ (٥) = ...

(أ) م (ب) − م (جـ) ن (د) − ن

(٦) إذا كانت : ص = $\int$ (س^٢ − ٥ س + ١) ءس فإن : $\frac{ءص}{ءس}$ = ...

(أ) س^٢ − ٥ س + ١ (ب) س^٣ − ٥ س^٢ + س

(جـ) $\frac{١}{٣}$ س^٣ − $\frac{٥}{٢}$ س^٢ + س (د) ٢ س − ٥

(٧) $\int \frac{ءس}{٥}$ = ... + ث

(أ) $\frac{١}{٥}$ (ب) $\frac{١}{٥}$ س (جـ) ٥ س (د) ٥ س^٢

(٨) $\int$ (س^٢ − ٣) ءس = ...

(أ) ٢ س (ب) س^٣ − ٣ س

(جـ) $\frac{١}{٣}$ س^٣ − ٣ س + ث (د) ٢ س − ٣ + ث

(٩) $\int$ (٢ س + ٣) (س − ٤) ءس = ... + ث

(أ) $\frac{١}{٤}$ (٢ س + ٣)^٢ (ب) ٢ س^٢ − ٥ س − ١٢

(جـ) $\frac{٢}{٣}$ س^٣ − $\frac{٥}{٢}$ س^٢ − ١٢ س (د) $\frac{٢}{٣}$ س^٣ − $\frac{٣}{٢}$ س^٢ − ١٢ س

(١٠) إذا كان المستقيم ص = ٤ س + أ مماسًا للمنحنى ص = س^٢ + ٥ فإن : أ = ...

(أ) ١ (ب) ٢ (جـ) ٣ (د) ٤

(١١) إذا كان منحنى الدالة د يمر بالنقطتين (١ ، ٢) ، (٢ ، ٣) فإن متوسط التغير للدالة د عندما تتغير س من ١ إلى ٢ هو..............

(أ) ١ (ب) ٢ (جـ) صفر (د) −١

(١٢) $\frac{ء}{ءس}$ ((س − ١) (س + ٣)) = ...

(أ) ٢ س (ب) ٢ س + ١ (جـ) ٢ س − ٣ (د) ٢ س + ٢

اختبارات تراكمية قصيرة فى الاحتمال

الدرجة الكلية

....

١٢

اختبار 1 على درس 1 من الوحدة الرابعة

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

① عند سحب بطاقة من بين ١٠ بطاقات متماثلة ومرقمة من ١ إلى ١٠
فإن حدث ظهور عدد يقبل القسمة على ٣ على البطاقة المسحوبة هو ....

(أ) {٣ ، ٦}　　(ب) {١ ، ٣ ، ٦ ، ٩}

(جـ) {٣ ، ٦ ، ٩ ، ١٢}　　(د) {٣ ، ٦ ، ٩}

② إذا كان أ ، ب حدثين من فضاء العينة لتجربة عشوائية
فإن حدث عدم وقوع أى من الحدثين يساوى ....

(أ) $أ \cap ب$　　(ب) أ − ب　　(جـ) $أ \cap \bar{ب}$　　(د) $\bar{أ} \cup \bar{ب}$

③ إذا كان : أ ، ب حدثين متنافيين　　فإن : أ − ب = ...

(أ) أ　　(ب) ب　　(جـ) ب − أ　　(د) $\bar{أ}$

④ ألقيت قطعة نقود مرتين متتاليتين ولوحظ تتابع الصور والكتابات فإن حدث ظهور كتابة فى الرمية الأولى هو ....

(أ) {(ك ، ص)}　　(ب) {(ك ، ك) ، (ك ، ص)}

(جـ) {(ك ، ص ، ص) ، (ك ، ك ، ص) ، (ك ، ص ، ك) ، (ك ، ك ، ك)}

(د) {(ك ، ص) ، (ص ، ك) ، (ك ، ك)}

⑤ إذا كانت ص ترمز لإصابة الهدف ، خ للخطأ فى إصابة الهدف ، وكان اللاعب يسدد على المرمى ٣ مرات على الأكثر حيث يتوقف عن التسديد عند إصابة الهدف فإن فضاء العينة = ...

(أ) {(خ ، خ ، خ)}

(ب) {(خ ، خ ، ص) ، (خ ، ص ، خ) ، (خ ، خ ، خ) ، (ص ، خ ، خ)}

(جـ) {(ص) ، (خ ، ص) ، (خ ، خ ، ص) ، (خ ، خ ، خ)}

(د) {(خ ، ص) ، (خ ، خ ، ص) ، (خ ، ص ، ص)}

(٦) فى تجربة إلقاء حجر نرد منتظم مرتين وملاحظة العدد الظاهر على الوجه العلوى فى كل مرة فإن الحدث {(١ ، ٣) ، (٣ ، ١) ، (١ ، ٥) ، (٥ ، ١) ، (٥ ، ٣) ، (٣ ، ٥) ، (١ ، ١) ، (٣ ، ٣) ، (٥ ، ٥)} هو حدث ....

(أ) الحصول على عدد فردى فى الرمية الأولى.

(ب) الحصول على عدد أولى فى كلا الرميتين.

(جـ) الحصول على عددين مختلفين.

(د) الحصول على عدد فردى فى كل رمية.

(٧) أى من الأشكال الآتية يعبر الجزء المظلل فيه عن أ̄ ∪ ب̄ ؟

(أ) (ب) (جـ) (د)

(٨) إذا كان أ ، ب حدثين من فضاء عينة لتجربة عشوائية فإن حدث وقوع أ فقط = ...

(أ) أ (ب) أ ∩ ب (جـ) أ - ب (د) ب - أ

(٩) فى تجربة إلقاء حجر نرد منتظم مرتين متتاليتين فإن عدد عناصر فضاء العينة = ...

(أ) ٤ (ب) ٦ (جـ) ٣٦ (د) ٣٠

(١٠) فى الشكل المقابل :

الجزء المظلل يعبر عن الحدث ....

(أ) وقوع أ ، ب (ب) وقوع أ أ ، ب أ ، كلاهما.

(جـ) وقوع أحد الحدثين على الأقل. (د) وقوع أحد الحدثين على الأكثر.

(١١) $\overline{(أ \cup ب)}$ = ...

(أ) أ̄ ∩ ب̄ (ب) أ̄ ∪ ب̄

(جـ) ف - (أ ∩ ب) (د) $\overline{(أ \cap ب)}$

(١٢) فى تجربة تكوين عدد مكون من رقمين مختلفين من مجموعة الأرقام {١ ، صفر ، ٢} فإن عدد عناصر فضاء العينة = ...

(أ) ٩ (ب) ٤ (جـ) ٦ (د) ٥

الدرجة الكلية

١٢

اختبار 2 حتى درس 2 من الوحدة الرابعة

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

(١) إذا كان : أ ، ب حدثين من فضاء عينة لتجربة عشوائية ، أ ⊂ ب

فإن : ل (أ ∪ ب) = ...

(أ) ل (أ) (ب) ل (ب) (جـ) ل (أ) + ل (ب) (د) ل (أ ∩ ب)

(٢) ألقى حجر نرد منتظم مرة واحدة على منضدة ، ولوحظ العدد الظاهر على وجهه العلوى فإن احتمال ألا يزيد هذا العدد عن ٥ ولا يقل عن ٣ هو ....

(أ) $\frac{١}{٦}$ (ب) $\frac{١}{٣}$ (جـ) $\frac{١}{٢}$ (د) $\frac{٢}{٣}$

(٣) إذا كان : أ ، ب حدثين من فضاء عينة لتجربة عشوائية فإن احتمال وقوع أحدهما فقط هو ....

(أ) ل (أ ∪ ب) (ب) ل $\overline{(أ ∪ ب)}$

(جـ) ل (أ ∪ ب) − ل (أ ∩ ب) (د) ل (أ ∩ ب)

(٤) صندوق به ٣٠ بطاقة متماثلة مرقمة من ١ إلى ٣٠ ، سحبت بطاقة واحدة عشوائيًا من هذا الصندوق فإن احتمال أن تكون البطاقة المسحوبة مرقمة بعدد فردى مكعب كامل = ...

(أ) صفر (ب) $\frac{١}{١٠}$ (جـ) $\frac{١}{٣٠}$ (د) $\frac{١}{١٥}$

(٥) إذا كان احتمال نجاح طالب فى الرياضيات ٠,٨ واحتمال نجاحه فى اللغة الفرنسية ٠,٧ واحتمال نجاحه فى المادتين معًا ٠,٥٦ فإن احتمال نجاحه فى الرياضيات وعدم نجاحه فى اللغة الفرنسية = ...

(أ) ٠,٢٤ (ب) ٠,٩٤ (جـ) ٠,٤٤ (د) ٠,٢

(٦) إذا كان أ ، ب حدثين من فضاء العينة (ف) لتجربة عشوائية حيث : ل (ب) = $\frac{٥}{٧}$

فإن : ل (أَ ∩ ب) + ل (أ ∩ ب) = ...

(أ) $\frac{٢}{٧}$ (ب) ١ (جـ) $\frac{٥}{٧}$ (د) $\frac{٩}{٧}$

⑦ إذا كان : أ ، ب حدثين من فضاء النواتج لتجربة عشوائية ما ، ل (أ) = ٠,٣

، ل (ب) = ٠,٨ ، ل (أ ∩ ب) = ٠,٢ فإن : ل (ب − أ) = ...

(أ) ٠,٥ (ب) ٠,٦ (جـ) ٠,١ (د) ٠,٨

⑧ إذا كان : أ ، ب حدثين من فضاء عينة لتجربة عشوائية

فإن حدث عدم وقوع أ ، ب معًا = ...

(أ) ١ − (أ ∪ ب) (ب) (أ ∪ ب)َ (جـ) أ ∩ ب (د) أَ ∪ بَ

⑨ فى تجربة إلقاء عملة معدنية تنتهى التجربة عند الحصول على صورة وتعاد التجربة فى حالة الحصول على كتابة فإن فضاء العينة = ...

(أ) {ص ، (ك ، ص) ، (ك ، ك ، ص) ، (ك ، ك ، ك ، ص)}

(ب) {ك ، (ص ، ك) ، (ص ، ص ، ك) ، (ص ، ص ، ص ، ك)}

(جـ) {ص ، (ك ، ص) ، (ك ، ص ، ك) ، (ك ، ك ، ك ، ص)}

(د) يكون غير منته.

⑩ إذا كان : أ ، ب حدثين من فضاء العينة وكان : ل (أ) = ٣ ل (أَ) ، ل (أ ∩ ب) = ٠,٢

فإن احتمال وقوع أ فقط = ...

(أ) ٠,٥٥ (ب) ٠,٠٥ (جـ) ٠,٣ (د) ٠,٧٥

⑪ فى تجربة إلقاء حجر نرد منتظم مرتين متتاليتين فإن احتمال الحصول على نفس الرقم فى الرميتين = ...

(أ) $\frac{٥}{٣٦}$ (ب) $\frac{١}{٦}$ (جـ) $\frac{١}{٤}$ (د) $\frac{١}{٣}$

⑫ إذا كان : أ ، ب حدثين متنافيين من فضاء العينة ف وكان :

ل (بَ) = $\frac{١}{٤}$ ، ل (أ ∪ ب)َ = ٠,٠٥ فإن : ل (أ) = ...

(أ) ٠,٧٥ (ب) ٠,٧ (جـ) ٠,٩٥ (د) ٠,٢

الاختبـارات الشهرية



أولًا : نماذج اختبارات شهر مارس.

ثانيًا : نماذج اختبارات شهر أبريل.

محتوى امتحان شهر مارس

الجبــر

من : المتتابعات والمتسلسلات.

إلى : المتسلسلات الهندسية.

التفاضل والتكامل والاحتمال

من : معدل التغير.

إلى : تطبيقات على المشتقة.

محتوى امتحان شهر أبريل

الجبــر

من : مبدأ العد.

إلى : التوافيق.

التفاضل والتكامل والاحتمال

من : التكامل.

إلى : حساب الاحتمال.

أولاً نماذج اختبارات شهر مارس

اختبار ١

الدرجة
٢٠

١ اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة : (١٢ درجة)

① إذا كانت : $\frac{ء}{ءس}$ (أ س)^{٣} = ٢٤ فإنه عند س = ١ يكون أ = ...

(أ) $\frac{١}{٤}$ (ب) $\frac{١}{٢}$ (جـ) ١ (د) ٢

② متوسط تغير الدالة د : د (س) = س^{٢} عندما تتغير س من ٥ إلى ٥,٢ هو ....

(أ) ٠,١ (ب) ٠,٢ (جـ) ١٠,٢ (د) ٢,٠٤

③ مجموع عدد غير منته من حدود المتتابعة الهندسية : (ح$_{ن}$) = (٣)$^{٣-ن}$ يساوى ....

(أ) ٢٧ (ب) $\frac{٢٧}{٤}$ (جـ) ٣ (د) $\frac{٢٧}{٢}$

④ إذا كانت : ص = ع^{٣} − ٥ ، ع = ٢ س^{٢} − ٣ س

فإن $\frac{ءص}{ءس}$ = ... عند س = ١

(أ) ١ (ب) ٣ (جـ) ٥ (د) ٧

⑤ إذا كانت : س > ٠ فإن أساس المتتابعة الهندسية :

(٤ ، س − ٣ ، ٢ س + ٦ ، ...) يساوى ....

(أ) ١ (ب) ٥ (جـ) ٣ (د) ٢٤

⑥ كم حدًا يلزم أخذه من المتتابعة الحسابية (٣٥ ، ٣٠ ، ٢٥ ، ...) ابتداءً من حدها الأول ليكون مجموعها ١٣٥ ؟

(أ) ٦ أ، ٩ (ب) ٦ أ، ١٥ (جـ) ٩ أ، ١٥ (د) ١٥ أ، ١٨

⑦ عدد حدود المتتابعة الهندسية التى حدها الأول = ٢٤٣ وحدها الأخير = ١ ومجموع حدودها = ٣٦٤ يساوى ....

(أ) ٤ (ب) ٧ (جـ) ٦ (د) ٨

(٨) إذا كانت : د (س) = $\sqrt{س^{٢} + ٩}$ فإن : دَ (−٤) = ...

(أ) $\frac{-٤}{٥}$ (ب) ٥ (جـ) $\frac{١}{١٠}$ (د) $\frac{-١}{١٠}$

(٩) معادلة المماس للمنحنى : ص = $(٣س - ٥)^{٧}$ عند س = ٢ هى ....

(أ) ص + ٢١ س + ٤١ = ٠ (ب) س + ٢١ ص = ٤١

(جـ) س − ٢١ ص = ٤١ (د) ص − ٢١ س + ٤١ = ٠

(١٠) عددان موجبان الوسط الهندسى لهما يساوى ٨ والوسط الحسابى لهما يزيد عن وسطهما الهندسى بمقدار ٢ فإن الفرق بين العددين = ...

(أ) ٤ (ب) ٨ (جـ) ١٢ (د) ١٦

(١١) فى متتابعة حسابية إذا كان : $ح_{١٧}$ = ٧٣ ، $ح_{٧٣}$ = ١٧ .
فإن رتبة الحد الذى قيمته صفر هى ....

(أ) ٣٦ (ب) ٨٩ (جـ) ٩٠ (د) ٩١

(١٢) إذا كانت : د (س) = س + $\frac{٩}{س}$ فإن : دَ (س) = صفر عندما س = ...

(أ) ٣ (ب) − ٣ (جـ) ± ٣ (د) ± ٩

---

٢ أجب عن السؤالين الآتيين :

(١) إذا كان مجموع ن حدًا الأولى من متتابعة حسابية يتعين بالقانون $ج_{ن}$ = ٢ ن(٧ − ن)
أوجد عدد الحدود اللازم أخذها ابتداءً من الحد الأول حتى يكون المجموع مساويًا −٢٤٠
(٤ درجات)

(٢) أوجد النقطة الواقعة على المنحنى : ص = $س^{٢}$ − ٣س + ١ والتى عندها ميل المماس يساوى ٣
(٤ درجات)

الدرجة
٢٠

اختبار ٢

(١٢ درجة)

١ اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

① $\frac{ء}{ء س}$ (٣ $س^٢$ + ٥ س) عند س = −١ تساوى ....

(أ) −١ (ب) −٣ (جـ) −٦ (د) ٣

② رتبة الحد الذى قيمته صفر فى المتتابعة الحسابية (٢٢ ، ٢٠ ، ١٨ ، ...) تساوى ....

(أ) ٨ (ب) ١٠ (جـ) ١٢ (د) ١٤

③ متتابعة هندسية جميع حدودها موجبة فيها : $ح_١$ = ٤ $ح_٣$ ، $ح_٢$ + $ح_٥$ = ٣٦ فإن مجموع السبعة حدود الأولى منها = ...

(أ) ٤٩ (ب) ١٢٧ (جـ) ١٨٩ (د) ٢١٥

④ معدل تغير الدالة د : د (س) = $\frac{١}{س}$ عند س = $\sqrt{٣}$ يساوى ....

(أ) ٣ (ب) $\frac{١}{٣}$ (جـ) $-\frac{١}{٣}$ (د) −٣

⑤ إذا كان : ص = ($س^٢$ + ٢) (٥ − س) فإن : $\frac{ءص}{ءس}$ = ... عند س = ١

(أ) −١٥ (ب) ٥ (جـ) −٥ (د) ٢

⑥ إذا أدخلت عدة أوساط حسابية بين ٨ ، ٦٢ وكان مجموع الوسطين الثانى والسادس يساوى ٤٠ فإن عدد هذه الأوساط = ...

(أ) ١٣ (ب) ١٥ (جـ) ١٧ (د) ١٩

⑦ ميل المماس لمنحنى الدالة : ص = $(٢ س − ٣)^٥$ عند س = ٢ يساوى ....

(أ) ١ (ب) $\frac{١}{١٢}$ (جـ) ٥ (د) ١٠

⑧ إذا كانت : ص = $(ع + ١)^٣$ ، ع = $س^٥$ − ٣

فإن : $\frac{ءص}{ءس}$ = ... عند س = ١

(أ) ١٥ (ب) −١٥ (جـ) ٦٠ (د) −٦٠

⑨ إذا كانت : (٨ ، أ ، ... ، ب ، ٦٨) تكون متتابعة حسابية عدد حدودها ١٦ فإن : ب − أ = ...

(أ) ٦٤ (ب) ٧٦ (جـ) ٥٢ (د) ٦٠

⑩ متوسط تغير الدالة د حيث : د (س) = $س^٢$ عندما تتغير س من ٣ إلى ٣,١ يساوى ....

(أ) ٠,٦ (ب) ٦,١ (جـ) ٩ (د) ٠,٦١

⑪ الحد التالى فى المتتابعة الهندسية : (٨ ، ٦ ، $\frac{٩}{٢}$ ، $\frac{٢٧}{٨}$ ، ...) هو ....

(أ) $\frac{١١}{٨}$ (ب) $\frac{٢٧}{١٦}$ (جـ) $\frac{٩}{٤}$ (د) $\frac{٨١}{٣٢}$

⑫ أول حد سالب فى المتتابعة الحسابية : (٩٦ ، ٩٣ ، ٩٠ ، ...) هو ....

(أ) $ح_{٣٣}$ (ب) $ح_{٣٤}$ (جـ) $ح_{٣٥}$ (د) $ح_{٣٦}$

---

٢ أجب عن السؤالين الآتيين :

① متتابعة هندسية حدها الثالث يساوى ٩ ، وحدها السادس يساوى ٢٤٣ أوجد المتتابعة. (٤ درجات)

② أوجد معادلة المماس لمنحنى الدالة : ص = (س − ١) (س + ١) عند كل من نقطتى تقاطعه مع محور السينات. (٤ درجات)



ثانيًا نماذج اختبارات شهر أبريل

اختبار ١

الدرجة
٢٠

١ اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة : (١٢ درجة)

① $\int ٥ \, ءس = $ ....

(أ) ٥ (ب) $٥ س + ث$ (جـ) $٥ س$ (د) $٥ + س$

② $ن \underline{|ن} + \underline{|ن} = \underline{|}$ ....

(أ) $ن$ (ب) $ن + ٢$ (جـ) $ن + ١$ (د) $ن - ١$

③ $\int (س + ٢)(س - ٢) \, ءس = $ ....

(أ) $س + ٤ + ث$ (ب) $\frac{١}{٣} س^{٣} - ٤ س + ث$

(جـ) $س^{٣} - ٤ س + ث$ (د) $(س^{٢} - ٤)^{٢} + ث$

④ إذا كان : ${}^{ن}ل_{ن-٢} = ٢٠$ ، ${}^{م}ق_{ن} = {}^{م}ق_{٢ن+١}$ فإن : $م \times ن = $ ....

(أ) ٨٠ (ب) ٤٠ (جـ) ٦٠ (د) ٢٠

⑤ إذا كان : $\underline{|٧} = {}^{٧}ل_{س}$ فإن : $س = $ ....

(أ) ٦ أ، ٧ (ب) ٧ (جـ) ١ أ، صفر (د) ٥٠٤٠

⑥ $\int \frac{س^{٣} - ٨}{س - ٢} \, ءس = $ .... $+ ث$

(أ) $س^{٢} + ٢ س + ٤$ (ب) $\frac{١}{٣} س^{٣} + س^{٢} + ٤ س$

(جـ) $س^{٣} + س^{٢} + ٤ س$ (د) $٢ س + ٢$

⑦ عدد طرق اختيار وجبة ومشروب من قائمة بها ٥ وجبات و٤ مشروبات هى ....

(أ) ٢٠ (ب) ٩ (جـ) ٥ (د) ١

⑧ $\int س^{٥} \left(١ + \frac{٣}{س}\right)^{٥} ءس = $ .... $+ ث$

(أ) $(س + ٣)^{٥}$ (ب) $\frac{١}{٦} (س + ٣)^{٦}$

(جـ) $\frac{١}{١٨} (س + ٣)^{٦}$ (د) $٥ (س + ٣)^{٤}$

(٩) $\int \sqrt[3]{9س - 1}\ ءس = ...$

(أ) $\sqrt[3]{(9س - 1)^4} + ث$ (ب) $\frac{1}{12} \sqrt[3]{(9س - 1)^4} + ث$

(جـ) $\sqrt[4]{(9س - 1)^3} + ث$ (د) $\frac{1}{12} \sqrt[4]{(9س - 1)^3} + ث$

(١٠) $\int \frac{س^7 - 5س^5 + س^3}{س^3}\ ءس = ... + ث$

(أ) $س^5 - 5س^3 + س$ (ب) $س^4 - 5س^2 + 1$

(جـ) $4س^3 - 10س$ (د) $\frac{1}{5}س^5 - \frac{5}{3}س^3 + س$

(١١) إذا كان : $(ن^2 + 9ن + 20) = \frac{ن + 5}{س}$ فإن : $س = ...$

(أ) $ن + 3$ (ب) $\underline{ن + 3|}$ (جـ) $ن + 4$ (د) $^{ن+5}ل_{2}$

(١٢) عدد طرق جلوس ٤ طلاب على ٤ مقاعد فى صف يساوى ....

(أ) $4 + 4$ (ب) 4×4

(جـ) $4 \times 3 \times 2 \times 1$ (د) ١

---

٢ أجب عن السؤالين الآتيين :

(١) كم عدد مكون من ٣ أرقام مختلفة يمكن تكوينه من مجموعة الأرقام {٢ ، ٤ ، ٥ ، ٧}
ويكون أصغر من ٥٠٠ ؟ (٤ درجات)

(٢) أوجد : (أ) $\int 7(2س - 7)^6\ ءس$

(ب) $\int \frac{15}{(3س - 5)^6}\ ءس$ (٤ درجات)

اختبـــار ٢

الدرجة
٢٠

١ اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة : (١٢ درجة)

① $\int$ (س^٢ − ٣) ءس = ...

(أ) ٢ س (ب) س^٣ − ٣ س + ث

(جـ) $\frac{١}{٣}$ س^٣ − ٣ س + ث (د) ٢ س − ٣ + ث

② كم عددًا يمكن تكوينه من ثلاثة أرقام مختلفة من مجموعة الأرقام {١ ، ٣ ، ٦ ، ٧} ؟

(أ) ٩ (ب) ١٢ (جـ) ٦٤ (د) ٢٤

③ إذا كان : $\int$ (٢ س − ٧)$^{-٣}$ ءس = أ (٢ س − ٧)$^{-٢}$ + ث فإن : أ = ...

(أ) $\frac{١}{٢}$ (ب) − $\frac{١}{٢}$ (جـ) $\frac{-١}{٤}$ (د) $\frac{١}{٤}$

④ إذا كان : $\frac{س}{\underline{|٥}}$ + $\frac{س}{\underline{|٦}}$ = $\frac{١}{\underline{|٧}}$ فإن : س = ...

(أ) $\frac{١}{٣٠}$ (ب) $\frac{١}{٦}$ (جـ) $\frac{١}{٧}$ (د) $\frac{١}{٤٩}$

⑤ إذا كان : $\frac{\underline{|٢ ن} \; \underline{|ن - ١}}{\underline{|٢ ن - ١} \; \underline{|ن + ١}}$ = $\frac{١}{٣}$ فإن : ن = ...

(أ) ٣ (ب) ٥ (جـ) ٧ (د) ٩

⑥ $\int$ $\frac{س^٢ + ٣ س}{س}$ ءس = ...

(أ) س + ٣ (ب) $\frac{١}{٢}$ س^٢ + ٣ س + ث

(جـ) س^٢ + ٣ س + ث (د) $\frac{س^٣ + ٣ س^٢}{س^٢}$

⑦ مجموعة حل المعادلة : $\frac{\underline{|س}}{١٠}$ = ل$^{س - ١}_{س - ٢}$ هى ....

(أ) {٥} (ب) {٦} (جـ) {٧} (د) {٨}

⑧ $\int$ $\frac{س^٣ + ٢٧}{س + ٣}$ ءس = ... + ث

(أ) س^٢ − ٣ س + ٩ (ب) $\frac{١}{٣}$ س^٣ − $\frac{٣}{٢}$ س^٢ + ٩ س

(جـ) س^٣ − ٣ س^٢ + ٩ س (د) $\frac{١}{٣}$ س^٣ − $\frac{٣}{٢}$ س^٢

⑨ $\int (٢س - ٥)^٦ \, ءس$ = ... + ث

(أ) $(س^٢ - ٥س)^٦$
(ب) $\frac{١}{١٤} (٢س - ٥)^٧$
(جـ) $\frac{١}{١٤} (س^٢ - ٥س)^٧$
(د) $\frac{١}{٢} (٢س - ٥)^٧$

⑩ إذا كانت أطوال أضلاع مثلث هى $\frac{١}{٢}$ |ن| ، |ن - ٢| ، |٢ - ن| من السنتيمترات

فإن القيمة العددية لمساحة المثلث = ... سم^٢

(أ) $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$
(ب) $\frac{\sqrt{٣}}{٤}$
(جـ) $\frac{\sqrt{٣}}{٨}$
(د) $\frac{\sqrt{٣}}{١٦}$

⑪ إذا كان : $^نق_{١٠} > {}^نق_٩$ فإن : ن ....

(أ) = ١٩
(ب) < ١٩
(جـ) > ١٩
(د) ≥ ١٩

⑫ $\int (س) \left[\sqrt{\frac{٢}{س^٢} - \frac{٣}{س}} \right] ءس$ = ... + ث

(أ) $\frac{-٣}{٢\sqrt{٢ - ٣س}}$
(ب) $\frac{-٢}{٩} (٢ - ٣س)^{\frac{٣}{٢}}$
(جـ) $\frac{٢}{٣} (٢ - ٣س)^{\frac{٣}{٢}}$
(د) $\sqrt{٢س - \frac{٣}{٢} س^٢}$

---

٢ أجب عن السؤالين الآتيين :

① كم عددًا زوجيًا مكونًا من ٣ أرقام مختلفة يمكن تكوينه من مجموعة الأرقام

{٢ ، ٣ ، ٤ ، ٥ ، ٧} ؟ (٤ درجات)

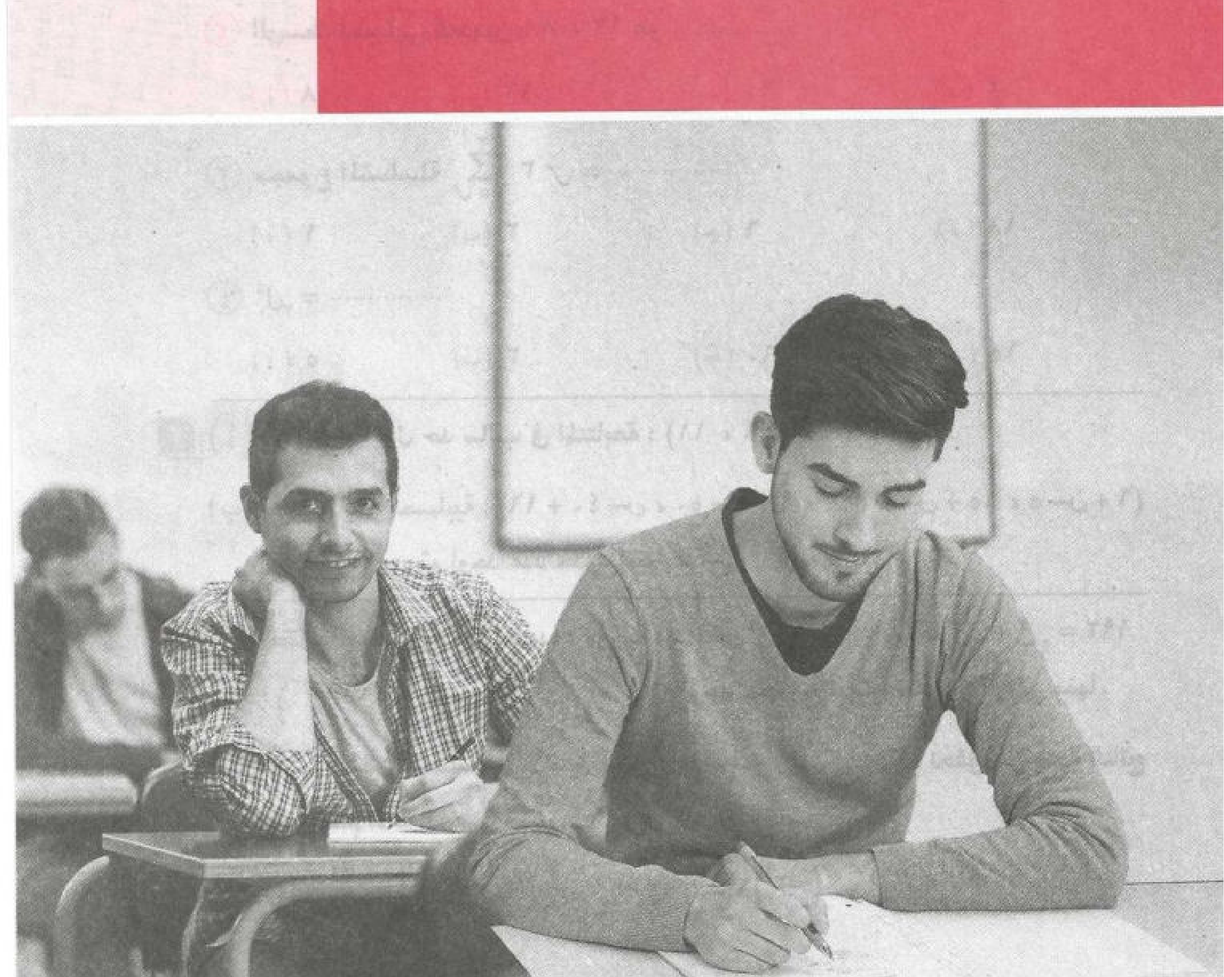
② أوجد : (أ) $\int \frac{س^٢ - ٥س + ٦}{س - ٢} \, ءس$

(ب) $\int \frac{٧}{\sqrt{٣س - ٤}} \, ءس$ (٤ درجات)

امتحانات الكتاب المدرسى

أولًا : نماذج امتحانات الكتاب المدرسى فى الجبر.

ثانيًا : نماذج امتحانات الكتاب المدرسى فى التفاضل والتكامل والاحتمال.



أولًا نماذج امتحانات الكتاب المدرسى فى الجبر

الاختبار الأول

أجب عن الأسئلة الآتية :

١ اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

① قاعدة المتتابعة (١ × ٢) ، (٢ × ٣) ، (٣ × ٤) ، (٤ × ٥) ، (٥ × ٦) هى ....

(أ) (ن − ١) (ن + ١) (ب) ن(ن + ١)

(جـ) ٢ ن(ن + ١) (د) (ن + ١) (ن + ٢)

② الوسط الحسابى للعددين : ٨ ، ١٢ هو ....

(أ) ٨ (ب) ١٢ (جـ) ١٠ (د) ٢

③ مجموع المتسلسلة $\sum_{ر=١}^{٢}$ ٣ ر = ...

(أ) ١ (ب) ٣ (جـ) ٦ (د) ١٨

④ $^{٥}ل_{٣}$ = ...

(أ) ٥ (ب) ٣ (جـ) ٦٠ (د) ١٥

---

٢ (أ) أوجد رتبة أول حد سالب فى المتتابعة : (١١ ، ٩ ، ٧ ، ...)

(ب) فى المتتابعة الحسابية : (١٦ + ٤٠ س ، ٥٠ س − ٩ ، ... ، ٣ س + ١٥ ، ٥ س + ٦)

أوجد قيمة س ثم أوجد عدد حدود المتتابعة.

---

٣ (أ) متتابعة هندسية جميع حدودها موجبة فإذا كان $ح_١ + ح_٢ = ٤٨$ ، $ح_٣ + ح_٤ = ١٩٢$

① اكتب هذه المتتابعة. ② أوجد مجموع العشرة حدود الأولى منها.

(ب) اكتب كلًّا من المتسلسلتين الآتيتين ، ثم أوجد مجموع المفكوك ، ثم تحقق من صحة الناتج باستخدام الآلة الحاسبة :

① $\sum_{ر=٢}^{٧}$ (١ − ٢ ر) ② $\sum_{ر=١}^{٨}$ $\left(\frac{-١}{٢}\right)^{ر}$

٤ (أ) أوجد قيمة كل من :

(١) $\underline{|٥} - \underline{|٣}$ (٢) $\underline{|٥} \times \underline{|٢}$

(ب) أوجد مجموعة حل كل من المعادلتين الآتيتين :

(١) ${}^{١٢}\text{ق}_{\text{ر}} = {}^{١٢}\text{ق}_{٢\text{ر}+٣}$ (٢) $\underline{|\text{ن} - ٨} = ١$

---

٥ (أ) إذا أدخلنا عدة أوساط حسابية بين ٢ ، ٤٧ وكانت النسبة بين الوسط الثانى إلى الوسط الأخير تساوى ٢ : ٧ فما عدد هذه الأوساط ؟

(ب) متتابعة هندسية حدها الثالث يساوى ٩ ، وحدها السادس يساوى ٢٤٣

• أوجد المتتابعة ومجموع الثمانية حدود الأولى منها.

الاختبار الثانى

أجب عن الأسئلة الآتية :

١ اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

(١) الوسط الهندسى للعددين : ٤ ، ١٦ هو ....

(أ) ٨ (ب) −٨ (جـ) ±٨ (د) ٤

(٢) مجموع حدود المتتابعة : (١ ، ٣ ، ٥ ، ... ، ١٧ ، ١٩) هو ....

(أ) ٢٠ (ب) ٥٠ (جـ) ١٠٠ (د) ٣٠

(٣) إذا كان الوسط الحسابى للعددين : س ، ١٦ هو ٣ فإن : س = ...

(أ) −١٠ (ب) ٣ (جـ) ١٦ (د) ٦

(٤) إذا كان : ${}^{٥}\text{ق}_{\text{ر}} = ١٠$ فإن : ر = ...

(أ) ٥ (ب) ٣ (جـ) ١٠ (د) ١

٢ **(أ)** أدخل ثمانية أوساط حسابية بين العددين ٢ ، ٢٩ ثم أوجد مجموع تلك الأوساط.

(ب) متتابعة هندسية موجبة غير منتهية مجموع حديها الأول والثاني ٣٦ ومربع حدها الثالث ٣٦ أوجد المتتابعة ثم أوجد مجموعها ابتداء من الحد الأول.

---

٣ **(أ)** متتابعة هندسية جميع حدودها موجبة فإذا كان $ح_{٢} = ١٢$ ، $ح_{٤} = ٢ ح_{٣}$

أوجد مجموع السبعة حدود الأولى منها.

(ب) أوجد مجموع كل من المتسلسلتين الآتيتين :

① $\sum_{ر=١}^{١٠} \left(\frac{١}{٢}\right)^{ر-١}$ ② $\sum_{ك=٢}^{٩} (٣ك + ١)$

---

٤ **(أ)** أوجد قيمة كل من :

① $\underline{|٥} - \underline{|٢}$ ② $\sum_{ر=١}^{٣} {}^{٤}ق_{ر}$

(ب) ما عدد الطرق التى يمكن بها ترتيب ٥ أشخاص فى صف واحد ؟

---

٥ **(أ)** (أ ، ٣٢٠ ، ب ، حـ ، ٤٠ ، ...) متتابعة هندسية جميع حدودها موجبة

أوجد قيم أ ، ب ، حـ ثم أوجد مجموع عدد غير منته من حدود هذه المتتابعة ابتداءً من حدها الأول.

(ب) أوجد عدد الحدود اللازم أخذها من المتتابعة (٢٧ ، ٢٤ ، ٢١ ، ...) ابتداءً من الحد الأول حتى يتلاشى المجموع.

ثانيًا

نماذج امتحانات الكتاب المدرسى في التفاضل والتكامل والاحتمال

الاختبار الأول

أجب عن الأسئلة الآتية :

1 اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

(١) متوسط تغير الدالة د حيث : د (س) = $س^٢$ عندما تتغير س من ١ إلى ٢ يساوى ....

(أ) −٣ (ب) ١ (جـ) ٤ (د) ٣

(٢) مشتقة الدالة د حيث : د (س) = $س^٢$ − ٣ هى ....

(أ) ٢ س (ب) ٢ س − ٣ (جـ) $س^٢$ (د) ٣ − ٢ س

(٣) إذا كان : أ ، ب حدثين متنافيين فإن : ل (أ ∩ ب) = ...

(أ) $\frac{١}{٣}$ (ب) $\frac{١}{٢}$ (جـ) صفر (د) ١

(٤) $\int$ ٣ $س^٢$ ء س = ...

(أ) $س^٣$ + ث (ب) $س^٢$ + ث (جـ) ٣ $س^٢$ + ث (د) $س^٣$

---

2 (أ) إذا كانت : د (س) = $س^٢$ + ١ فأوجد معدل التغير ، ثم احسب قيمته عندما س = ١

(ب) إذا كان : أ ، ب حدثين متنافيين وكان : ل (أ) = ٠,٤ ، ل (ب) = ٠,٣

فأوجد : ل (أ ∪ ب)

---

3 (أ) إذا كانت : ص = ($س^٢$ + ١) ($س^٢$ + ٣) فأوجد : $\frac{ءص}{ءس}$

(ب) فى تجربة إلقاء حجر نرد منتظم مرة واحدة وملاحظة العدد الذى يظهر على الوجه العلوى.

اكتب فضاء العينة ثم عين الأحداث الآتية مع ذكر عدد عناصر كل منها :

(١) الحدث أ «ظهور عدد أولى» (٢) الحدث ب «ظهور عدد يقبل القسمة على ٦»

(٣) الحدث حـ «ظهور عدد يقبل القسمة على ٧»

٤ **(أ)** أوجد قياس الزاوية التى يصنعها المماس للمنحنى : ص = $س^2 - 2$ س
عند النقطة (١ ، −١)

(ب) أوجد :

(١) $\int (2س + 3)\, ءس$ (٢) $\int \frac{س^3 + 1}{س + 1}\, ءس$

---

٥ **(أ)** أوجد النقط الواقعة على المنحنى : ص = $س^2 + 2$ والتى يكون عندها ميل المماس للمنحنى يساوى ٢

(ب) أوجد كلًا من :

(١) $\int ع^{-2}\, ءع$ (٢) $\int \left((س - 1)^{\circ} + 3\right) ءس$

الاختبار الثانى

أجب عن الأسئلة الآتية :

١ اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

(١) معدل تغير الدالة د حيث : د(س) = $س^2 - 1$ عند س = −٢ يساوى ....

(أ) ٤ (ب) −٤ (جـ) −١ (د) ١

(٢) $\int س^{-2}\, ءس$ = ...

(أ) $-س^{-1}$ + ث (ب) $-\frac{1}{س}$ (جـ) $1 + \frac{1}{س^2}$ (د) $س^{-3}$ + ث

(٣) يقال للحدثين أ ، ب إنهما متنافيان إذا كان : ل (أ ∩ ب) = ...

(أ) صفر (ب) ١ (جـ) $\frac{1}{2}$ (د) ل (أ)

(٤) ميل المماس للمنحنى : ص = $\frac{1}{س}$ عندما س = ١ يساوى ....

(أ) ١ (ب) −١ (جـ) صفر (د) غير معرف.

---

٢ **(أ)** إذا كانت : د(س) = ٢ س − $س^2$ فأوجد :

(١) دالة التغير ت (هـ) عند س = ١

(٢) متوسط التغير فى الدالة عندما تتغير س من ١ إلى ١,١

(ب) أ ، ب حدثان من فضاء عينة لتجربة عشوائية ، ل دالة احتمال معرفة على ف حيث :

ل (ب) = ٣ ل (أ) ، ل (أ ∪ ب) = ٠,٧٢ أوجد ل (أ) ، ل (ب) إذا كان :

① أ ، ب حدثين متنافيين. ② أ ⊂ ب

---

٣ (أ) إذا كانت : ص = ٤ س^{٣} − ٥ س^{٢} + ٤ س + ٩ فأوجد : $\frac{ءص}{ءس}$

(ب) كيس يحتوى على ٤ كرات بيضاء ، ٥ كرات حمراء ، ٣ كرات سوداء. سحبت كرة عشوائيًا.

أوجد احتمال أن تكون الكرة المسحوبة :

① حمراء. ② ليست بيضاء.

③ بيضاء أو سوداء.

---

٤ (أ) أوجد النقط الواقعة على المنحنى : ص = س^{٣} + ٣ س^{٢} − ١ التى عندها المماس للمنحنى يوازى المحور السينى.

(ب) أوجد التكاملين الآتيين :

① ∫ (س − ٥) (س − ١) ءس ② ∫ ٦ (س − ٢)^{٥} ءس

---

٥ (أ) أوجد معادلة المماس لمنحنى الدالة : ص = (س − ١) (س + ١) عند كل من نقطتى تقاطعه مع محور السينات.

(ب) أوجد :

① ∫ $\frac{س^{٢} − ٥ س + ٦}{س − ٢}$ ءس ② ∫ ٤ (س − ٢)^{٣} ءس

الامتحانات النهائية

امتحانات بعض مدارس المحافظات



يمكنك حل الامتحانات التفاعلية من خلال مسح **QR code** الخاص بكل امتحان

١ محافظة القاهرة

إدارة الساحل
توجيه الرياضيات

اختبار تفاعلي ①

أولاً أسئلة الاختيار من متعدد

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

① الوسط الحسابي للعددين : ١٢ ، ٨ هو ....

(أ) ٥ (ب) ١٠ (جـ) ٢٠ (د) ٤

② إذا كان : ٢ أ + ١ ، ٥ أ − ١ ، ٦ أ + ٣ ثلاث حدود متتالية من متتابعة حسابية فإن : أ = ...

(أ) ١ (ب) ٢ (جـ) ٣ (د) ٤

③ مجموع التسعة حدود الأولى من متتابعة حسابية حدها الأول ٢ وحدها الأخير ١٨ = ...

(أ) ٢٠ (ب) ٩٠ (جـ) ٤٥ (د) ١٨٠

④ قيمة المتسلسلة الحسابية : $\sum_{ر=١}^{٤}$ (٢ ر + ١) يساوى ....

(أ) ٢٥ (ب) ٣٠ (جـ) ٣٥ (د) ٢٤

⑤ الحد الخامس فى المتتابعة الهندسية : (٨ ، ٦ ، $\frac{٩}{٢}$ ، ...) هو ....

(أ) $\frac{٢٧}{٨}$ (ب) $\frac{٢٧}{١٦}$ (جـ) $\frac{٩}{٤}$ (د) $\frac{٨١}{٣٢}$

⑥ مجموع الخمسة حدود الأولى من المتتابعة الهندسية التى فيها أ = ١ ، ر = ٢ يساوى ....

(أ) ٣٢ (ب) ٣١ (جـ) ٣٠ (د) ٢٩

⑦ إذا كان : $\lfloor$ ن − ٨ $\rfloor$ = ١ فإن : ن يمكن أن تساوى ....

(أ) ٠ (ب) ١ (جـ) ٤ (د) ٨

⑧ إذا كان : $ل^{ر}_{٥}$ = ٦٠ فإن : ر تساوى ....

(أ) ٤ (ب) ٣ (جـ) ٢ (د) ٥

⑨ قيمة : ٣ $\lfloor$٢ − $\lfloor$٣ = ...

(أ) ١ (ب) ٢ (جـ) ٣ (د) صفر

(١٠) عدد طرق الإجابة عن ٤ أسئلة فقط فى امتحان يحتوى على ٦ أسئلة يساوى ....

(أ) ٣٠ (ب) ١٥ (جـ) ٢٤ (د) ١٠

(١١) إذا كان : $ق^{ن}_{٢} = ١٢٠$ فإن قيمة : $ق^{ن}_{ن-٩}$ = ...

(أ) ٩ (ب) ٨ (جـ) ١٠ (د) ١

(١٢) متوسط التغير فى حجم مكعب عندما يتغير طول حرفه من ٥ سم إلى ٧ سم = ...

(أ) ١٢٥ (ب) ٣٤٣ (جـ) ٢١٨ (د) ١٠٩

(١٣) ميل المماس للمنحنى ص = ٣ س − $س^{٣}$ عند س = صفر يساوى ....

(أ) ٣ (ب) صفر (جـ) −٣ (د) ٦

(١٤) قيمة $\frac{ءص}{ءس}$ = ... إذا كان : ص = $(س + ٣)^{٧}$

(أ) ٧ $(س + ٣)^{٦}$ (ب) $(س + ٣)^{٦}$ (جـ) ٦ $(س + ٣)^{٧}$ (د) $(س + ٣)^{٧}$

(١٥) $\int \frac{١٢}{٥} ف^{٥} ء ف$ = ...

(أ) $ف^{٦}$ + ث (ب) $\frac{٢}{٥} ف^{٦}$ + ث (جـ) $ف^{٥}$ + ث (د) $\frac{٥}{٢} ف^{٦}$ + ث

(١٦) $\int (س^{٣} + س^{٢} + س) ءس$ = ...

(أ) $\frac{١}{٤} س^{٤} + \frac{١}{٣} س^{٣} + \frac{١}{٢} س^{٢}$ + ث (ب) $\frac{١}{٤} س^{٤} - \frac{١}{٣} س^{٣} - \frac{١}{٢} س^{٢}$ − ث

(جـ) $س^{٤} + س^{٣} + س^{٢}$ + ث (د) $\frac{١}{٤} س^{٤} + \frac{١}{٣} س^{٣} + \frac{١}{٢} س^{٢}$ − ث

(١٧) ل (أ ∪ ب) = ...

(أ) ل (أ) + ل (ب) (ب) ل (أ) ∩ ل (ب)

(جـ) ل (أ) − ل (ب) (د) ل (أ) + ل (ب) − ل (أ ∩ ب)

(١٨) إذا ألقى حجر نرد منتظم مرة واحدة ، فإن احتمال الحصول على عدد فردى أقل من ٥ هو ....

(أ) $\frac{٢}{٥}$ (ب) $\frac{١}{٢}$ (جـ) $\frac{١}{٣}$ (د) $\frac{١}{٦}$

(١٩) عند سحب بطاقة من ٢٠ بطاقة متماثلة ومرقمة من ١ إلى ٢٠ وملاحظة العدد الظاهر على البطاقة فإن حدث (العدد الظاهر يقبل القسمة على ٣) = ...

(أ) {٣ ، ٩ ، ١٨} (ب) {١٢ ، ١٥ ، ١٨}

(جـ) {٣ ، ٦ ، ٩} (د) {٣ ، ٦ ، ٩ ، ١٢ ، ١٥ ، ١٨}

(٢٠) الوسط الهندسى للعددين : ٤ ، ١٦ = ...

(أ) −٨　(ب) ٨　(جـ) ± ٨　(د) ٤

(٢١) $ن_{ل}^{ن}$ = ...

(أ) صفر　(ب) ١　(جـ) ٢　(د) ٣

(٢٢) إذا كان : أ ، ب حدثان متنافيان　فإن : ل (أ ∩ ب) = ...

(أ) $\frac{١}{٣}$　(ب) $\frac{١}{٢}$　(جـ) صفر　(د) ١

(٢٣) معدل تغير الدالة د حيث : د (س) = س^{٢} − ١ عند س = −٢ يساوى ....

(أ) ٤　(ب) −٤　(جـ) −١　(د) ١

(٢٤) إذا سحبت كرة عشوائيًا من صندوق به ٣ كرات بيضاء ، ٥ كرات حمراء ، ٧ كرات خضراء فإن احتمال أن تكون الكرة المسحوبة بيضاء أو خضراء هو ....

(أ) $\frac{١}{٥}$　(ب) $\frac{٢}{٣}$　(جـ) $\frac{٧}{١٥}$　(د) $\frac{١}{٢}$

(٢٥) إذا كان : أ ، ب حدثين من فضاء العينة لتجربة عشوائية حيث : ل (أ) = $\frac{٣}{٨}$ ، ل (ب) = $\frac{٣}{٤}$ ، ل (أ ∩ ب) = $\frac{١}{٤}$　فإن : ل (أ ∪ ب) = ...

(أ) $\frac{١}{٨}$　(ب) $\frac{٣}{٨}$　(جـ) $\frac{٥}{٨}$　(د) $\frac{٧}{٨}$

(٢٦) ل (ف) = ...

(أ) صفر　(ب) ١　(جـ) ٢　(د) ٣

(٢٧) إذا كان : أ ، ب حدثين من ف　فإن : أ َ ∩ ب َ = ...

(أ) (أ ∪ ب)َ　(ب) أ َ ∪ ب َ　(جـ) أ َ ∪ ب　(د) أ ∪ ب َ

ثانيًا　الأسئلة المقالية

أجب عن السؤالين الآتيين :

١ (ح$_{ن}$) متتابعة هندسية حدودها موجبة فيها : ح$_{٢}$ = ٦ ، ح$_{٣}$ − ح$_{١}$ = ٩ ، **أوجد هذه المتتابعة ومجموعة الأثنى عشر حدًا الأولى منها.**

٢ ١٥ $\sqrt{}$ (٣س − ٢)^{٥} ءس

٢ محافظة الجيزة

إدارة بولاق الدكرور
توجيه الرياضيات

اختبار تفاعلى ②

أولًا أسئلة الاختيار من متعدد

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

① الحد السابع فى المتتابعة الحسابية (٢ ، ٥ ، ٨ ، ...) هو ....

(أ) ٣٦ (ب) ٢٣ (جـ) ٢٠ (د) ٢٧

② متتابعة هندسية حدها الأول = ٣ وأساسها = ٢ فإن مجموعة أول سبعة حدود منها يساوى ....

(أ) ٦٣ (ب) ٣٨١ (جـ) $\frac{١}{٢}$ ١٧ (د) ٣٨٤

③ متوسط التغير للدالة د : د (س) = $س^٢$ عندما تتغير س من ٢ إلى ٣ يساوى ....

(أ) ٤ (ب) ٩ (جـ) ٥ (د) ١٣

④ إذا كان : أ ، ب حدثين من فضاء عينة ف لتجربة عشوائية وكان :

ل (أ) = $\frac{١}{٤}$ ، ل (ب) = $\frac{١}{٣}$ ، ل (أ ∪ ب) = $\frac{٥}{١٢}$ فإن : ل (أ ∩ ب) = ...

(أ) $\frac{٧}{١٢}$ (ب) $\frac{٣}{٤}$ (جـ) $\frac{١}{٣}$ (د) $\frac{١}{٦}$

⑤ قيمة المتسلسلة الهندسية : ٤٨ + ٢٤ + ١٢ + ··· يساوى ....

(أ) ٨٤ (ب) −٤٨ (جـ) ٩٦ (د) ١٢٤

⑥ إذا كان : ٨ × ٧ × ٦ = $^{ص}ل_{س}$ فإن : س + ص يمكن أن تساوى ....

(أ) ٣٥ (ب) ١٨ (جـ) ١٣ (د) ١١

⑦ عدد طرق ترتيب ٧ أطفال فى دائرة يساوى ....

(أ) ١ (ب) ٧ (جـ) ٧٢٠ (د) ٥٠٤٠

⑧ $\frac{ء}{ءس}\left(\frac{١}{س}\right)$ = ...

(أ) $\frac{١}{س^٢}$ (ب) $\frac{-١}{س^٢}$ (جـ) − س (د) $س^٢$

⑨ $\int \frac{س^٢ + ٥س}{س}$ ءس = ... + ث

(أ) س + ٥ (ب) $س^٢$ + ٥ س (جـ) $\frac{١}{٢}$ $س^٢$ + ٥ س (د) ٢ س + ٥

(١٠) المماس للمنحنى ص = $(س - ٢)^٥$ يوازى محور السينات عند س = ...

(أ) −٢ (ب) ٢ (جـ) ٥ (د) −٥

(١١) عدد الحدود الموجبة فى المتتابعة الحسابية : (٦١ ، ٥٧ ، ٥٣ ، ...) هو .... حدًا.

(أ) ١٧ (ب) ١٦ (جـ) ١٥ (د) ١٤

(١٢) إذا كان : أ ، ب حدثين من فضاء عينة ف لتجربة عشوائية بحيث :

ل (أ) = ل (أَ) فإن : ل (أ) = ...

(أ) $\frac{١}{٤}$ (ب) $\frac{١}{٢}$ (جـ) $\frac{٣}{٤}$ (د) ١

(١٣) إذا كان : $^{ن}ل_{ر} = {}^{ن}ق_{ر}$ فإن : ر = ...

(أ) صفر (ب) ١ (جـ) صفر أو ١ (د) ١ أو ٢

(١٤) إذا كان الوسط الهندسى لعددين هو ١٢ فإن حاصل ضرب العددين يساوى ....

(أ) ٢٤ (ب) ٣٦ (جـ) ١٤٤ (د) ٤٨

(١٥) $\frac{|\underline{ن}}{ن}$ = ...

(أ) ١ (ب) $|\underline{ن}$ (جـ) $|\underline{ن - ١}$ (د) $\frac{ن}{ن - ١}$

(١٦) فى أى متتابعة حسابية يكون : $ح_٤ + ح_٦$ = ...

(أ) $ح_٥$ (ب) $ح_{١٠}$ (جـ) $٢ ح_٥$ (د) $٢ ح_{١٠}$

(١٧) إذا كان احتمال وقوع الحدث أ هو $\frac{٢}{٥}$ فإن احتمال عدم وقوعه يساوى ....

(أ) ٠,٦ (ب) ٠,٢ (جـ) صفر (د) ٠,٤

(١٨) إذا كان : $|\underline{ن - ٢}$ = ٢٤ فإن : ن = ...

(أ) ٦ (ب) ٨ (جـ) ٢٦ (د) ٤

(١٩) قياس الزاوية الموجبة التى يصنعها المماس للمنحنى ص = $س^٢$ − ٣ مع الاتجاه الموجب لمحور السينات عند س = $\frac{١}{٢}$ يساوى ....

(أ) ٤٥° (ب) ٦٠° (جـ) ٣٠° (د) ٩٠°

(٢٠) رتبة الحد الذى قيمته = ٢٥٦ فى المتتابعة الهندسية (٤ ، ٨ ، ١٦ ، ...) هو ....

(أ) $ح_{٦٤}$ (ب) $ح_٧$ (جـ) $ح_٩$ (د) $ح_{١٢}$

(٢١) إذا كان : د (س) = $\frac{٣}{س + ١}$ فإن : دَ (١) = ...

(أ) $\frac{٩}{٤}$ (ب) $\frac{-٣}{٤}$ (جـ) ٣ (د) $\frac{١}{٢}$

(٢٢) إذا كان : أ ، ب حدثين من فضاء عينة ف لتجربة عشوائية فإن احتمال وقوع الحدث أ فقط هو ....

(أ) ل (أَ) (ب) ل (أ − ب) (جـ) ل (ب − أ) (د) ل (أ − بَ)

(٢٣) إذا كان : $^{١٣}ق_{ر} = {}^{١٣}ق_{٦}$ فإن : ر تساوى ....

(أ) ٦ فقط (ب) ٧ فقط (جـ) ٨ فقط (د) ٦ أ، ٧

(٢٤) إذا كان : أ ، ب حدثان متنافيان من فضاء عينة ف لتجربة عشوائية فإن :
ل (أَ ∪ بَ) = ...

(أ) ١ (ب) صفر (جـ) ∅ (د) $\frac{١}{٢}$

(٢٥) ∫ $س^{٢}$ ءس = ... + ث

(أ) ٢ س (ب) $\frac{١}{٢}$ $س^{٢}$ (جـ) $\frac{١}{٣}$ $س^{٣}$ (د) $س^{٣}$

(٢٦) سحبت بطاقة عشوائيًا من بين ٢٠ بطاقة متماثلة ومرقمة من ١ إلى ٢٠ فإن احتمال أن يكون العدد على البطاقة المسحوبة يقبل القسمة على ٣ يساوى ....

(أ) ٠,٢ (ب) ٠,٣ (جـ) ٠,٤ (د) ٠,٥

(٢٧) إذا كان : أ ، ب حدثين من فضاء عينة ف لتجربة عشوائية وكان : أ ⊂ ب وكان :
ل (أ) = ٠,٦ ، ل (ب) = ٠,٩ فإن : ل (ب − أ) = ...

(أ) ٠,٦ (ب) ٠,٣ (جـ) ٠,٤ (د) ٠,٢

ثانيًا الأسئلة المقالية

أجب عن السؤالين الآتيين :

١ متتابعة هندسية فيها : $ح_{٢} = ١٤$ ، $ح_{٥} = ١١٢$ أوجد المتتابعة ومجموع الثمانية حدود الأولى منها.

---

٢ أوجد معادلة المماس للمنحنى : ص = $س^{٢}$ + ١ عند النقطة (٢ ، ٥) الواقعة عليه.



٣ محافظة الإسكندرية

إدارة غرب
توجيه الرياضيات

أولاً أسئلة الاختيار من متعدد

اختبار تفاعلى ③

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

① رتبة الحد الذى قيمته ٦١ فى المتابعة الحسابية (٥ ، ٩ ، ١٣ ، ...) = ...

(أ) $ح_{١٠}$ (ب) $ح_{١٥}$ (جـ) $ح_{٢٠}$ (د) $ح_{٢٥}$

② إذا كان : $\sum_{ر=١}^{٢٥} (٣ + ك ر) = ٧٢٥$ فإن : ك = ...

(أ) ١ (ب) ٢ (جـ) ٣ (د) ٤

③ أساس المتتابعة الحسابية التى حدها الرابع = ٣٤ ، وحدها الثامن = ٦٢ ....

(أ) ٣ (ب) ٥ (جـ) ٦ (د) ٧

④ إذا كان : ٣ ، س ، ١٢ فى تتابع هندسى فإن : س = ...

(أ) ± ٦ (ب) $٦\sqrt{٢}$ (جـ) ± $٦\sqrt{٢}$ (د) ± ٧,٥

⑤ عدد الحدود اللازم أخذها من المتتابعة الهندسية (٢ ، ٦ ، ١٨ ، ...) ابتداءً من الحد الأول ليكون مجموع هذه الحدود = ٧٢٨ هو .... حدًا.

(أ) ٨ (ب) ٩ (جـ) ٦ (د) ٧

⑥ مجموع حدود المتسلسلة الحسابية : ٨٩ + ٨٥ + ٨١ + ... + ٣٣ يساوى ....

(أ) ١٨٣٠ (ب) ١٦٣٠ (جـ) ٩١٥ (د) ٨١٥

⑦ متتابعة هندسية حدها الأول يساوى مجموع الحدود التالية له إلى مالانهاية فإن أساس هذه المتتابعة يساوى ....

(أ) $\frac{١}{٢}$ (ب) $\frac{١}{٣}$ (جـ) $\frac{١}{٤}$ (د) $\frac{٢}{٣}$

⑧ عدد طرق ترتيب ٥ أشخاص فى دائرة يساوى ....

(أ) ١ (ب) ٥ (جـ) ٢٤ (د) ١٢٠

(٩) إذا كان : $\underline{|ن} = ٣٠ \underline{|ن - ١}$ فإن : ن = ...

(أ) ٥ (ب) ٦ (جـ) ٢٩ (د) ٣٠

(١٠) عدد طرق انتخاب لجنة مكونة من رجلين وسيدتين من بين ٧ رجال و٥ سيدات = ...

(أ) ٢١٠ (ب) ٣١ (جـ) ٢٦ (د) ٧٥

(١١) إذا كان : $^{ن}ل_{ر} = ٢٤٠$ ، $^{ن}ق_{ر} = ١٠$ فإن : $\underline{|ر} = ...$

(أ) ٢ (ب) ٤ (جـ) ١٢ (د) ٢٤

(١٢) إذا كان : $^{م}ل_{٣} = ٧٢٠$ ، $^{ن}ق_{٢} = ١٠$ فإن : $\underline{|م - ن} = ...$

(أ) صفر (ب) ١ (جـ) ١٢٠ (د) ٢١٠

(١٣) إذا كان : $^{ن}ق_{٨} = ^{ن}ق_{٦}$ فإن : $^{١٥}ق_{ن} = ...$

(أ) ١٤ (ب) ١٥ (جـ) ١ (د) ٤

(١٤) إذا كان : ص = $ع^{٥}$ ، ع = $س^{٢} + ١$ فإن : $\frac{ءص}{ءس} = ...$ عندما س = ١

(أ) ١٦٠ (ب) ١١٢ (جـ) ٨٤ (د) ٦٤

(١٥) متوسط تغير الدالة د حيث : د (س) = $س^{٢} - ٥$ عندما تتغير س من ١ إلى ٣ يساوى ....

(أ) ١ (ب) ٢ (جـ) ٣ (د) ٤

(١٦) معدل تغير الدالة : د (س) = $س^{٣} - ٣$ عندما س = ٣ يساوى ....

(أ) ٢٧ (ب) ٣٢ (جـ) ٢٤ (د) ٣٥

(١٧) $\int (٣س^{٢} + ٢) ءس = ... + ث$

(أ) ٦س (ب) $س^{٣} + ٢س$ (جـ) $\frac{٣}{٢}س + ٢$ (د) $س^{٣} + س^{٢}$

(١٨) $\int (٢س - ٥)^{٦} ءس = ... + ث$

(أ) $٦ (س^{٢} - ٥س)^{٥}$ (ب) $\frac{١}{١٢} (٢س - ٥)^{٦}$

(جـ) $\frac{١}{١٤} (س^{٢} - ٥س)^{٧}$ (د) $\frac{١}{١٤} (٢س - ٥)^{٧}$

(١٩) المماس لمنحنى الدالة : ص = $س^{٢} + ٤س$ يوازى محور السينات عن س = ...

(أ) ‎-٢ (ب) ٢ (جـ) صفر (د) ‎-٤

(٢٠) إذا كان : ل (أ) = $\frac{١}{٣}$ ، ل (ب) = $\frac{١}{٥}$ ، ل (أ ∩ ب) = $\frac{٢}{٥}$ فإن : ل (أ ∪ ب) = ...

(أ) $\frac{٧}{١٥}$ (ب) $\frac{٣}{٥}$ (جـ) $\frac{٤}{٥}$ (د) $\frac{٢}{١٥}$

(٢١) إذاكان : ل (أَ) = ٠,١٥ فإن : ل (أ) = ...

(أ) ٠,١٥ (ب) ٠,٨٥ (جـ) ٠,٦٥ (د) ٠,٤٥

(٢٢) إذا كان : أ ، ب حدثان متنافيان فإن : ل (أَ ∪ بَ) = ...

(أ) صفر (ب) $\frac{١}{٢}$ (جـ) ١ (د) ∅

(٢٣) إذا كان : ف = {أ ، ب ، حـ} فضاء عينة لتجربة عشوائية وكان :

ل (أ) = $\frac{١}{٥}$ ، ل (ب) = $\frac{٢}{٥}$ فإن : ل (حـ) = ...

(أ) $\frac{١}{٥}$ (ب) $\frac{٢}{٥}$ (جـ) $\frac{١}{١٥}$ (د) $\frac{٢}{١٥}$

(٢٤) إذا كان : أ ⊂ ب فإن : ل (أ ∩ ب) = ...

(أ) ل (أ) (ب) ل (ب) (جـ) صفر (د) ١

(٢٥) إذا كان : ل (أ) = ٠,٣ ، ل (أ − ب) = ٠,١٦ فإن : ل (أ ∩ ب) = ...

(أ) ٠,٣ (ب) ٠,٧ (جـ) ٠,١٤ (د) ٠,١٦

(٢٦) فصل دراسى به ٤٢ طالبًا نجح منهم آخر العام ٣٥ طالبًا فإذا اختير طالب عشوائيًا فإن احتمال أن يكون الطالب راسبًا هو ....

(أ) $\frac{٥}{٦}$ (ب) $\frac{١}{٦}$ (جـ) صفر (د) ١

(٢٧) إذا كان أ حدث من فضاء العينة لتجربة عشوائية وكان : أ = ف حيث ف هو فضاء العينة فإن الحدث أ هو ....

(أ) حدث أولى. (ب) حدث مستحيل.

(جـ) حدث مؤكد. (د) الحدث المكمل للحدث أ

ثانيًا الأسئلة المقالية

أجب عن السؤالين الآتيين :

١ متتابعة هندسية حدها الثالث يساوى ٩ ، وحدها السادس يساوى ٢٤٣
أوجد المتتابعة ومجموع الثمانية حدود الأولى منها.

---

٢ أوجد معادلة المماس لمنحنى الدالة : د (س) = $س^٢$ − س عندما س = ٢

٤ محافظة القليوبية
إدارة شرق شبرا الخيمة

أولاً أسئلة الاختيار من متعدد

اختبار تفاعلى ④

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

① الحد الثامن من المتتابعة الهندسية (٢ ، ٤ ، ٨ ، ...) هو ....

(أ) ٦٤ (ب) ١٢٨ (جـ) ٢٥٦ (د) ٥١٢

② رتبة أول حد سالب فى المتتابعة الحسابية : (٦٣ ، ٥٩ ، ٥٥ ، ...) هو ....

(أ) $ح_{١٦}$ (ب) $ح_{١٧}$ (جـ) $ح_{١٨}$ (د) $ح_{١٩}$

③ قيمة المتسلسلة : $\sum_{ر=٧}^{٢٢} ٣ ر$ = ...

(أ) ٢٥٠ (ب) ٧٦٥ (جـ) ٨٠٧ (د) ٨٢٨

④ مجموع الحدود السبعة الأولى من المتتابعة الهندسية (٣ ، ٦ ، ١٢ ، ...) يساوى ....

(أ) ١٩٢ (ب) ١٨٩ (جـ) ٧٦٥ (د) ٣٨١

⑤ الحد النونى للمتتابعة : (١ ، ٤ ، ٩ ، ١٦ ، ...) هو ....

(أ) ٤ ن (ب) $٢^{ن}$ (جـ) $ن^{٢}$ (د) ٢ ن

⑥ مجموع عدد لا نهائى من حدود المتتابعة الهندسية : (٨١ ، ٢٧ ، ٩ ، ...) يساوى ....

(أ) ١٠٧ (ب) ٧١١ (جـ) ١١٨ (د) ١٢١,٥

⑦ إذا كان الوسط الهندسى للعددين : ٤ ، س هو ٨ فإن : س تساوى ....

(أ) ٣٢ (ب) ١٦ (جـ) ٨ (د) ٢

⑧ إذا كان : $^{ن}ق_{١٠} = ^{ن}ق_{١٤}$ فإن : $^{٢٥}ق_{ن}$ = ...

(أ) ٢٤ (ب) ٢٥ (جـ) ١ (د) ٤٩

⑨ إذا كان : $^{٥}ل_{ر-٢} = ٦٠$ فإن : ر = ...

(أ) ٥ (ب) ٤ (جـ) ٣ (د) ٢

⑩ إذا كان : $\underline{|ن} = ٢٤$ فما قيمة : $^{ن}ل_{ن-٢}$ = ...

(أ) صفر (ب) ١ (جـ) ٢ (د) ٤

(١١) إذا كان : $^{س}ل_{ص} = ٦٠$ ، $^{س}ق_{ص} = ١٠$ فإن : س + ص = ...

(أ) ٨ (ب) ٣ (جـ) ٥ (د) ١

(١٢) إذا كان : $^{ن}ق_{٣} = ٣٥$ ، $^{١٠}ل_{ر} = ٧٢٠$ فإن : $\underline{|ن - ر|}$ = ...

(أ) ٧ (ب) ٣ (جـ) ٢٤ (د) ٤

(١٣) إذا كان : س = {س : س ∈ ط ، −٣ ≤ س ≤ ٤}

، ص = {(أ ، ب) : أ ، ب ∈ س ، أ ≠ ب} ، فإن عدد عناصر ص = ...

(أ) ٤ (ب) ٥ (جـ) ٩ (د) ٢٠

(١٤) إذا كانت : ص = ٢ $س^٢$ + ٣ س + ١ فإن : $\frac{ءص}{ءس}$ عند س = ١ يساوى ....

(أ) ٦ (ب) ٧ (جـ) −٧ (د) ٦

(١٥) متوسط تغير الدالة د حيث : د (س) = $س^٢$ عندما تتغير س من ٣ إلى ٣,٢ يساوى ....

(أ) ٠,٦٢ (ب) ٦,٢ (جـ) ٦٢ (د) ٦,٢١

(١٦) $\int$ ٣ $س^٢$ ءس = ...

(أ) $س^٣$ + ث (ب) $س^٢$ + ث (جـ) ٣ $س^٢$ + ث (د) $س^٣$

(١٧) إذا كان : د (س) = $\frac{س + ٣}{س + ١}$ فإن : دَ (١) = ...

(أ) $\frac{١}{٢}$ (ب) $-\frac{١}{٢}$ (جـ) ٢ (د) −٢

(١٨) $\int$ $(٢ س + ١)^٥$ ءس = ... + ث

(أ) $(٢ س + ١)^٦$ (ب) $\frac{١}{٢}$ $(٢ س + ١)^٦$

(جـ) $\frac{١}{١٢}$ $(٢ س + ١)^٦$ (د) $\frac{١}{٦}$ $(٢ س + ١)^٦$

(١٩) إذا كانت : ص = $ع^٢$ ، ع = ٢ $س^٢$ − ٩ ، أوجد $\frac{ءص}{ءس}$ عندما س = ٢ ....

(أ) ٨ (ب) −٨ (جـ) ١٦ (د) −١٦

(٢٠) احتمال وقوع الحدث المستحيل يساوى ....

(أ) ∅ (ب) صفر (جـ) ١ (د) ٢

(٢١) أ ، ب حدثين من فضاء عينة لتجربة عشوائية حيث : ل (أ) = ٠,٥
، ل (ب) = ٠,٦ ، ل (أ ∩ ب) = ٠,٣ فإن : ل (أ ∪ ب) = ...

(أ) ٠,٦ (ب) ٠,٧ (جـ) ٠,٨ (د) ١,١

(٢٢) أ ، ب حدثين من فضاء عينة لتجربة عشوائية حيث : أ ⊃ ب
فإن : ل (أ ∩ ب) = ...

(أ) ∅ (ب) ل (ب) (جـ) ل (أ − ب) (د) ل (أ)

(٢٣) أ ، ب حدثين من فضاء عينة لتجربة عشوائية ، ل (أ ∩ ب) = ٠,٥
، ل (ب) = ٠,٦ فإن : ل (ب − أ) = ...

(أ) ٠,٥ (ب) ٠,٦ (جـ) ٠,١ (د) ٠,٣

(٢٤) فصل دراسى به ٤٢ طالبًا نجح منهم فى آخر العام ٣٥ طالبًا فإذا اختير طالب عشوائيًا فإن احتمال أن يكون الطالب راسبًا هو ....

(أ) $\frac{٥}{٦}$ (ب) $\frac{١}{٦}$ (جـ) صفر (د) ١

(٢٥) أ ، ب حدثين من فضاء عينة لتجربة عشوائية حيث : ل (أ) = ٠,٣ ، ل (ب) = ٠,٥
، ل (أ ∩ ب) = ٠,١ فإن : ل (أَ ∩ بَ) = ...

(أ) ٠,٧ (ب) ٠,٤ (جـ) ٠,٩ (د) ٠,٣

(٢٦) إذا كان احتمال وقوع الحدث أ هو $\frac{٣}{٥}$ فإن : ل (أَ) = ...

(أ) ٠,٤ (ب) ٠,٢ (جـ) صفر (د) ٠,٦

(٢٧) أ ، ب حدثين متنافيين من فضاء عينة لتجربة عشوائية ما فإن : ل (ب − أ) = ...

(أ) ∅ (ب) ل (ب) (جـ) ل (أ − ب) (د) ل (أ)

ثانيًا الأسئلة المقالية

أجب عن السؤالين الآتيين :

(١) متتابعة حسابية فيها $ح_٧$ = ٥١ ، $ح_{١٦}$ = ١٠٥
أوجد مجموع العشرة حدود الأولى من المتتابعة.

---

(٢) أوجد قياس الزاوية الموجبة التى يصنعها المماس لمنحنى الدالة :
ص = $س^٣$ − ٢ $س^٢$ + ٥ عند النقطة (١ ، ٤) الواقعة عليه.

٥ محافظة الشرقية

إدارة العاشر من رمضان
توجيه الرياضيات

اختبار تفاعلي ٥

أولًا أسئلة الاختيار من متعدد

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

① $\sum_{ر=١}^{١٠} ر^٢$ = ...

(أ) ١٠ (ب) ٥٥ (جـ) ٣٢٠ (د) ٣٨٥

② متوسط التغير للدالة د حيث : د (س) = $س^٢$ عندما تتغير من ٣ إلى ٣,١ تساوى ....

(أ) ٠,٦١ (ب) ٦,١ (جـ) ٩ (د) ٩,٦

③ إذا كان : أ ، ب حدثين متنافيين فإن : أ − ب = ...

(أ) أ (ب) ب (جـ) ب − أ (د) أَ

④ بكم طريقة لمجموعة مكونة من خمسة أشخاص أن يجلسوا حول دائرة مستديرة = ...

(أ) ١٢٠ (ب) ٦ (جـ) ٢٤ (د) ٧٢٠

⑤ عدد حدود المتتابعة : (٢ ، ٨ ، ١٤ ، ... ، ٦٨) = ... حدًا.

(أ) ٦ (ب) ٨ (جـ) ١٢ (د) ١٦

⑥ $\frac{ء}{ءس}$ (س − ١) (س + ٣) = ...

(أ) ٢ س + ٢ (ب) ٢ س (جـ) ٢ س + ٢١ (د) $س^٢$

⑦ $\overline{(أ \cup ب)}$ = ...

(أ) أَ ∪ بَ (ب) أَ ∩ بَ (جـ) $\overline{(أ \cap ب)}$ (د) أَ

⑧ $\frac{\lfloor ن + ٢}{\lfloor ن + ١}$ = ...

(أ) ن + ١ (ب) ن + ٢ (جـ) ٢ ن (د) ن

⑨ متتابعة حسابية عدد حدودها ٢٠ فإن الحد الرابع من النهاية هو الحد .... من البداية.

(أ) ١٥ (ب) ١٦ (جـ) ١٧ (د) ١٨

(١٠) $\frac{d}{dس}$ (٣ π^2) = ...

(أ) ٦ π (ب) ٣ π^2 (جـ) π^3 (د) صفر

(١١) إذا كان : ل (أ) = $\frac{1}{4}$ ، ل (ب) = $\frac{2}{3}$ ، ل (أ ∩ ب) = $\frac{1}{3}$

فإن : ل (أ ∪ ب) = ...

(أ) $\frac{11}{12}$ (ب) $\frac{3}{4}$ (جـ) $\frac{2}{3}$ (د) $\frac{7}{12}$

(١٢) إذا كان : ${}^{ن}ل_{3}$ = ٥٠٤ فإن : ن = ...

(أ) ٩ (ب) ١٠ (جـ) ١١ (د) ٥

(١٣) إذا كان الوسط الحسابى للعددين : س ، ٣٥ هو ٢٥ فإن : س = ...

(أ) ١٤ (ب) ١٥ (جـ) ٢٥ (د) ٣٦

(١٤) إذا كان : ص = (٣ س + ١)^{7} فإن : $\frac{dص}{dس}$ = ...

(أ) ٦ (٣ س + ١)^{8} (ب) ٢١ (٣ س + ١)^{6}

(جـ) ٦ (٣ س) (د) (٣ س + ١)^{8}

(١٥) إذا كان : أ ∩ ب = ∅ ، ل (أ) = ٠,٧ ، ل (ب) = ٠,٤

فإن : ل (أ ∪ ب) = ...

(أ) ٠,٨ (ب) ٠,٣ (جـ) ٠,٩ (د) ١

(١٦) إذا كان : ${}^{ن}ق_{3}$ = ١٢٠ فإن : ${}^{ن}ق_{ن-8}$ = ...

(أ) ٩٠ (ب) ٦٠ (جـ) ٣٠ (د) ٤٥

(١٧) متتابعة هندسية أساسها = $\frac{1}{2}$ وحدها الأول = ٦٤ فإن حدها السابع = ...

(أ) ١ (ب) ٣٢ (جـ) ١٦ (د) ٨

(١٨) $\int$ (٤ س^{3} − ٧) dس = ... + ث

(أ) ٤ س^{4} (ب) س^{4} − ٧ س (جـ) س^{3} − ٧ س (د) ١٢ س^{2}

(١٩) إذا ألقى حجر نرد منتظم مرة واحدة فإن احتمال ظهور عدد زوجي أكبر من ٤ = ...

(أ) $\frac{2}{3}$ (ب) $\frac{1}{6}$ (جـ) ١ (د) صفر

(٢٠) إذا كان : $^{10}ق_ر = ^{10}ق_٦$ فإن : ر = ...

(أ) ٦ (ب) ٩ (جـ) ٨ (د) ٩ ، ٦

(٢١) إذا كان : ٣ ، س ، ٩ فى تتابع هندسى فإن : س = ...

(أ) ± ٦ (ب) $٣\sqrt{٣}$ (جـ) $\pm ٣\sqrt{٣}$ (د) $-\sqrt{٣}$

(٢٢) $\int (٢س + ٣)^٧ \, ءس = ...+ ث$

(أ) $\frac{١}{١٦} (٢س + ٣)^٨$ (ب) $\frac{١}{٢} (٢س + ٣)^٨$

(جـ) $(٢س + ٣)^٦$ (د) $(٢س)^٧$

(٢٣) عند سحب بطاقة من ١٠ بطاقات مرقمة من ١ إلى ١٠ فإن احتمال ظهور العدد ١٢ = ...

(أ) صفر (ب) ∅ (جـ) ١ (د) ٠,٥

(٢٤) عدد طرق اختيار ٤ عناصر من ١٠ دون مراعاة الترتيب هو ....

(أ) $^{10}ل_٤$ (ب) $(١٠)^٤$ (جـ) $^{10}ق_٤$ (د) $\underline{|٤}$

(٢٥) مجموعة المتتابعة :(٢٥ ، ٥ ، ١ ، ...) إلى ∞ يساوى ....

(أ) ٢٢ (ب) $\frac{٢١}{٤}$ (جـ) $\frac{٨١}{٤}$ (د) $\frac{١٢٥}{٤}$

(٢٦) إذا كان : ل (أ) = ٠,٧ ، ل (أ ∩ ب) = ٠,٥ فإن : ل (أ − ب) = ...

(أ) ٠,٣ (ب) ٠,٢ (جـ) ١ (د) ٠,٧

(٢٧) إذا كان : ل (أَ) = ل (أ) فإن : ل (أ) = ...

(أ) ٠,٣ (ب) ٠,٥ (جـ) ٠,٧ (د) ١

ثانيا الأسئلة المقالية

أجب عن السؤالين الآتيين :

(١) أوجد المتتابعة الحسابية التى حدها الثالث ١١ وحدها السادس ٢٠

(٢) أوجد معادلة المماس للمنحنى : $ص = ٥ س^٢ + ٢ س$ عند النقطة (٠ ، ٧)

٦ محافظة المنوفية

إدارة منوف

اختبار تفاعلى ⑥

أولاً أسئلة الاختيار من متعدد

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

① الحد النونى للمتتابعة : (١ ، ٤ ، ٩ ، ١٦ ، ...) هو ....
حيث $ن$ عدد صحيح موجب.

(أ) ٢ $ن$ (ب) ٤ $ن$ (جـ) $٢^{ن}$ (د) $ن^{٢}$

② عدد حدود المتتابعة : (٢ ، ٨ ، ١٤ ، ... ، ٦٨) يساوى .... حدًا.

(أ) ٦ (ب) ٨ (جـ) ١٢ (د) ١٦

③ مجموع الوسطين الحسابيين الأول والأخير بين العددين ٧ ، ٣١ يساوى ....

(أ) ١٣ (ب) ١٩ (جـ) ٢٤ (د) ٣٨

④ مجموع حدود المتسلسلة الحسابية : ٨٩ + ٨٥ + ٨١ + ... + ٣٣ = ...

(أ) ٨٩٥ (ب) ٩٠٠ (جـ) ٩١٠ (د) ٩١٥

⑤ رتبة الحد الذى قيمته $\frac{١}{٢٤٣}$ من المتتابعة الهندسية (٨١ ، ٢٧ ، ٩ ، ...) تساوى ....

(أ) ٥ (ب) ٧ (جـ) ٩ (د) ١٠

⑥ إذا كان : (٥٤ ، س ، ص ، ٢) متتابعة هندسية فإن : $\frac{ص}{س}$ = ...

(أ) $\frac{١}{٣}$ (ب) ٣ (جـ) ٩ (د) ٢٧

⑦ مجموع حدود المتتابعة الهندسية : (٨١ ، ٢٧ ، ٩ ، ...) يساوى ....

(أ) $\frac{٢٤٣}{٤}$ (ب) $\frac{٢٤٣}{٢}$ (جـ) ١١٧ (د) ١١٨

⑧ العدد $^{ن}ل_{٢}$ يمكن أن يساوى ....

(أ) ١٥ (ب) ١٦ (جـ) ١٧ (د) ٢٠

⑨ إذا كان : ٨ × ٧ × ٦ = $^{س}ل_{ص}$ فإن : س + ص يمكن أن يساوى ....

(أ) ١١ (ب) ١٣ (جـ) ١٨ (د) ٣٥

⑩ إذا كان : $^{ن}ل_{٥}$ = $^{ن}ل_{٤}$ فإن : $ن$ = ...

(أ) ٤ (ب) ٥ (جـ) ٩ (د) ٢٠

(١١) إذا كان : $ق_{ن-٢} = ٣٦$ فإن : ن = ...

(أ) ٦ (ب) ٩ (جـ) ١٢ (د) ٢٤

(١٢) إذا كان : $^{ن}ل_{٢} = ٢٤ \; ^{ن}ق_{ر}$ فإن : ن = ...

(أ) ١ (ب) ٣ (جـ) ٤ (د) ٦

(١٣) إذا كان : $ق_{٢} = ق_{٣}$ فإن : $ق_{٤}$ = ...

(أ) ١ (ب) ٥ (جـ) ١٢٠ (د) ١٦٠

(١٤) معدل تغير الدالة : د (س) = $س^٢ + ٥ س - ٢$ عند س = -١ يساوى ....

(أ) ١ (ب) ٢ (جـ) ٣ (د) ٤

(١٥) إذا كانت : دَ (٢) = ٥ ، د (س) = $س^٢ + م س + ٥$ فإن : م = ...

(أ) ١ (ب) ٢ (جـ) ٥ (د) ١٠

(١٦) معادلة المماس لمنحنى الدالة : د (س) = $س^٢ + ٣$ عند س = ١ هى ....

(أ) ص = ٢ س (ب) ص - ٢ س = ٥

(جـ) س + ص = ٢ (د) ٢ س - ص + ٢ = ٠

(١٧) $\int$ (س + ٢) ءس = ... + ث

(أ) $٢ س^٢ + ٢ س$ (ب) $س^٢ + ٢ س$ (جـ) $\frac{١}{٢} س^٢ + ٢ س$ (د) $(س + ٢)^٢$

(١٨) $\int$ (٥) ءس = ... + ث

(أ) ٥ (ب) ١٠ (جـ) ٥ س (د) -٥ س

(١٩) إذا كان : د (س) = $أ^٢$ حيث أ ثابت فإن : دَ (س) = ...

(أ) صفر (ب) ٢ أ (جـ) ٢ (د) $أ^٢$

(٢٠) فى تجربة إلقاء حجر نرد مرتين متتاليتين فإن عدد عناصر فضاء العينة = ...

(أ) ١٢ (ب) ٨١ (جـ) ٣٦ (د) ٢١٦

(٢١) إذا كان : أ ، ب حدثين من فضاء العينة لتجربة عشوائية فإن حدث وقوع ب فقط هو ....

(أ) ب (ب) أ ⋂ ب (جـ) أ - ب (د) ب - أ

(٢٢) احتمال الحدث المؤكد = ...

(أ) صفر (ب) ١ (جـ) ف (د) $\emptyset$

(٢٣) إذا كان : أ ، ب حدثين من فضاء العينة لتجربة عشوائية وكان :

أ $\supset$ ب ، ل (أ $\cap$ ب) = $\frac{٢}{٥}$ ، ل (أ $\cup$ ب) = $\frac{٤}{٥}$ فإن : ل (أ) = ...

(أ) $\frac{١}{٥}$ (ب) $\frac{٢}{٥}$ (جـ) $\frac{٣}{٥}$ (د) $\frac{٤}{٥}$

(٢٤) ألقيت قطعة نقود مرتين متتاليتين فإن احتمال ظهور صورة واحدة على الأقل = ...

(أ) $\frac{١}{٢}$ (ب) $\frac{١}{٤}$ (جـ) $\frac{٣}{٤}$ (د) $\frac{٢}{٣}$

(٢٥) كيس يحتوى على ٢٥ كرة منها ٤ كرات صفراء ، ٧ كرات حمراء ، وباقى الكرات سوداء اللون فإذا سحبت كرة عشوائيًا فإن احتمال أن تكون الكرة المسحوبة سوداء أو صفراء = ...

(أ) $\frac{٤}{٢٥}$ (ب) $\frac{٧}{٢٥}$ (جـ) $\frac{١٨}{٢٥}$ (د) $\frac{٢٤}{٢٥}$

(٢٦) إذا كان : أ ، ب حدثين من فضاء العينة لتجربة عشوائية وكان :

ل (أ') = ل (أ) ، ل (أ $\cap$ ب) = $\frac{١}{٣}$ فإن : ل (أ − ب) = ...

(أ) $\frac{١}{٢}$ (ب) $\frac{٢}{٣}$ (جـ) $\frac{١}{٦}$ (د) $\frac{٥}{٦}$

(٢٧) إذا كان احتمال نجاح طالب فى التاريخ هو ٠,٤ ، احتمال نجاحه فى اللغة العربية هو ٠,٤٥ واحتمال نجاحه فى التاريخ واللغة العربية هو ٠,١٨ فما هو احتمال نجاحه فى التاريخ فقط يساوى ....

(أ) ٠,٢٢ (ب) ٠,٣٣ (جـ) ٠,٦٧ (د) ٠,٨٢

ثانيا الأسئلة المقالية

أجب عن السؤالين الآتيين :

(١) أوجد العددين اللذين وسطهما الحسابى = ٥ ووسطهما الهندسى = ٣

---

(٢) أوجد النقط الواقعة على المنحنى : ص = $س^٢$ − ٢ س + ٣ والتى عندها المماس يوازى محور السينات.

٧ محافظة الغربية



أولاً أسئلة الاختيار من متعدد

اختبار تفاعلي ⑦

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

① المتتابعة : (−١ ، ٤ ، −٩ ، ١٦ ، ...) متتابعة ....

(أ) تزايدية. (ب) تناقصية. (جـ) ثابتة. (د) تذبذبية.

② إذا كان : $^{ن}ق_{٢} = ١٢٠$ فإن : $^{ن}ل_{٢} =$ ....

(أ) ٧٢ (ب) ٩٠ (جـ) ٨٠ (د) ٦٠

③ إذا كان : د (س) = $س^{٢}$ + م س + ٣ ، دَ (٢) = ٥ فإن : م = ...

(أ) ١ (ب) ٢ (جـ) ٥ (د) ١٠

④ إذا كان : $(ح_{ن})$ متتابعة هندسية فيها $ح_{١} = ٦$ ، $ح_{∞} = ٤$ فإن أساسها = ...

(أ) $\frac{-١}{٢}$ (ب) $\frac{١}{٢}$ (جـ) $\frac{٣}{٢}$ (د) $\frac{-٣}{٢}$

⑤ في تجربة إلقاء حجر نرد ٣ مرات متتالية فإن عدد عناصر فضاء العينة = ...

(أ) ٢٧ (ب) ٨١ (جـ) ٣٦ (د) ٢١٦

⑥ متوسط التغير للدالة : د (س) = $س^{٢}$ عندما تتغير س من ٣ إلى ٣٫١ = ...

(أ) ٠٫٦١ (ب) ٦٫١ (جـ) ٩ (د) ٩٫٦١

⑦ إذا كان : أ ∩ ب = ∅ ، ل (أ) = ٠٫٧ ، ل (ب) = ٠٫٤ فإن : ل (أ ∪ ب) = ...

(أ) ٠٫٨ (ب) ٠٫٣ (جـ) ١٫١ (د) ٠٫٩

⑧ إذا كانت : $\sum_{ر=١}^{٢٠} ك ر = ١٠٥$ فإن : ك = ...

(أ) ١ (ب) ٢ (جـ) $\frac{١}{٢}$ (د) ٥

⑨ إذا كانت : $^{١٠}ق_{٢ر} = {}^{١٠}ق_{ر+١}$ فإن : ر = ...

(أ) ١ ، ٣ (ب) ٣ (جـ) ١ (د) ٣ ، ٢ ، ١

(١٠) $\int$ (س − ٢) (س^{٢} + ٢ س + ٤) ء س = ... + ث

(أ) $\frac{١}{٤}$ س^{٤} − ٤ س^{٣} − ٨ س　　(ب) $\frac{١}{٣}$ س^{٣} + س^{٢} + ٤ س

(جـ) $\frac{١}{٤}$ س^{٤} − ٨ س　　(د) س^{٣} − ٨

(١١) إذا كان : أ ، ب حدثين من فضاء عينة لتجربة عشوائية فإن حدث وقوع ب فقط = ...

(أ) ب　　(ب) أ ∩ ب　　(جـ) أ − ب　　(د) ب − أ

(١٢) عدد حدود المتتابعة : (٧ ، ١١ ، ١٥ ، ... ، ٢٧١) يساوى .... حدًا.

(أ) ٣٤　　(ب) ٤٣　　(جـ) ٦٧　　(د) ٧٦

(١٣) إذا كان : أ ، ب حدثين من فضاء النواتج لتجربة عشوائية وكان :

ب ⊂ أ ، ل (أ) = ٢ ل (ب) = ٠,٦ ،　فإن : ل (أ − ب) = ...

(أ) ٠,٣　　(ب) ٠,٥　　(جـ) ٠,٦　　(د) ٠,٨

(١٤) إذا كانت : ف = {أ ، ب ، حـ} فضاء عينة لتجربة عشوائية وكان : ل (أ) = $\frac{١}{٣}$

وكان : ل (ب) = $\frac{٢}{٥}$　فإن : ل (حـ) = ...

(أ) $\frac{١}{١٥}$　　(ب) $\frac{٢}{١٥}$　　(جـ) $\frac{٤}{١٥}$　　(د) $\frac{١١}{١٥}$

(١٥) إذا كان : $^{ن}ل_{ر}$ = ٦٠　فإن : $\underline{|ر}$ = ...

(أ) ٥　　(ب) ٣　　(جـ) ٦　　(د) ١٢

(١٦) إذا كانت : د (س) = $\frac{١}{٣}$ س^{٢١} − $\frac{١}{٢}$ س^{١٠} + س^{٦}　فإن : د (١) = ...

(أ) ٦　　(ب) ٨　　(جـ) ١٦　　(د) ١٨

(١٧) ألقيت قطعة نقود منتظمة ثلاث مرات متتالية فإن احتمال ظهور صورة واحدة على الأكثر = ...

(أ) $\frac{١}{٤}$　　(ب) $\frac{٢}{٣}$　　(جـ) $\frac{١}{٣}$　　(د) $\frac{١}{٢}$

(١٨) عدد أقطار الشكل الثمانى = ... قطرًا.

(أ) ٨　　(ب) ٢٠　　(جـ) ٣٢　　(د) ١٨

(١٩) إذا كانت : ص = (ع + ١)^{٣} ، ع = س^{٥} − ١　فإن : $\frac{ءص}{ءس}$ = ...

(أ) س^{١٥}　　(ب) س^{٨}　　(جـ) ١٥ س^{١٤}　　(د) ٨ س^{٧}

(٢٠) إذا كان : ل (أ) = ٠,٣ ، ل (ب) = ٠,٥ ، ل (أ ∩ ب) = ٠,١
فإن : ل (أ َ ∩ ب َ) = ...

(أ) ٠,٧ (ب) ٠,٤ (جـ) ٠,٣ (د) ٠,١

(٢١) إذا كان : ${}^{ن}ل_{٢} = ١٢٠$ فإن : |ن – ٦ = ...

(أ) ١ (ب) صفر (جـ) ٦ (د) ٣

(٢٢) مجموع المتتابعة الهندسية : (٣ ، –٦ ، ١٢ ، ... ، ٧٦٨) يساوى ....

(أ) ٤٩٨ (ب) ٥١٣ (جـ) –٩٨ (د) –٣١٤

(٢٣) عددان موجبان وسطهما الحسابى ٧,٥ ووسطهما الهندسى ٦ فإن الفرق بينهما يساوى ....

(أ) ٣ (ب) ٥ (جـ) ٧ (د) ٩

(٢٤) قياس الزاوية الموجبة التى يصنعها المماس للمنحنى : ص = س^{٢} – ١ مع الاتجاه الموجب لمحور السينات عند س = $\frac{١}{٢}$ هو ....

(أ) $\frac{\pi}{٤}$ (ب) $\frac{\pi}{٣}$ (جـ) $\frac{\pi}{٦}$ (د) π

(٢٥) متتابعة حسابية فيها ح$_{٢}$ = ٥ وحدها قبل الأخير = ٣٥ ، مجموعها = ٢٦٠
فإن عدد حدودها = ... حدًا.

(أ) ١١ (ب) ١٣ (جـ) ١٥ (د) ٢٦

(٢٦) اشترك ٧ أشخاص فى مسابقة للشطرنج بحيث تجرى مباراة واحدة بين كل شخصين فإن عدد مباريات المسابقة = ...

(أ) ٤٢ مباراة (ب) ٢٨ مباراة (جـ) ١٨ مباراة (د) ٢١ مباراة

(٢٧) إذا اختير حرفًا عشوائيًا من حروف المجموعة {أ ، ب ، حـ ، ء ، هـ ، و ، ر ، ك ، م ، ع} فإن احتمال أن يكون هذا الحرف هو أحد حروف كلمة مبروك = ...

(أ) $\frac{١}{٤}$ (ب) $\frac{١}{٣}$ (جـ) $\frac{١}{٢}$ (د) $\frac{٢}{٣}$

ثانيًا الأسئلة المقالية

أجب عن السؤالين الآتيين :

١ متتابعة هندسية فيها : ح$_{٧}$ = ٨ ح$_{٤}$ ، ح$_{٣}$ + ح$_{٥}$ = ١٢٠ أوجد المتتابعة.

٢ أوجد معادلة المماس للمنحنى : ص = $\frac{٦}{٢س + ١}$ عند س = ١

٨ محافظة الدقهلية

إدارة ميت غمر
توجيه الرياضيات

اختبار تفاعلى ⑧

أولا أسئلة الاختيار من متعدد

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

① $^{ن}ل_{٢}$ يمكن أن تساوى ....

(أ) ١٥ (ب) ١٦ (جـ) ١٧ (د) ٢٠

② سحب بطاقة من مجموعة بطاقات مرقمة دون معرفة الأرقام المكتوبة على البطاقات يعبر عن ....

(أ) تجربة عشوائية. (ب) ليست تجربة عشوائية.

(جـ) حدث مستحيل. (د) حدث مؤكد.

③ فى المتتابعة $(ح_{ن})$ المعرفة كالآتى : $ح_{١} = ٣$ ، $ح_{ن+١} = ح_{ن} - ١$ حيث $ن \geq ١$ فإن الحدث الثالث = ...

(أ) ٢ (ب) ١ (جـ) ٤ (د) ٣

④ دائرة طول نصف قطرها نق فإن متوسط التغير فى محيط الدائرة عندما تتغير نق من $نق_{١}$ إلى $نق_{٢}$ هو ....

(أ) $٢ \pi نق_{١}$ (ب) $٢ \pi (نق_{٢} - نق_{١})$

(جـ) $\pi نق_{١}$ (د) ٢π

⑤ كيس يحتوى على ٢٥ كرة منها ٤ كرات صفراء ، ٧ كرات حمراء ، والباقى أسود اللون ، فإذا سحبت كرة عشوائيًا فإن احتمال أن تكون الكرة المسحوبة سوداء أو صفراء = ...

(أ) صفر (ب) $\frac{٣٣}{٥٠}$ (جـ) $\frac{١٨}{٢٥}$ (د) $\frac{١٤}{٢٥}$

⑥ إذا كان : ٣ ، س ، ٩ فى تتابع هندسى فإن : س = ...

(أ) ± ٦ (ب) $\pm ٣\sqrt{٣}$ (جـ) $-\sqrt{٣}$ (د) $٣\sqrt{٣}$

⑦ فى تجربة إلقاء حجر نرد ٣ مرات متتالية فإن عدد عناصر فضاء العينة = ...

(أ) ٢١٦ (ب) ٨١ (جـ) ٣٦ (د) ٢٧

⑧ عدد طرق جلوس ٤ طلاب على أربعة مقاعد فى صف يساوى ....

(أ) ١ (ب) ٤ + ٤ (جـ) ٤ × ٣ × ٢ × ١ (د) ٤ × ٤

(٩) إذا كان : ص = $(س^٢ - ٢)^٥$ فإن : $\frac{ءص}{ءس}$ = ...

(أ) ٥ $(س^٢ - ٢)^٤$ (ب) ١٠ س $(س^٢ - ٢)^٤$

(جـ) ٢٢ $س^٥$ (د) ١٠ س

(١٠) (ن + ٢) (ن + ١) |ن = |... = ...

(أ) $ن^٢$ (ب) ن + ١ (جـ) ن + ٢ (د) ن(ن + ٢)

(١١) رتبة الحد الذى قيمته $\frac{١}{٢٤٣}$ من المتتابعة الهندسية (٨١ ، ٢٧ ، ٩ ، ...) تساوى ....

(أ) ٥ (ب) ٧ (جـ) ٩ (د) ١٠

(١٢) يحتوى صندوق على ٩ بطاقات متماثلة ومرقمة من ١ إلى ٩ اختيرت بطاقة عشوائيًا فإن احتمال أن تحمل البطاقة المسحوبة رقمًا فرديًا هو ....

(أ) $\frac{١}{٣}$ (ب) $\frac{٧}{٩}$ (جـ) $\frac{٥}{٩}$ (د) $\frac{١}{٢}$

(١٣) مجموع حدود المتسلسلة الحسابية ٢ + ٥ + ٨ + ... + ٦٢ = ...

(أ) ٦٦٤ (ب) ٦٧٠ (جـ) ٦٦٠ (د) ٦٧٢

(١٤) إذا كان : أ ، ب حدثين متنافيين فإن : أ - ب = ...

(أ) أ (ب) ب (جـ) ب - أ (د) أَ

(١٥) |ن - ١ = ١٢٠ ، |ن - ر = ٦ فإن : $^{ن}ل_{ر}$ = ...

(أ) ٧٢٠ (ب) ٦ × ٥ × ٤ (جـ) ٣ × ٤ × ٥ (د) ٦ × ٥

(١٦) المتتابعة (١٥ ، ٥ ، $\frac{٥}{٣}$ ، ...) هى متتابعة ....

(أ) هندسية وأساسها $٣^{-١}$ (ب) هندسية وأساسها ٣

(جـ) حسابية وأساسها ٥ (د) حسابية وأساسها -٥

(١٧) $\int$ س (س + ٣) ءس = ... + ث

(أ) $\frac{١}{٢}$ $(س + ٣)^٢$ (ب) $\frac{١}{٣}$ $س^٣$ + $\frac{٣}{٢}$ $س^٢$

(جـ) $س^٢$ + ٣ س (د) $س^٣$ + ٣ س

(١٨) إذا كان : $^{٢٧}ق_{٢ر + ١}$ = $^{٢٧}ق_{٥ر - ٨}$ فإن : $^{٥}ق_{ر}$ = ...

(أ) ١٥ (ب) ١٣ (جـ) ١٢ (د) ١٠

(١٩) إذا كان : د (س) = ٥ ر (س) + ٢٠ فإن : رَ (س) = ...

(أ) دَ (س) (ب) دَ (س) - ٢٠ (جـ) ٥ دَ (س) (د) $\frac{١}{٥}$ دَ (س)

(٢٠) مجموع حدود المتتابعة الهندسية : (٨١ ، ٢٧ ، ٩ ، ...) يساوى ....

(أ) $\frac{٢٤٣}{٤}$ (ب) ١١٧ (جـ) $\frac{٢٤٣}{٢}$ (د) ١١٨

(٢١) احتمال الحدث المؤكد + احتمال الحدث المستحيل = ...

(أ) صفر (ب) ١ (جـ) ف (د) $\varnothing \cup$ ف

(٢٢) إذا كان : أ ، ب حدثين من فضاء عينة لتجربة عشوائية ما وكان :

أ $\supset$ ب ، ل (أ $\cap$ ب) = $\frac{٢}{٥}$ ، ل (أ $\cup$ ب) = $\frac{٤}{٥}$ فإن : ل (أ) = ...

(أ) $\frac{٢}{٥}$ (ب) $\frac{١}{٥}$ (جـ) $\frac{٣}{٥}$ (د) $\frac{٤}{٥}$

(٢٣) ص = $\frac{ع}{ع - ١}$ ، ع = $\frac{س}{س + ١}$ فإن : ....

(أ) $\frac{ءص}{ءس} = ١$ (ب) $\frac{ءص}{ءس} + ١ =$ صفر

(جـ) $\frac{ءص}{ءس} = \frac{ع س}{(ع - ١)(س + ١)}$ (د) $\frac{ءص}{ءع} = \frac{ءع}{ءس} \times \frac{ءس}{ءص}$

(٢٤) المتتابعة الحسابية من بين المتتابعات الآتية هى ....

(أ) $(ح_ن) = \frac{ن + ١}{ن}$ (ب) $(ح_ن) = ((ن + ١)^٢)$

(جـ) $(ح_ن) = (\frac{٣}{ن}(ن + ٢))$ (د) $(ح_ن) = (\frac{ن^٣ - ١}{ن^٢ + ن + ١})$

(٢٥) إذا كان : س ، ص حدثين من فضاء عينة ف وكان : ل (س) = ٠,٣٥ ، ل (ص) = ٠,٤٨

، ل (س $\cup$ ص) = ٠,٦ فإن : ل (س $\cap$ ص) = ...

(أ) ٠,٢٣ (ب) ٠,١٣ (جـ) ٠,٤ (د) ٠,٧٧

(٢٦) إذا كان : $^٨ل_{ر + ١} = ٣٣٦$ فإن : $^٢ق_٤ =$ ....

(أ) ١ (ب) ١٦ (جـ) ٤ (د) ٢

(٢٧) $\int \sqrt{٤ س + ١}\, ءس =$ .... + ث

(أ) $\frac{١}{٦}(٤ س + ١)^{\frac{٣}{٢}}$ (ب) $\frac{١}{٣}(٤ س + ١)^{\frac{١}{٢}}$

(جـ) $\frac{١}{٢}(٤ س + ١)^{\frac{٣}{٢}}$ (د) $\frac{٢}{٣}(٤ س + ١)^{\frac{٣}{٢}}$

ثانيًا الأسئلة المقالية

أجب عن السؤالين الآتيين :

١ أوجد أكبر مجموع للمتتابعة الحسابية : (٤٥ ، ٤١ ، ٣٧ ، ...)

٢ أوجد معادلة المماس للمنحنى :

ص = ٥ $س^٣$ + ٣ $س^٢$ + ٤ عند النقطة (-١ ، ٢) الواقعة عليه.



٩ محافظة بورسعيد — إدارة شمال

أولًا أسئلة الاختيار من متعدد

اختبار تفاعلى ⑨

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

① الوسط الهندسى الموجب بين العددين : ٣ ، ٢٧ هو ....

(أ) ٣ (ب) ٩ (جـ) ١٨ (د) ٢٧

② إذا كان : ص = (٢ س + ٥) (٣ س + ٥) فإن : صَ = ...

(أ) ٦ (ب) ٦ س + ١٠ (جـ) ١٢ س (د) ١٢ س + ٢٥

③ إذا ألقى حجر نرد منتظم مرة واحدة فإن احتمال الحصول على عدد فردى أقل من ٥ هو ....

(أ) $\frac{٢}{٥}$ (ب) $\frac{١}{٢}$ (جـ) $\frac{١}{٣}$ (د) $\frac{١}{٦}$

④ إذا كان : $^{ن}ق_{ر} = {}^{ن}ل_{ر}$ فإن : ر = ...

(أ) صفر (ب) ١ (جـ) صفر أ، ١ (د) ٢ أ، صفر

⑤ رتبة الحد الذى قيمته صفر فى المتتابعة الحسابية : (٢٢ ، ٢٠ ، ١٨ ، ...) تساوى ....

(أ) ٨ (ب) ١٠ (جـ) ١٢ (د) ١٤

⑥ ∫ (س + ٢) (س − ٢) ءس = ... + ث

(أ) س + ٤ (ب) $\frac{١}{٣}$ س^{٣} − ٤ س

(جـ) س^{٣} − ٤ س (د) (س^{٢} − ٤)^{٢}

⑦ مجموع المتتابعة الهندسية : (٣ ، ٦ ، ١٢ ، ... ، ٣٨٤) يساوى ....

(أ) ٧٥٦ (ب) ٥٦٧ (جـ) ٦٥٧ (د) ٧٦٥

⑧ إذا كان : أ ، ب حدثين من فضاء عينة لتجربة عشوائية وكان : أ ⊂ ب
وكان : ل (أ) = ٠,٦ ، ل (ب) = ٠,٩ فإن : ل (ب − أ) = ...

(أ) ٠,٦ (ب) ٠,٣ (جـ) ٠,٤ (د) ٠,٢

⑨ إذا كانت : ص = $(ع + ١)^٣$ ، ع = $س^٥ - ٣$ فإن : $\frac{ءص}{ءس}$ = ... عند س = ١

(أ) ١٥ (ب) -١٥ (جـ) ٦٠ (د) -٦٠

⑩ عدد طرق اختيار كتاب ومجلة من مجموعة مكونة من ٦ كتب و٧ مجلات يساوى ....

(أ) ٤٢ (ب) ١٣ (جـ) ١ (د) ٢

⑪ متوسط تغير الدالة د حيث : د (س) = $س^٢$ عندما تتغير س من ٣ إلى ٣,١ يساوى ....

(أ) ٠,٦ (ب) ٦,١ (جـ) ٩ (د) ٠,٦١

⑫ فى تجربة إلقاء قطعة نقود مرة واحدة فإن احتمال ظهور صورة أو كتابة يساوى ....

(أ) $\frac{١}{٣}$ (ب) $\frac{١}{٢}$ (جـ) ١ (د) صفر

⑬ إذا كان : $\underline{|ن - ٢}$ = ٢٤ فإن : $^٨ق_ن$ = ...

(أ) ٢٤ (ب) ٢٦ (جـ) ٢٨ (د) ٣٢

⑭ إذا كان : أ ∩ ب = ∅ ، ل (أ) = ٠,٧ ، ل (ب) = ٠,٤ فإن : ل (أ ∪ ب) = ...

(أ) ١,١ (ب) ٠,٣ (جـ) ٠,٦ (د) ٠,٩

⑮ إذا كان : ٢ أ + ١ ، ٥ أ - ١ ، ٦ أ + ٣ ثلاثة حدود متتالية من متتابعة حسابية فإن : أ = ...

(أ) ١ (ب) ٢ (جـ) ٣ (د) ٥

⑯ متتابعة هندسية فيها $ح_٢$ = ٢٤٠ ، $ح_٥$ = ٣٠ فإن مجموع عدد غير منته من حدودها = ...

(أ) ١٩٢٠ (ب) ٩٦٠ (جـ) ٤٨٠ (د) ٢٤٠

⑰ $\int (٢س + ١٢)^٥ \, ءس$ = ...

(أ) $(٢س + ١٢)^٦$ + ث (ب) $(٢س + ١٢)^٦$

(جـ) $\frac{١}{٢}(٢س + ١٢)^٦$ + ث (د) $\frac{١}{١٢}(٢س + ١٢)^٦$ + ث

⑱ من مجموعة الحروف {أ ، ب ، حـ ، ء ، هـ ، و} فإن عدد طرق اختيار حرفين مختلفين مع مراعاة الترتيب يساوى ....

(أ) $^٦ل_٢$ (ب) $^٦ق_٢$ (جـ) $(٦)^٢$ (د) $(٢)^٦$

(١٩) إذا كان : ل (أ) = $\frac{١}{٤}$ ، ل (ب) = $\frac{٢}{٣}$ ، ل (أ ∩ ب) = $\frac{١}{٢}$ فإن : ل (أ ∪ ب) = ...

(أ) $\frac{١١}{١٢}$ (ب) $\frac{٣}{٤}$ (جـ) $\frac{٢}{٣}$ (د) $\frac{٧}{١٢}$

(٢٠) إذا كانت : (٢٩ ، س ، ... ، ٣س ، ٩٥) متتابعة حسابية فإن : س = ...

(أ) ٢١ (ب) ٣١ (جـ) ٩٥ (د) ١٢٤

(٢١) إذا كانت : ص = $\frac{س^٢ + ٦}{س^٣ + ٥}$ فإن : ص =.............. عندما س = ١

(أ) $\frac{-١}{٤}$ (ب) $\frac{٦}{٥}$ (جـ) $\frac{٧}{٦}$ (د) $\frac{١١}{١٢}$

(٢٢) مجموعة حل المعادلة : $^{١١}ق_{ر} = {}^{١١}ق_{٢ر + ٢}$ هى ....

(أ) ٣ (ب) ٣- (جـ) ± ٣ (د) ٦

(٢٣) إذا كان : $^{ن}ل_{ر} = ٦٠$ ، $^{ن}ق_{ر} = ١٠$ فإن : ن + ر = ...

(أ) ٣ (ب) ٥ (جـ) ٨ (د) ١٣

(٢٤) الحد العاشر من المتتابعة الحسابية : (١٣ ، ١٦ ، ١٩ ، ... ، ١٠٠) يساوى ....

(أ) ٢٧ (ب) ٣٢ (جـ) ٣٥ (د) ٤٠

(٢٥) إذا كان : ل (أ) = ٠,٤ ، ل (أ ∩ ب) = ٠,١ فإن : ل (أ ∪ ب) = ...

(أ) ٠,٣ (ب) ٠,٥ (جـ) ٠,٧ (د) ١

(٢٦) متتابعة حسابية تتكون من ١٥ حدًا ، حدها الأوسط ٢٣ فإن مجموع حدود هذه المتتابعة = ...

(أ) ٣٤٥ (ب) ٢٢٥ (جـ) ٤٥٠ (د) ٦٩٠

(٢٧) إذا كان : أ ، ب حدثين من فضاء عينة لتجربة عشوائية ما ، وكان احتمال حدث وقوع أحدهما على الأقل يساوى ٠,٦ ، واحتمال وقوع الحدثين معًا ٠,٢٥ فإن احتمال وقوع أحد الحدثين فقط يساوى ....

(أ) ٠,٢٥ (ب) ٠,٦ (جـ) ٠,٣٥ (د) ٠,٧٥

ثانيًا الأسئلة المقالية

أجب عن السؤالين الآتيين :

١ أوجد عدد الحدود اللازم أخذها من المتتابعة : (٢٥ ، ٢٣ ، ٢١ ، ...) ابتداء من الحد الأول ليكون مجموعها ١٢٠

---

٢ أوجد معادلة المماس لمنحنى الدالة : ص = ٢ $س^٣$ − ٤ $س^٢$ + ٣ عند النقطة (٢ ، ٣)



١٠ محافظة كفر الشيخ

إدارة بلطيم
توجيه الرياضيات



أولاً أسئلة الاختيار من متعدد

اختبار تفاعلى ⑩

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

① متوسط تغير الدالة د حيث : د (س) = $س^٢$ عندما تتغير س من ٣ إلى ٣,١ يساوى ....

(أ) ٠,٦ (ب) ٦,١ (جـ) ٩ (د) ٠,٦١

② عدد الأعداد المكونة من رقمين مختلفين مأخوذة من الأرقام {٣ ، ٤ ، ٠ ، ٧} ....

(أ) ٩ (ب) ١٢ (جـ) ٦ (د) ٨

③ إذا كان الوسط الهندسى للعددين : ٩ ، ص هو ١٥ فإن : ص = ...

(أ) ١٣٥ (ب) ٢٥ (جـ) ١٠ (د) ± ٢٥

④ فى المتسلسلة الحسابية : ٣٢ + ٢٨ + ٢٤ + ٢٠ + ... مجموع العشرة حدود الأولى منها يساوى ....

(أ) ٢٤٠ (ب) ١٠٠ (جـ) ١٤٠ (د) ١٤٤

⑤ إذا كان : ف = {أ ، ب ، حـ} فضاء عينة لتجربة عشوائية وكان :

ل (أ) = $\frac{١}{٢}$ ، ل (ب) = $\frac{١}{٣}$ فإن : ل (حـ) = ...

(أ) ١ (ب) $\frac{١}{٤}$ (جـ) $\frac{١}{٥}$ (د) $\frac{١}{٦}$

⑥ عند إلقاء حجر نرد منتظم مرتين متتاليتين فإن احتمال ظهور عددين متساويين هو ....

(أ) $\frac{١}{٦}$ (ب) $\frac{١}{٩}$ (جـ) $\frac{١}{٣٦}$ (د) $\frac{١}{٣}$

⑦ عدد طرق ترتيب ٦ أطفال فى دائرة يساوى ....

(أ) ٦ (ب) ٧٢٠ (جـ) ١٢٠ (د) ٥٠٤٠

⑧ الحد العام للمتتابعة : (٢ ، ٤ ، ٦ ، ٨ ، ...) هو ....

(أ) $ح_ن = ن + ١$ (ب) $ح_ن = ن^٢$ (جـ) $ح_ن = ٤ن$ (د) $ح_ن = ٢ن$

⑨ مجموع المتسلسلة : $\sum_{ر=١}^{٥} ٣ر$ = ...

(أ) ٢٥ (ب) ١٥ (جـ) ٣٠ (د) ٤٥

(١٠) إذا كان : أ ، ب حدثان متنافيان فإن : ل (أ ∩ ب) = ...

(أ) صفر (ب) $\frac{1}{2}$ (جـ) ∅ (د) ١

(١١) عند سحب بطاقة من ١٠ بطاقات متماثلة ومرقمة من ١١ إلى ٢٠ ، فإن احتمال ظهور عدد زوجي يقبل القسمة على ٣ على البطاقة المسحوبة هو ....

(أ) ٠,٣ (ب) ٠,٢ (جـ) ٠,٤ (د) ٠,١

(١٢) معدل تغير الدالة د حيث : د (س) = س^2 − ١ عند س = −٢ يساوى ....

(أ) ٤ (ب) −١ (جـ) −٤ (د) ١

(١٣) $\int \frac{س^2 - ٥ س + ٦}{س - ٢}$ ء س = ...

(أ) س − ٣ (ب) س^2 − ٣ س + ث

(جـ) $\frac{1}{2}$ س^2 − ٣ س + ث (د) س^2 + ٦ س + ث

(١٤) إذا كان : |٣ ن − ٧ = ١٢٠ فإن : ن ق ن−١ = ...

(أ) صفر (ب) ٤ (جـ) ١ (د) ٦

(١٥) فى المتتابعة الهندسية : (٣ ، ٦ ، ١٢ ، ...) قيمة الحد السابع = ...

(أ) ١٩٢ (ب) ١٦٢ (جـ) ٦٤ (د) ٩٦

(١٦) رتبة الحد الذى قيمته صفر فى المتتابعة الحسابية : (٢٢ ، ٢٠ ، ١٨ ، ...) تساوى ....

(أ) ٨ (ب) ١٢ (جـ) ١٠ (د) ١٤

(١٧) إذا كان : ن ق ٢ = ٨٤ فإن : ن = ...

(أ) ٨ (ب) ١٢ (جـ) ٩ (د) ٧

(١٨) ميل المماس للمنحنى : ص = ٣ س^2 + ٢ س + ١ عند س = ٢ يساوى ....

(أ) ٥ (ب) ٨ (جـ) ١٧ (د) ١٤

(١٩) ٥ل٢ = ...

(أ) ٥ (ب) ٣ (جـ) ١٥ (د) ٦٠

(٢٠) إذا كان : أ ، ب حدثين من فضاء العينة لتجربة عشوائية فإن احتمال وقوع أ فقط هو ....

(أ) ل (أ) (ب) ل (أ′ ∩ ب) (جـ) ل (أ − ب) (د) ل (ب − أ)

(٢١) أ ، ب حدثين من فضاء عينة لتجربة عشوائية وكان : ل (أ) = $\frac{٣}{٤}$ ، ل (ب) = $\frac{١}{٢}$

، ل (أ − ب) = $\frac{٥}{١٢}$ فإن احتمال وقوع أحد الحدثين على الأقل يساوى ....

(أ) $\frac{١}{١٢}$ (ب) $\frac{١١}{١٢}$ (جـ) $\frac{٧}{١٢}$ (د) $\frac{١}{٤}$

(٢٢) قياس الزاوية الموجبة التى يصنعها المماس للمنحنى : ص = س^{٢} − ١ عند س = $\frac{١}{٢}$

يساوى ....

(أ) ١٨٠° (ب) ٣٠° (جـ) ٤٥° (د) ٦٠°

(٢٣) إذا كانت : ص = (ع + ١)^{٣} ، ع = س^{٥} − ١ فإن : $\frac{ءص}{ءس}$ = ... عند س = ١

(أ) ٢٩ (ب) −١٥ (جـ) ١٤ (د) ١٥

(٢٤) عددان الوسط الهندسى لهما يساوى ٧ فإن حاصل ضربهم = ...

(أ) ٧ (ب) ٤٩ (جـ) ١٤ (د) −٤٩

(٢٥) بكم طريقة يمكن اختيار سبعة طلاب من بين ١٠ طلاب للذهاب إلى رحلة تاريخية ؟

(أ) ١٢٠ (ب) ١٢ (جـ) ٧٠ (د) ٨٤

(٢٦) فى تجربة إلقاء قطعة نقود منتظمة مرة واحدة فإن احتمال ظهور كتابة يساوى ....

(أ) $\frac{١}{٤}$ (ب) $\frac{١}{٢}$ (جـ) ١ (د) صفر

(٢٧) إذا سحبت كرة عشوائيًا من صندوق به ٣ كرات بيضاء ، ٥ كرات حمراء

، ٧ كرات خضراء ، فإن احتمال أن تكون الكرة المسحوبة بيضاء أو خضراء هو ....

(أ) $\frac{١}{٢}$ (ب) $\frac{١}{١٥}$ (جـ) $\frac{٢}{٣}$ (د) $\frac{٧}{١٥}$

ثانيًا الأسئلة المقالية

أجب عن السؤالين الآتيين :

١ متتابعة هندسية أساسها $\frac{١}{٢}$ وحدها الثالث ١٦ ، **أوجد المتتابعة ومجموع حدودها إلى ما لا نهاية.**

٢ **أوجد $\frac{ءص}{ءس}$ إذا كان :**

(١) ص = (٦ س^{٢} + ٣ س + ١)^{١٠} (٢) ص = $\sqrt{٢ س + ٣}$



١١ محافظة الفيوم

إدارة غرب الفيوم

أولاً أسئلة الاختيار من متعدد

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

① مجموع المتتابعة : (٣ ، ٦ ، ١٢ ، ... ، ٣٨٤) يساوى ....

(أ) ٧٥٦ (ب) ٥٦٧ (جـ) ٦٥٧ (د) ٧٦٥

② عند إلقاء حجر نرد مرتين فإن احتمال أن يكون مجموع العددين الظاهرين على الوجه العلوى عدد أولى = ...

(أ) $\frac{٧}{١٨}$ (ب) $\frac{٥}{١٢}$ (جـ) $\frac{٥}{١١}$ (د) $\frac{١}{٢}$

③ إذا كان : ص = $\frac{١}{س}$ فإن : صَ = ...

(أ) $\frac{-١}{س^٢}$ (ب) $\frac{١}{س^٢}$ (جـ) $\frac{١}{س}$ (د) $\frac{-١}{س}$

④ عددان موجبان الوسط الهندسى لهما = ٨ ، الوسط الحسابى لهما يزيد عن وسطهما الهندسى بمقدار ٢ فإن الفرق بين عددين = ...

(أ) ٤ (ب) ٦ (جـ) ١٢ (د) ١٦

⑤ إذا كان أ ، ب حدثين من فضاء تجربة عشوائية وكان : ب ⊂ أ وكان : ل (أ) = ٠,٩ ، ل (ب) = ٠,٦ فإن : ل (أ − ب) = ...

(أ) ٠,٦ (ب) ٠,٤ (جـ) ٠,٣ (د) ٠,٢

⑥ عدد طرق الإجابة عن أربعة أسئلة فقط فى امتحان يحتوى على ٦ أسئلة = ...

(أ) ٣٠ (ب) ٢٤ (جـ) ١٥ (د) ١٠

⑦ قيمة المتسلسلة $\sum_{ر=١}^{\infty} ٢٠ \times \left(\frac{١}{٢}\right)^{ر-١}$ = ...

(أ) ٢٠ (ب) ٤٠ (جـ) ٨٠ (د) ١٠٠

⑧ إذا كان : $\underline{|ن - ٥}$ = ١ فإن : ن ∋ ....

(أ) {٦} (ب) {٥} (جـ) {٦ ، ٥} (د) {١}

(٩) إذا أدخلت عدة أوساط حسابية بين ٨ ، ٦٢ وكان مجموع الوسطين الثانى والسادس يساوى ٤٠ فإن عدد الأوساط = ...

(أ) ١٣ (ب) ١٥ (جـ) ١٧ (د) ١٩

(١٠) معدل تغير الدالة د : د (س) = س^{٢} − ١ عند س = −٢ يساوى ....

(أ) ٤ (ب) ١ (جـ) −٤ (د) −١

(١١) إذا ألقى حجر نرد منتظم مرة واحدة فإن احتمال الحصول على عدد فردى أقل من ٥ هو ....

(أ) $\frac{٢}{٥}$ (ب) $\frac{١}{٢}$ (جـ) $\frac{١}{٣}$ (د) $\frac{١}{٦}$

(١٢) $\int$ (٢ س − ٥)^{٦} ء س = ... + ث

(أ) (س^{٢} − ٥ س)^{٦} (ب) $\frac{١}{١٤}$ (٢ س − ٥)^{٧}

(جـ) $\frac{١}{١٤}$ (س^{٢} − ٥ س)^{٧} (د) $\frac{١}{٢}$ (٢ س − ٥)^{٧}

(١٣) الحد العاشر من حدود المتتابعة (١ ، ١ ، ٢ ، ٣ ، ٥ ، ٨ ، ١٣ ، ...) هو ....

(أ) ٢٩ (ب) ٣٤ (جـ) ٥٥ (د) ٨٩

(١٤) إذا كان : أ ، ب حدثين متنافيين فإن : ل (أ ∩ بَ) = ...

(أ) ∅ (ب) صفر (جـ) $\frac{١}{٢}$ (د) ١

(١٥) عدد طرق ترتيب جلوس ٥ أشخاص حول مائدة على شكل دائرة هو ....

(أ) ١ (ب) ٢ (جـ) ٢٤ (د) ١٢٠

(١٦) متوسط التغير فى حجم مكعب عندما يتغير طول حرفه من ٥ سم إلى ٧ سم = ...

(أ) ١٠٩ (ب) ١٢٥ (جـ) ٢١٨ (د) ٣٤٣

(١٧) فى أى متتابعة حسابية : (ح$_{ن}$) يكون $\frac{ح_{١٣} + ح_{١٥}}{ح_{١٤}}$ = ...

(أ) ٢ (ب) ٣ (جـ) ٤ (د) ٥

(١٨) إذا كان : $^{ن}ل_{ر}$ = ٦٠ ، $^{ن}ق_{ر}$ = ١٠ فإن : ن + ر = ...

(أ) ٣ (ب) ٥ (جـ) ٨ (د) ١٣

(١٩) إذا كان : د (س) = (س^{٢} + ٣) (٢ س^{٣} − ٢) فإن : دَ (١) = ...

(أ) ١٢ (ب) ٢٤ (جـ) ٣٦ (د) ٤٨

(٢٠) رتبة الحد الذى قيمته صفر فى المتتابعة الحسابية : (٢٢ ، ٢٠ ، ١٨ ، ...)

(أ) ٨ (ب) ١٠ (جـ) ١٢ (د) ١٤

(٢١) إذا كان : أ ، ب حدثين من فضاء عينة من تجربة عشوائية : ل (أ) = ٠,٧٥

، ل (بَ) = ٠,٦ ، ل (أ ∪ ب) = ٠,٨٥ فإن : ل (أ ∩ ب) = ...

(أ) ٠,٥ (ب) ٠,٤ (جـ) ٠,٣ (د) ٠,٢

(٢٢) قياس الزاوية الموجبة التى يصنعها المماس للمنحنى : ص = س^{٢} − ١ مع الاتجاه الموجب لمحور السينات عند س = $\frac{١}{٢}$ هى ....°

(أ) ٣٠ (ب) ٤٥ (جـ) ٦٠ (د) ١٨٠

(٢٣) إذا سحبت كرة عشوائيًا من صندوق به ٣ كرات بيضاء ، ٥ حمراء ، ٧ خضراء فإن احتمال أن تكون الكرة المسحوبة خضراء هو ....

(أ) $\frac{١}{٥}$ (ب) $\frac{٢}{٣}$ (جـ) $\frac{٧}{١٥}$ (د) $\frac{١}{٢}$

(٢٤) إذا كان : ٦ (ن^{٢} + ٩ ن + ٢٠) = |ن + ٥ فإن : ن = ...

(أ) صفر (ب) ٣ (جـ) ٥ (د) ٦

(٢٥) إذا كانت ف = {أ ، ب ، حـ} فضاء لتجربة عشوائية وكان :

ل (أ) = $\frac{١}{٣}$ ، ل (ب) = $\frac{٢}{٥}$ فإن : ل (حـ) = ...

(أ) $\frac{٤}{١٥}$ (ب) $\frac{٢}{١٥}$ (جـ) $\frac{١}{١٥}$ (د) $\frac{١١}{١٥}$

(٢٦) $^{٥}ل_{٤}$ = ...

(أ) |٥ (ب) |٤ (جـ) ٢٠ (د) ٦٠

(٢٧) إذا كان : أ ، ب حدثين متنافيين فإن : أ − ب = ...

(أ) أ (ب) ب (جـ) ب − أ (د) أَ

ثانيًا الأسئلة المقالية

أجب عن السؤالين الآتيين :

١ أوجد النقط الواقعة على منحنى الدالة : ص = (س − ٣)^{٢} − ١ والتى عندها المماس يوازى المستقيم ٢ س + ص − ٣ = ٠

٢ أوجد عدد حدود اللازم أخذها من المتتابعة (٢٥ ، ٢٣ ، ٢١ ، ...) ابتداء من حدها الأول ليكون المجموع ١٢٠

١٢ محافظة بنى سويف

إدارة الواسطى
توجيه الرياضيات

أولًا أسئلة الاختيار من متعدد

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

① متتابعة حدها النونى : $ح_ن = ن + ١$ فإن حدها الخامس ....

(أ) ٥ (ب) ٦ (جـ) ٧ (د) ٨

② $\sum_{ر=١}^{٥} ر = $ ....

(أ) ١٥ (ب) ١٩ (جـ) ٢٠ (د) ٢١

③ متتابعة حسابية : (٣ ، ٥ ، ٧ ، ...) فإن مجموع العشرة حدود الأولى منها يساوى ....

(أ) ١٢٠ (ب) ٢٤٠ (جـ) ٢٦٠ (د) ٣٠٠

④ متتابعة حسابية (٢ ، ٤ ، ٦ ، ... ، ١٠٠) فإن عدد حدودها

(أ) ٢٥ (ب) ٣٠ (جـ) ٥٠ (د) ٤٥

⑤ المتتابعة الحسابية التى حدها الأول ٧ وأساسها ٥ يكون $ح_{١٠}$ فيها هو ....

(أ) ٤٥ (ب) ٥٢ (جـ) ٥٧ (د) ٣٥٠

⑥ متتابعة هندسية (٨ ، ٤ ، ٢ ، ...) فإن : $جـ_{\infty} = $ ....

(أ) ١٦ (ب) ٨ (جـ) ٤ (د) صفر

⑦ متتابعة هندسية حدها الأول ٥ وأساسها ٢ يكون حدها التاسع هو ....

(أ) ١٨٢٠ (ب) ١٢٨٠ (جـ) ١٢٠٨ (د) ٨١٢٠

⑧ عدد طرق جلوس ستة أشخاص فى دائرة = ...

(أ) ٧٢٠ (ب) ١٢٠ (جـ) ٢٤٠ (د) ٨٠٠

⑨ $^{٥}ل_{٢} = $ ....

(أ) ٢٠ (ب) ٤٠ (جـ) ٥٠ (د) ٦٠

(١٠) $ق^{١٠}_{٨}$ = ...

(أ) ٤٥ (ب) ٩٠ (جـ) ١٣٥ (د) ١٨٠

(١١) $\underline{|ن}$ = ٢٤ فإن : ن = ...

(أ) ٢ (ب) ٣ (جـ) ٤ (د) ٥

(١٢) $^{٥}ق_{ر} = {}^{٥}ق_{٢ر-١}$ فإن : ر يمكن أن تكون ....

(أ) ١ (ب) ٥ (جـ) ٦ (د) ٧

(١٣) $^{ن}ل_{٣}$ = ٧٢٠ فإن : ن = ...

(أ) ٧ (ب) ٨ (جـ) ٩ (د) ١٠

(١٤) إذا كان : د (س) = ٥ $س^{٢}$ + ٢ فإن : $\frac{ءص}{ءس}$ = ...

(أ) ١٠ س (ب) ٥ $س^{٢}$ (جـ) ١٥ س (د) ٢٧ س

(١٥) ميل المماس للمنحنى : ص = $س^{٢}$ - ٢ س عند س = ٢ يساوى ....

(أ) ٢ (ب) ٤ (جـ) ٦ (د) ٨

(١٦) إذا كان متوسط التغير فى الدالة د يساوى ٢,٤ عندما تتغير س من ٤ إلى ٤,٢ فإن التغير فى د = ...

(أ) ٠,٣٢ (ب) ٠,٤٨ (جـ) ٣,٦ (د) ٧,٢

(١٧) إذا كانت : ص = ع ، ع = $س^{٢}$ فإن : $\frac{ءص}{ءس}$ عند س = ٢ تساوى ....

(أ) ٢ (ب) ٤ (جـ) ٦ (د) ٨

(١٨) $\int$ (س + ١) ء س = ... + ث

(أ) $\frac{س^{٢}}{٢}$ + س (ب) $س^{٢}$ + س (جـ) ٢ $س^{٢}$ + س (د) $س^{٢}$ + ٢ س

(١٩) احتمال الحدث المؤكد = ...

(أ) ٠,٥ (ب) ٠,٧ (جـ) ٠,٩ (د) ١

(٢٠) إذا كان : أ ، ب حدثين متنافيين فإن : ل (أ ∩ ب) = ...

(أ) صفر (ب) ٠,٥ (جـ) ١ (د) ٢

(٢١) إذا كان أ ⊃ ب وكان : ل (أ) = ٠,٤ فإن : ل (أ ∩ ب) = ...

(أ) ٠,٤ (ب) ٠,٦ (جـ) ٠,٨ (د) ١

(٢٢) عند إلقاء حجر نرد مرة واحدة فإن احتمال ظهور عدد أولى = ...

(أ) ١ (ب) ٠,٧ (جـ) ٠,٥ (د) ٠,٢٥

(٢٣) إذا كان : أ ، ب حدثين من فضاء عينة ف ، ل (أ) = ٠,٦ ، ل (ب) = ٠,٤
، ل (أ ∩ ب) = ٠,٣ فإن : ل (أ ∪ ب) = ...

(أ) ١ (ب) ٠,٧ (جـ) ٠,٣ (د) ٠,١

(٢٤) إذا كان : ل (أ) = ٠,٦٥ فإن : ل (أ̄) = ...

(أ) ٠,٣٥ (ب) ٠,٥٣ (جـ) ١ (د) ١,٦٥

(٢٥) إذا كان : أ ، ب حدثين متنافيين من فضاء عينة ف ، ل (أ) = ٠,٥ ، ل (ب) = ٠,٣
فإن : ل (أ ∪ ب) = ...

(أ) ١ (ب) ٠,٨ (جـ) ٠,٢ (د) صفر

(٢٦) إذا كان نسبة نجاح طالب تساوى ٠,٧٥ فإن احتمال رسوبه ....

(أ) ٠,١٢ (ب) ٠,١٥ (جـ) ٠,٢٢ (د) ٠,٢٥

(٢٧) ∫ أ س^{٣} ء س = ٢ س^{٤} + ث فإن : أ = ...

(أ) ٨ (ب) ٦ (جـ) ٤ (د) ٢

ثانيًا الأسئلة المقالية

أجب عن السؤالين الآتيين :

١ إذا كان : ص = س^{٣} − ٢ س + ١

أوجد : $\frac{ءص}{ءس}$ عند س = ٥

---

٢ أوجد مجموع المتتابعة الهندسية : (٢ ، ٤ ، ٨ ، ... ، ٦٤)

١٣ محافظة المنيا

توجيه الرياضيات



أولاً أسئلة الاختيار من متعدد

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

① الحد الرابع فى المتتابعة $(ح_{ن})$: $ح_{ن} = ن^{٢} + ٢$ هو ....

(أ) ٤ (ب) ٦ (جـ) ١٦ (د) ١٨

② $^{٩}ل_{ر-١} = ٥٠٤$ فإن : $\underline{|ر + ١} =$ ....

(أ) ٥ (ب) ٢٤ (جـ) ١٢٠ (د) ٧٢٠

③ متوسط تغير الدالة د حيث : $د(س) = س^{٢}$ عندما تتغير س من ٣ إلى ٣,١ ....

(أ) ٠,٦١ (ب) ٦,١ (جـ) ٩ (د) ٩,٦١

④ فى تجربة إلقاء حجر نرد ٣ مرات متتالية فإن عدد عناصر فضاء العينة = ...

(أ) ٢٧ (ب) ٨١ (جـ) ٣٦ (د) ٢١٦

⑤ إذا كان : ٢أ + ١ ، ٥أ - ١ ، ٦أ + ٣ ثلاثة حدود متتالية من متتابعة حسابية فإن : أ = ...

(أ) ١ (ب) ٢ (جـ) ٣ (د) ٥

⑥ لجنة مؤلفة من ١٢ عضوًا ، بكم طريقة يمكن اختيار رئيس ونائب لهذه اللجنة ؟ ....

(أ) ٢ (ب) ٢٣ (جـ) ٦٦ (د) ١٣٢

⑦ إذا كانت الدالة د : $د(س) = \frac{س - ٢}{س + ٢}$ فإن : $د'(٢) =$ ....

(أ) -٤ (ب) $-\frac{١}{٤}$ (جـ) ٤ (د) $\frac{١}{٤}$

⑧ إذا كان : أ ، ب حدثين من فضاء العينة ف
فإن الجزء المظلل بالشكل المقابل يعبر عن = ...

(أ) أ - ب (ب) ب ∪ أ
(جـ) أ' ∪ ب (د) أ'

⑨ المتتابعة الحسابية التى حدها الأول = ٤ ، وحدها الخامس = ٢٠ فإن : $ح_{١٥} =$ ....

(أ) ٨٥ (ب) ٦٠ (جـ) ٥٨ (د) -٤٨

⑩ إذا كان : $^{ن}ق_{٢} = ١٢٠$ فإن : $^{ن}ق_{ن-٨} =$ ....

(أ) ٩٠ (ب) ٦٠ (جـ) ٤٥ (د) ٣٠

(١١) إذا كان : $د'(٢) = ٥$ ، $د(س) = س^٢ + م س + ٥$ فإن : م = ...

(أ) ٥ (ب) ٢ (جـ) ١٠ (د) ١

(١٢) إذا كان : أ ، ب حدثين من فضاء عينة لتجربة عشوائية فإن حدث وقوع ب فقط يساوى ....

(أ) ب (ب) أ ∩ ب (جـ) أ − ب (د) ب − أ

(١٣) متتابعة حسابية حدها الثانى = ١٣ ومجموع العشرة حدود الأولى منها = ٢٣٥ فإن المتتابعة هى ....

(أ) (٨ ، ١٣ ، ١٨ ، ...) (ب) (٩ ، ١٣ ، ١٧ ، ...)

(جـ) (١٢ ، ١٣ ، ١٤ ، ...) (د) (١٠ ، ١٣ ، ١٦ ، ...)

(١٤) إذا كان : $^{٢٧}ق_{٢س+١} = {}^{٢٧}ق_{٥س-٨}$ فإن : $^{٥}ق_{س}$ = ...

(أ) ١٠ (ب) ١٢ (جـ) ١٣ (د) ١٥

(١٥) إذا كان : $ص = (س^٢ - ٢)^٥$ فإن : $\frac{ءص}{ءس}$ = ...

(أ) $٥(س^٢ - ٢)^٤$ (ب) $١٠ س (س^٢ - ٢)^٤$

(جـ) $٢٢ س^٥$ (د) $٢ س (س^٢ - ٢)^٥$

(١٦) إذا كان : أ حدث من فضاء العينة ف لتجربة عشوائية وكان : أ = ف فإن الحدث أ هو ....

(أ) حدث أولى. (ب) حدث مستحيل. (جـ) حدث مؤكد. (د) نفس الحدث أَ

(١٧) متتابعة هندسية أساسها = $\frac{١}{٢}$ ، وحدها الثالث = ٢٤ ، فإن المتتابعة هى ....

(أ) (٤٨ ، ٢٤ ، ١٢ ، ...) (ب) (٦ ، ١٢ ، ٢٤ ، ...)

(جـ) (٩٦ ، ٤٨ ، ٢٤ ، ...) (د) ($\frac{٨}{٣}$ ، ٨ ، ٢٤ ، ...)

(١٨) إذا كان : $^{ن}ق_{١٠} > {}^{ن}ق_{٩}$ فإن : ن ....

(أ) = ١٩ (ب) < ١٩ (جـ) > ١٩ (د) ≥ ١٩

(١٩) المماس لمنحنى الدالة : $ص = س^٢ - ٨س + ٢$ يوازى محور السينات عند س = ...

(أ) −٨ (ب) ٢ (جـ) ٤ (د) صفر

(٢٠) إذا كان : أ ∩ ب = ∅ ، ل(أ) = ٠,٧ ، ل(ب) = ٠,٤ فإن : ل(أ ∪ ب) = ...

(أ) ٠,٨ (ب) ٠,٣ (جـ) ١ (د) ٠,٩

(٢١) عدد الحدود الذى يلزم أخذها من المتتابعة الهندسية (٣ ، ٦ ، ١٢ ، ...) ابتداءً من حدها الأول ليكون مجموع هذه الحدود = ٣٨١ هو .... حدًا.

(أ) ٨ (ب) ٦ (جـ) ٩ (د) ٧

(٢٢) إذا كان : $\underline{|ر} = ن$ ، $\underline{|ن} = ر$ فإن : ر + ن = ...

(أ) ٢ (ب) صفر أ، ١ (جـ) ٢ أ، ٣ (د) ٢ أ، ٤

(٢٣) $\int$ (س − ٥) (س + ١) ءس = ... + ث

(أ) $\frac{١}{٣}$ س^{٣} − ٢ س^{٢} − ٥ س (ب) س^{٣} − ٢ س^{٢} − ٥ س

(جـ) $\frac{٢}{٣}$ س^{٣} − ٢ س^{٢} + ٥ س (د) $\frac{١}{٣}$ س^{٣} − ٢ س^{٢} + ٥ س

(٢٤) فى تجربة إلقاء حجر نرد منتظم مرتين متتاليتين فإن احتمال الحصول على العدد ٥ فى إحدى الرميتين والعدد ٦ فى الرمية الأخرى هو ....

(أ) $\frac{١}{٣٦}$ (ب) $\frac{١}{٦}$ (جـ) $\frac{١}{١٨}$ (د) $\frac{١}{٩}$

(٢٥) صندوق به ٣٠ بطاقة متماثلة مرقمة من ١ إلى ٣٠ ، سحبت بطاقة واحدة عشوائيًا من هذا الصندوق فإن احتمال أن تكون البطاقة المسحوبة مرقمة بعدد فردى مكعب كامل = ...

(أ) صفر (ب) $\frac{١}{١٠}$ (جـ) $\frac{١}{٣٠}$ (د) $\frac{١}{١٥}$

(٢٦) مجموع حدود المتسلسلة الحسابية : ٢ + ٥ + ٨ + ... + ٦٢ = ...

(أ) ٦٦٤ (ب) ٦٧٠ (جـ) ٦٦٠ (د) ٦٧٢

(٢٧) إذا كان : أ ، ب حدثين متنافيين فإن : ل (أَ ∪ بَ) = ...

(أ) صفر (ب) ١ (جـ) ٠,٠٥ (د) ٥٠٪

ثانيًا الأسئلة المقالية

أجب عن السؤالين الآتيين :

١ أوجد معادلة المماس والعمودى عليه للمنحنى الآتى :

ص = ٢ س^{٣} − ٤ س^{٢} + ٣ عند س = ٢

٢ متتابعة هندسية جميع حدودها موجبة فإذا كان : ح$_{١}$ + ح$_{٢}$ = ٤٨ ، ح$_{٣}$ + ح$_{٤}$ = ١٩٢

(١) اكتب هذه المتتابعة. (٢) أوجد مجموع العشرة حدود الأولى منها.

١٤ محافظة أسيوط

إدارة البدارى
توجيه الرياضيات

أولاً أسئلة الاختيار من متعدد

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

(١) مجموع المتسلسلة $\sum_{ر=١}^{٥} ٤$ = ...

(أ) ٩ (ب) ١ (جـ) ١٠ (د) ٢٠

(٢) الوسط الحسابى للعددين ٧ ، ١١ = ...

(أ) ١٨ (ب) ٤ (جـ) ٩ (د) ٧٧

(٣) إذا كان : $\underline{|ن + ١}$ = ١٢٠ فإن : ن = ...

(أ) ٣ (ب) ٤ (جـ) ٥ (د) ٦

(٤) $\frac{ء}{ءس}(س^{٣})$ = ...

(أ) $٣س^{٢}$ (ب) ٣س (جـ) $٣س^{٣}$ (د) صفر

(٥) إذا كان متوسط التغير فى الدالة د يساوى ٢,٤ عندما تتغير س من ٣ إلى ٣,٢ فإن التغير فى د يساوى ....

(أ) ٠,٤٨ (ب) ٠,٣٢ (جـ) ٣,٦ (د) ٧,٢

(٦) إذا كان : أ ، ب حدثان متنافيان من فضاء عينة تجربة عشوائية فإن : أ ∩ ب = ...

(أ) صفر (ب) ∅ (جـ) ١ (د) $\frac{١}{٢}$

(٧) احتمال وقوع أى حدث هو عدد حقيقى ينتمى للفترة ....

(أ)]٠ ، ∞[(ب)]-١ ، ١[(جـ) [٠ ، ١] (د)]٠ ، ١[

(٨) $\underline{|صفر}$ = ...

(أ) صفر (ب) -١ (جـ) ١٠ (د) ١

(٩) عدد حدود المتتابعة : (٣ ، ٦ ، ١٢ ، ... ، ٣٨٤) يساوى ....

(أ) ٦ (ب) ٨ (جـ) ٧ (د) ٩

(١٠) ميل المماس للمنحنى ص = ٣ $س^٢$ عند النقطة (١ ، ٣) يساوى ....

(أ) ٦ (ب) صفر (جـ) ١ (د) ٣

(١١) $\int$ ٣ $س^٢$ ء س = ...

(أ) $س^٣$ (ب) ٣ $س^٣$ + ث (جـ) $س^٣$ + ث (د) ٦ س + ث

(١٢) إذا كان : أ ، ب حدثان متنافيان وكان : ل (أ) = ٠,٣ ، ل (ب) = ٠,٤

فإن : ل (أ ∪ ب) = ...

(أ) ٠,١ (ب) ١,٢ (جـ) ٠,٤ (د) ٠,٧

(١٣) احتمال وقوع الحدث المؤكد = ...

(أ) صفر (ب) ١ (جـ) $\frac{١}{٢}$ (د) −١

(١٤) رتبة أول حد سالب فى المتتابعة : (١٣ ، ١٠ ، ٧ ، ...) هو ....

(أ) $ح_٥$ (ب) $ح_٦$ (جـ) $ح_٧$ (د) $ح_٨$

(١٥) $ح_٥$ فى المتتابعة الحسابية : (٧ ، ١١ ، ١٥ ، ...) = ...

(أ) ٣٤ (ب) ٦٧ (جـ) ٢٣ (د) ٢١٠

(١٦) $^٥ل_٢$ = ...

(أ) ٥٠ (ب) ٣٠ (جـ) ١٥ (د) ٦٠

(١٧) إذا كان : $^{١٢}ق_{ر}$ = $^{١٢}ق_{٢ر + ٣}$ فإن : ر = ...

(أ) ٣ (ب) −٣ (جـ) {٣ ، −٣} (د) ٦

(١٨) ميل المماس للمنحنى : ص = $\frac{س - ١}{س + ١}$ عند النقطة (١ ، ٠) يساوى ....

(أ) $\frac{١}{٢}$ (ب) $\frac{١}{٤}$ (جـ) صفر (د) −$\frac{١}{٢}$

(١٩) أى حدثين أ ، ب من فضاء العينة ف يكون حدث وقوع أ ، ب معًا هو ....

(أ) أَ (ب) أ ∩ ب (جـ) أ − ب (د) ب − أ

(٢٠) إذا كان : أ ، ب حدثين من فضاء العينة وكان : ل (أ) = ٠,٣ ، ل (ب) = ٠,٥

، ل (أ ∩ ب) = ٠,١ فإن : ل (أ ∪ ب) = ...

(أ) ٠,٨ (ب) ٠,٦ (جـ) ٠,٤ (د) ٠,٧

(٢١) مجموع عدد غير منته من حدود المتتابعة : (١٦ ، ٨ ، ٤ ، ٢ ، ...) هو ....

(أ) ١٦ (ب) ٢٠ (جـ) ٣٢ (د) ٢٤

(٢٢) مجموع حدود المتتابعة الحسابية : (١٣ ، ١٦ ، ١٩ ، ... ، ١٠٠) يساوى ....

(أ) ١٦٩٥ (ب) ١٣٠٠ (جـ) ١٥٠٠ (د) ١٠٠٠

(٢٣) عدد طرق جلوس ٤ طلاب على أربعة مقاعد فى صف واحد يساوى ....

(أ) ٦ (ب) ٤ (جـ) ٢٤ (د) ١٢٠

(٢٤) إذا كان : $^{٨}ل_{ن+١} = ٣٣٦$ فإن قيمة المقدار $^{٢}ن ق_{٤}$ = ...

(أ) صفر (ب) ١ (جـ) ٢٤ (د) ١٦

(٢٥) قياس الزاوية الموجبة التى يصنعها المماس للمنحنى : ص = $س^{٢}$ − س مع الاتجاه الموجب لمحور السينات عند س = ١ يساوى ....

(أ) ٤٥° (ب) ١٣٥° (جـ) ٦٠° (د) ٣٠°

(٢٦) صندوق به ٦ بطاقات متماثلة ومرقمة من ١ إلى ٦ سحبت بطاقة واحدة عشوائيًا ولوحظ العدد المكتوب عليها فإن احتمال ظهور عدد أولى = ...

(أ) $\frac{١}{٣}$ (ب) $\frac{١}{٤}$ (جـ) $\frac{١}{٢}$ (د) ١

(٢٧) كيس يحتوى على ٦ كرات بيضاء ، ٥ كرات حمراء ، ٤ كرات سوداء سحبت كرة عشوائيًا فإن احتمال أن تكون الكرة المسحوبة بيضاء أو سوداء يساوى ....

(أ) $\frac{١}{٣}$ (ب) $\frac{٢}{٣}$ (جـ) $\frac{١}{٢}$ (د) $\frac{١}{٤}$

ثانيًا الأسئلة المقالية

أجب عن السؤالين الآتيين :

١ عددان موجبان وسطهما الحسابى = ١٠ وسطهما الهندسى الموجب = ٦ أوجد العددان.

---

٢ (أ) **أوجد :** $\int (٢س + ٣)^{٧} \, ءس$

(ب) **أوجد :** $\frac{ءص}{ءس}$ إذا كان : ص = $(٢س + ٣)^{٥}$ عندما س = −٢



١٥ محافظة سوهاج
إدارة إخميم



أولًا أسئلة الاختيار من متعدد

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

(١) قاعدة المتتابعة : ((١ × ٢) ، (٢ × ٣) ، (٣ × ٤) ، (٤ × ٥) ، ....) هى ....

(أ) (ن − ١) (ن + ١) (ب) ن(ن + ١)
(جـ) ٢ ن(ن + ١) (د) (ن + ١) (ن + ٢)

(٢) مجموع المتسلسلة : $\sum_{ر=١}^{٣}$ ٣ ر = ...

(أ) ١ (ب) ٣ (جـ) ٦ (د) ١٨

(٣) مجموع حدود المتتابعة : (١ ، ٣ ، ٥ ، ... ، ١٧ ، ١٩) هو ....

(أ) ٢٠ (ب) ٥٠ (جـ) ١٠٠ (د) ٣٠

(٤) الوسط الهندسى للعددين : ٤ ، ١٦ هو ....

(أ) ٨ (ب) ١٠ (جـ) ± ٨ (د) ٤

(٥) مجموع حدود المتتابعة الهندسية : (٨١ ، ٢٧ ، ٩ ، ...) يساوى ....

(أ) $\frac{٢٤٣}{٢}$ (ب) ١١٧ (جـ) ١١٨ (د) $\frac{٢٤٣}{٤}$

(٦) فى المتتابعة الحسابية : (٦٧ ، ٦٤ ، ٦١ ، ...) يكون أول حد سالب هو ....

(أ) $ح_{٢٣}$ (ب) $ح_{٢٤}$ (جـ) $ح_{٢٢}$ (د) $ح_{٢٠}$

(٧) فى المتتابعة الهندسية : (٣ ، ٦ ، ١٢ ، ... ، ٧٦٨) يكون $ح_{٤}$ من النهاية = ...

(أ) ٣ (ب) ٧٦٨ (جـ) ١٩٢ (د) ٩٦

(٨) $^{٥}ل_{٣}$ = ...

(أ) ٥ (ب) ٣ (جـ) ٦٠ (د) ١٥

(٩) $^{٥}ق_{ر}$ = ١٠ فإن : ر = ...

(أ) ٥ (ب) ٣ (جـ) ١٠ (د) ١

(١٠) عدد طرق ترتيب ٥ أشخاص فى خمسة مقاعد على شكل دائرة يساوى ....

(أ) ١ (ب) ٢ (جـ) ٢٤ (د) ١٢٠

(١١) إذا كان : ${}^{28}ق_{ر} = {}^{28}ق_{2ر - 47}$ فإن : ر = ...

(أ) ٢٤ (ب) ٢٥ (جـ) ٢٦ (د) ٢٨

(١٢) ${}^{ن}ل_{ر} \div {}^{ن}ق_{ر} = $ ....

(أ) $\underline{|ن - 1}$ (ب) $\underline{|ر}$ (جـ) $\underline{|ن}$ (د) ١

(١٣) مجموعة حل المعادلة : $\underline{|س} = 1$ هي ....

(أ) {١} (ب) {٠} (جـ) {١ ، ٠} (د) {١ ، -١}

(١٤) إذا كان : أ ، ب حدثان متنافيان فإن : أ - ب = ...

(أ) أ (ب) ب (جـ) ب - أ (د) أَ

(١٥) فى تجربة إلقاء حجر نرد ٣ مرات متتالية فإن عدد عناصر فضاء العينة = ...

(أ) ٢٧ (ب) ٨١ (جـ) ٣٦ (د) ٢١٦

(١٦) إذا كان : ل (أ) = $\frac{1}{4}$ ، ل (ب) = $\frac{2}{3}$ ، ل (أ ∩ ب) = $\frac{1}{3}$ فإن : ل (أ ∪ ب) = ...

(أ) $\frac{11}{12}$ (ب) $\frac{3}{4}$ (جـ) $\frac{2}{3}$ (د) $\frac{7}{12}$

(١٧) إذا ألقى حجر نرد منتظم مرة واحدة فإن احتمال الحصول على عدد فردى أقل من ٥ هو ....

(أ) $\frac{2}{5}$ (ب) $\frac{1}{2}$ (جـ) $\frac{1}{3}$ (د) $\frac{1}{6}$

(١٨) إذا كان : أ ، ب حدثين من فضاء عينة لتجربة عشوائية وكان : ب ⊂ أ وكان :
ل (أ) = ٠,٩ ، ل (ب) = ٠,٦ فإن : ل (أ - ب) = ...

(أ) ٠,٦ (ب) ٠,٣ (جـ) ٠,٤ (د) ٠,٢

(١٩) إذا كان : ف = {أ ، ب ، حـ} فضاء عينة لتجربة عشوائية وكان : ل (أ) = $\frac{1}{3}$
، ل (ب) = $\frac{2}{5}$ فإن : ل (حـ) = ...

(أ) $\frac{4}{15}$ (ب) $\frac{2}{15}$ (جـ) $\frac{1}{15}$ (د) $\frac{11}{15}$

(٢٠) فى تجربة إلقاء عملة معدنية مرتين متتاليتين فإن فضاء العينة لهذه التجربة هو ....

(أ) {ص ، ك} (ب) {(ص ، ص) ، (ك ، ك)}

(جـ) {(ك ، ص) ، (ص ، ك)}

(د) {(ص ، ص) ، (ك ، ك) ، (ص ، ك) ، (ك ، ص)}

(٢١) إذا كان : أ ، ب حدثان من فضاء العينة لتجربة عشوائية وكان : ل (أ) = $\frac{٣}{٤}$

، ل (بَ) = $\frac{٢}{٣}$ ، ل (أ ∩ ب) = $\frac{١}{٨}$ فإن : ل (أَ ∩ بَ) = ...

(أ) $\frac{٧}{٢٤}$ (ب) $\frac{١٣}{٢٤}$ (جـ) $\frac{١١}{٢٤}$ (د) $\frac{١٩}{٢٤}$

(٢٢) متوسط تغير الدالة د : د (س) = س^{٢} عندما تتغير س من ١ إلى ٢ يساوى ....

(أ) −٣ (ب) ١ (جـ) ٤ (د) ٣

(٢٣) معدل تغير الدالة د حيث : د (س) = س^{٢} − ١ عند س = −٢ يساوى ....

(أ) ٤ (ب) −٤ (جـ) −١ (د) ١

(٢٤) $\int \frac{س^{٢} + ٣ س}{س}$ ءس = ...

(أ) س + ٣ + ث (ب) $\frac{١}{٢}$ س^{٢} + ٣ س + ث

(جـ) ٣ س + ث (د) س + ٣

(٢٥) ميل المماس لمنحنى الدالة د حيث د (س) = (٣ س − ٢) (٥ س − ٣) عند س = ١ يساوى ....

(أ) ٨ (ب) ١١ (جـ) ١٣ (د) ١٥

(٢٦) $\int$ (٣ س − ٢)^{٥} ءس = ... + ث

(أ) (٣ س − ٢)^{٦} (ب) $\frac{١}{٦}$ (٣ س − ٢)^{٦}

(جـ) $\frac{١}{١٨}$ (٣ س − ٢)^{٦} (د) ٣

(٢٧) إذا كانت : د (س) = (س^{٢} − ٢)^{٥} فإن : دَ (١) = ...

(أ) ٥ (ب) ١٠ (جـ) −٥ (د) −١٠

ثانيًا الأسئلة المقالية

أجب عن السؤالين الآتيين :

(١) أثبت أن المتتابعة (ح$_{ن}$) = ٢ (−٣)$^{ن−١}$ متتابعة هندسية وأوجد مجموع الحدود الثمانية الأولى منها.

---

(٢) أوجد معادلة المماس للمنحنى : ص = (س − ٢) (س^{٣} − ٤) عند النقطة (٢ ، ٠) الواقعة على المنحنى.

الإجابات



إجابات الاختبارات التراكمية القصيرة فى الجبـــر

الاختبار الأول
① (ب) ② (د) ③ (ب) ④ (ب)
⑤ (أ) ⑥ (ب) ⑦ (ب) ⑧ (ب)
⑨ (جـ) ⑩ (جـ) ⑪ (جـ) ⑫ (جـ)

الاختبار الثانى
① (جـ) ② (جـ) ③ (أ) ④ (ب)
⑤ (جـ) ⑥ (أ) ⑦ (جـ) ⑧ (جـ)
⑨ (د) ⑩ (جـ) ⑪ (د) ⑫ (ب)

الاختبار الثالث
① (جـ) ② (ب) ③ (ب) ④ (أ)
⑤ (جـ) ⑥ (ب) ⑦ (أ) ⑧ (جـ)
⑨ (د) ⑩ (جـ) ⑪ (ب) ⑫ (جـ)

الاختبار الرابع
① (جـ) ② (د) ③ (د) ④ (جـ)
⑤ (أ) ⑥ (ب) ⑦ (أ) ⑧ (ب)
⑨ (جـ) ⑩ (جـ) ⑪ (د) ⑫ (د)

الاختبار الخامس
① (د) ② (ب) ③ (أ) ④ (جـ)
⑤ (أ) ⑥ (د) ⑦ (ب) ⑧ (د)
⑨ (جـ) ⑩ (جـ) ⑪ (جـ) ⑫ (د)

الاختبار السادس
① (جـ) ② (أ) ③ (أ) ④ (د)
⑤ (د) ⑥ (د) ⑦ (ب) ⑧ (ب)
⑨ (ب) ⑩ (ب) ⑪ (د) ⑫ (أ)

الاختبار السابع
① (جـ) ② (ب) ③ (جـ) ④ (ب)
⑤ (جـ) ⑥ (د) ⑦ (أ) ⑧ (ب)
⑨ (د) ⑩ (جـ) ⑪ (جـ) ⑫ (ب)

إجابات الاختبارات التراكمية القصيرة فى التفاضل والتكامل

الاختبار الأول
① (ب) ② (ب) ③ (أ) ④ (د)
⑤ (د) ⑥ (جـ) ⑦ (د) ⑧ (جـ)
⑨ (أ) ⑩ (ب) ⑪ (جـ) ⑫ (ب)

الاختبار الثانى
① (أ) ② (ب) ③ (ب) ④ (جـ)
⑤ (د) ⑥ (ب) ⑦ (ب) ⑧ (جـ)
⑨ (ب) ⑩ (ب) ⑪ (د) ⑫ (ب)

الاختبار الثالث
① (د) ② (ب) ③ (ب) ④ (ب)
⑤ (أ) ⑥ (ب) ⑦ (أ) ⑧ (د)
⑨ (جـ) ⑩ (ب) ⑪ (جـ) ⑫ (د)

الاختبار الرابع
① (جـ) ② (أ) ③ (ب) ④ (ب)
⑤ (أ) ⑥ (ب) ⑦ (ب) ⑧ (جـ)
⑨ (أ) ⑩ (جـ) ⑪ (أ) ⑫ (ب)

الاختبار الخامس
① (د) ② (ب) ③ (د) ④ (ب)
⑤ (أ) ⑥ (د) ⑦ (جـ) ⑧ (أ)
⑨ (أ) ⑩ (أ) ⑪ (د) ⑫ (د)

الاختبار السادس
① (جـ) ② (ب) ③ (جـ) ④ (د)
⑤ (جـ) ⑥ (أ) ⑦ (ب) ⑧ (جـ)
⑨ (جـ) ⑩ (أ) ⑪ (أ) ⑫ (د)

إجابات الاختبارات التراكمية القصيرة فى الاحتمال

الاختبار الأول
① (د) ② (جـ) ③ (أ) ④ (ب)
⑤ (جـ) ⑥ (د) ⑦ (أ) ⑧ (جـ)
⑨ (جـ) ⑩ (د) ⑪ (أ) ⑫ (ب)

الاختبار الثانى
① (ب) ② (جـ) ③ (جـ) ④ (د)
⑤ (أ) ⑥ (جـ) ⑦ (ب) ⑧ (د)
⑨ (د) ⑩ (أ) ⑪ (ب) ⑫ (د)

إجابات اختبارات شهر مارس

اختبار ١

١

① (د) ② (جـ) ③ (د) ④ (ب)

⑤ (جـ) ⑥ (أ) ⑦ (جـ) ⑧ (أ)

⑨ (د) ⑩ (جـ) ⑪ (جـ) ⑫ (جـ)

٢

① ∵ $حـ_ن = -٢٤٠$ ∴ $٢ن (٧ - ن) = -٢٤٠$

∴ $١٤ن - ٢ن^٢ = -٢٤٠$

∴ $٢ن^٢ - ١٤ن - ٢٤٠ = ٠$

∴ $ن^٢ - ٧ن - ١٢٠ = ٠$

∴ $(ن - ١٥)(ن + ٨) = ٠$

∴ ن = ١٥ أ، ن = -٨ (مرفوض)

② ∵ $ص = س^٢ - ٣س + ١$

∴ صَ = ٢س - ٣

، ∵ ميل المماس = ٣ ∴ ٢س - ٣ = ٣

∴ ٢س = ٦ ∴ س = ٣

ومنها ص = ١ ∴ النقطة هي (٣ ، ١)

اختبار ٢

١

① (أ) ② (جـ) ③ (ب) ④ (جـ)

⑤ (ب) ⑥ (جـ) ⑦ (د) ⑧ (أ)

⑨ (جـ) ⑩ (ب) ⑪ (د) ⑫ (ب)

٢

① ∵ $ع_٣ = ٩$ ∴ $أ ر^٢ = ٩$ (١)

، ∵ $ع_٦ = ٢٤٣$ ∴ $أ ر^٥ = ٢٤٣$ (٢)

بقسمة (٢) على (١) :

∴ $ر^٣ = ٢٧$ ∴ ر = ٣

بالتعويض في (١) :

∴ أ × ٩ = ٩ ∴ أ = ١

∴ المتتابعة هي : (١ ، ٣ ، ٩ ، ٢٧ ، ...)

② ∵ ص = (س - ١) (س + ١)

∴ $ص = س^٢ - ١$ ، بوضع ص = ٠

∴ $س^٢ - ١ = ٠$ ∴ س = ±١

∴ المنحنى يقطع محور السينات في (١ ، ٠) ، (-١ ، ٠)

، ∵ $\frac{دص}{دس} = ٢س$

∴ $\left(\frac{دص}{دس}\right)_{س = ١} = ٢ × ١ = ٢$

∴ معادلة المماس عند النقطة (١ ، ٠) هي :

$\frac{ص - ٠}{س - ١} = ٢$ ∴ ٢س - ٢ = ص

∴ ٢س - ص - ٢ = ٠

، $\left(\frac{دص}{دس}\right)_{س = -١} = ٢ × (-١) = -٢$

∴ معادلة المماس عند النقطة (-١ ، ٠) هي :

$\frac{ص - ٠}{س + ١} = -٢$ ∴ -٢س - ٢ = ص

∴ ٢س + ص + ٢ = ٠

إجابات اختبارات شهر أبريل

اختبار ١

١

① (ب) ② (جـ) ③ (ب) ④ (أ)

⑤ (أ) ⑥ (ب) ⑦ (أ) ⑧ (ب)

⑨ (ب) ⑩ (د) ⑪ (ب) ⑫ (جـ)

٢

① عدد طرق اختيار الرقم في خانة المئات = ٢ طريقة

عدد طرق اختيار الرقم في خانة العشرات = ٣ طريقة

عدد طرق اختيار الرقم في خانة الآحاد = ٢ طريقة

∴ عدد الأعداد = ٢ × ٣ × ٢ = ١٢ طريقة

② (أ) $\int ٧ (٢س - ٧)^٦ \, دس$

$= \frac{٧ (٢س - ٧)^٧}{٧ × ٢} + ث$

$= \frac{١}{٢} (٢س - ٧)^٧ + ث$

(ب) $\int \frac{١٥}{(٣س - ٥)^٦} \, دس$

$= \int ١٥ (٣س - ٥)^{-٦} \, دس$

$= \frac{١٥ (٣س - ٥)^{-٥}}{-٥ × ٣} + ث$

$= -(٣س - ٥)^{-٥} + ث$

اختبار ٢

١

① (جـ) ② (د) ③ (جـ) ④ (د)

⑤ (ب) ⑥ (ب) ⑦ (أ) ⑧ (ب)

⑨ (ب) ⑩ (ب) ⑪ (ب) ⑫ (ب)

٢

① عدد طرق اختيار الرقم في خانة الآحاد = ٢ طريقة.

عدد طرق اختيار الرقم في خانة العشرات = ٤ طريقة.

عدد طرق اختيار الرقم في خانة المئات = ٣ طريقة.

∴ عدد طرق تكوين العدد = ٢ × ٤ × ٣

= ٢٤ طريقة.

② (أ) $\int \frac{س^٢ - ٥س + ٦}{س - ٢} \, دس$

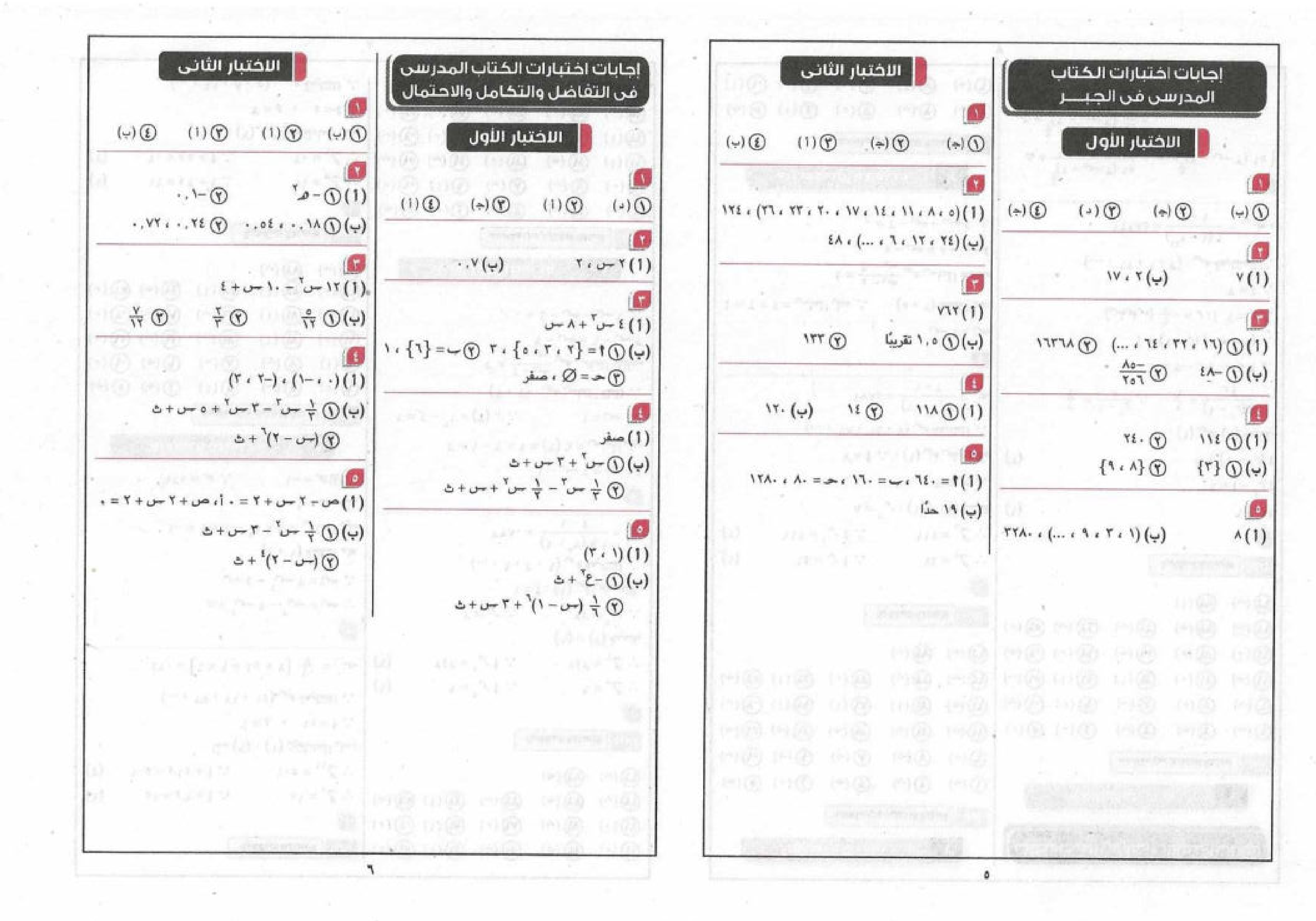
$= \int \frac{(س - ٢)(س - ٣)}{س - ٢} \, دس$

$= \int (س - ٣) \, دس = \frac{١}{٢} س^٢ - ٣س + ث$

(ب) $\int \frac{٧}{\sqrt{٣س - ٤}} \, دس = \int ٧ (٣س - ٤)^{-\frac{١}{٢}} \, دس$

$= \frac{٧ (٣س - ٤)^{\frac{١}{٢}}}{\frac{١}{٢} × ٣} + ث$

$= \frac{١٤}{٣} (٣س - ٤)^{\frac{١}{٢}} + ث$



إجابات اختبارات الكتاب المدرسي في الجبـــر

الاختبار الأول

١

① (ب) ② (جـ) ③ (د) ④ (جـ)

٢

(أ) ٧ (ب) ٢ ، ١٧

٣

(أ) ① (١٦ ، ٣٢ ، ٦٤ ، ...) ② ١٦٣٦٨

(ب) ① −٤٨ ② $\frac{-٨٥}{٢٥٦}$

٤

(أ) ① ١١٤ ② ٢٤٠

(ب) ① {٣} ② {٨ ، ٩}

٥

(أ) ٨ (ب) (١ ، ٣ ، ٩ ، ...) ، ٣٢٨٠

الاختبار الثاني

١

① (جـ) ② (جـ) ③ (أ) ④ (ب)

٢

(أ) (٥ ، ٨ ، ١١ ، ١٤ ، ١٧ ، ٢٠ ، ٢٣ ، ٢٦) ، ١٢٤

(ب) (٢٤ ، ١٢ ، ٦ ، ...) ، ٤٨

٣

(أ) ٧٦٢

(ب) ① ١,٥ تقريبًا ② ١٣٣

٤

(أ) ① ١١٨ ② ١٤ (ب) ١٢٠

٥

(أ) أ = ٦٤٠ ، ب = ١٦٠ ، حـ = ٨٠ ، ١٢٨٠

(ب) ١٩ حدًا

إجابات اختبارات الكتاب المدرسي في التفاضل والتكامل والاحتمال

الاختبار الأول

١

① (د) ② (أ) ③ (جـ) ④ (أ)

٢

(أ) ٢س ، ٢ (ب) ٠,٧

٣

(أ) $٤س^{٣} + ٨س$

(ب) ① أ = {٢ ، ٣ ، ٥} ، ٣ ② ب = {٦} ، ١٠

③ حـ = ∅ ، صفر

٤

(أ) صفر

(ب) ① $س^{٣} + ٣س + ث$

② $\frac{١}{٣}س^{٣} - \frac{١}{٢}س^{٢} + س + ث$

٥

(أ) (١ ، ٣)

(ب) ① $-ع^{٢} + ث$

② $\frac{١}{٦}(س - ١)^{٦} + ٣س + ث$

الاختبار الثاني

١

① (ب) ② (أ) ③ (أ) ④ (ب)

٢

(أ) ① $-هـ^{٢}$ ② −٠,١

(ب) ① ٠,١٨ ، ٠,٥٤ ② ٠,٢٤ ، ٠,٧٢

٣

(أ) $١٢س^{٢} - ١٠س + ٤$

(ب) ① $\frac{٥}{١٢}$ ② $\frac{٢}{٣}$ ③ $\frac{٧}{١٢}$

٤

(أ) (٠ ، −١) ، (−٢ ، ٣)

(ب) ① $\frac{١}{٣}س^{٣} - ٣س^{٢} + ٥س + ث$

② $(س - ٢)^{٦} + ث$

٥

(أ) ص − ٢س + ٢ = ٠ ، ص + ٢س + ٢ = ٠

(ب) ① $\frac{١}{٢}س^{٢} - ٣س + ث$

② $(س - ٢)^{٤} + ث$

إجابات امتحانات مدارس المحافظات

١ محافظة القاهرة

أولاً أسئلة الاختيار من متعدد

(١) ب (٢) جـ (٣) ب (٤) د (٥) د
(٦) ب (٧) د (٨) ب (٩) د (١٠) ب
(١١) جـ (١٢) د (١٣) أ (١٤) أ (١٥) ب
(١٦) أ (١٧) د (١٨) جـ (١٩) د (٢٠) جـ
(٢١) ب (٢٢) جـ (٢٣) ب (٢٤) ب (٢٥) د
(٢٦) ب (٢٧) أ

ثانياً الأسئلة المقالية

١

أ ر = ٦ (١)

أ $ر^٢$ − أ = ٩

أ ($ر^٢$ − ١) = ٩ (٢)

بقسمة (٢) على (١):

∴ $\frac{أ(ر^٢ - ١)}{أ ر} = \frac{٩}{٦}$ ∴ $\frac{ر^٢ - ١}{ر} = \frac{٣}{٢}$

∴ ٢$ر^٢$ − ٣ر − ٢ = ٠

∴ (٢ر + ١) (ر − ٢) = ٠

∴ ر = ٢ أو ر = $-\frac{١}{٢}$ (مرفوض)

∴ أ = ٣

∴ المتتابعة هي: (٣ ، ٦ ، ١٢ ، ...)

، $ح_{١٢} = \frac{٣(٢^{١٢} - ١)}{٢ - ١} = ١٢٢٨٥$

٢

$\int ١٥ (٣س - ٢)^{\frac{٤}{٣}} ءس = \frac{١٥ (٣س - ٢)^{\frac{٧}{٣}}}{\frac{٧}{٣} \times ٣} + ث$

$= \frac{١٠}{٧} (٣س - ٢)^{\frac{٧}{٣}} + ث$

$= \frac{١٠}{٧} \sqrt[٣]{(٣س - ٢)^٧} + ث$

٢ محافظة الجيزة

أولاً أسئلة الاختيار من متعدد

(١) جـ (٢) ب (٣) جـ (٤) د (٥) جـ
(٦) د (٧) جـ (٨) ب (٩) جـ (١٠) ب
(١١) ب (١٢) ب (١٣) جـ (١٤) جـ (١٥) جـ
(١٦) جـ (١٧) أ (١٨) أ (١٩) أ (٢٠) ب
(٢١) ب (٢٢) ب (٢٣) د (٢٤) أ (٢٥) جـ
(٢٦) ب (٢٧) ب

ثانياً الأسئلة المقالية

١

∵ $ح_٢ = ١٤$ ∴ أ ر = ١٤ (١)

∵ $ح_٥ = ١١٢$ ∴ أ $ر^٤$ = ١١٢ (٢)

قسمة (٢) ÷ (١): $ر^٣ = ٨$

∴ ر = ٢

بالتعويض في (١): ∴ أ = ٧

∴ المتتابعة هي (٧ ، ١٤ ، ٢٨ ، ...)

$ح_٨ = \frac{٧(٢^٨ - ١)}{٢ - ١} = ١٧٨٥$

٢

صَ = ٢ س

عند النقطة (٢ ، ٥) ∴ ميل المماس = ٢ × ٢ = ٤

معادلة المماس هي $\frac{ص - ٥}{س - ٢} = ٤$

٤ س − ٨ = ص − ٥

∴ ٤ س − ص − ٣ = ٠

٣ محافظة الإسكندرية

أولاً أسئلة الاختيار من متعدد

(١) ب (٢) ب (٣) د (٤) أ (٥) جـ
(٦) جـ (٧) أ (٨) جـ (٩) د (١٠) أ

(١١) د (١٢) جـ (١٣) ب (١٤) أ (١٥) د
(١٦) أ (١٧) ب (١٨) د (١٩) أ (٢٠) د
(٢١) ب (٢٢) جـ (٢٣) ب (٢٤) أ (٢٥) جـ
(٢٦) ب (٢٧) جـ

ثانياً الأسئلة المقالية

١

∵ $ح_٣ = ٩$ ∴ أ $ر^٢$ = ٩ (١)

∵ $ح_٦ = ٢٤٣$ ∴ أ $ر^٥$ = ٢٤٣ (٢)

بقسمة (٢) ÷ (١):

∴ $ر^٣ = ٢٧$ ∴ ر = ٣

بالتعويض في (١): أ = ١

∴ المتتابعة هي (١ ، ٣ ، ٩ ، ...)

$ح_٨ = \frac{١ \times (٣^٨ - ١)}{٣ - ١} = ٣٢٨٠$

٢

دَ(س) = ٢ س − ١

ميل المماس = دَ(٢) = ٢ × ٢ − ١ = ٣

عند س = ٢ ∴ د(٢) = $٢^٢$ − ٢ = ٢

∴ نقطة المماس هي: (٢ ، ٢)

معادلة المماس هي $\frac{ص - ٢}{س - ٢} = ٣$

٣ س − ٦ = ص − ٢

∴ ٣ س − ص − ٤ = ٠

٤ محافظة القليوبية

أولاً أسئلة الاختيار من متعدد

(١) جـ (٢) ب (٣) ب (٤) د (٥) جـ
(٦) د (٧) ب (٨) ب (٩) أ (١٠) د
(١١) أ (١٢) جـ (١٣) د (١٤) ب (١٥) ب
(١٦) أ (١٧) ب (١٨) جـ (١٩) د (٢٠) ب
(٢١) جـ (٢٢) د (٢٣) جـ (٢٤) ب (٢٥) د
(٢٦) أ (٢٧) ب

ثانياً الأسئلة المقالية

١

∵ $ح_٧ = ٥١$ ∴ أ + ٦ء = ٥١ (١)

∵ $ح_{١١} = ١٠٥$ ∴ أ + ١٠ء = ١٠٥ (٢)

بحل المعادلتين (١) ، (٢) معًا:

∴ أ = ١٥ ، ء = ٦

∴ المتتابعة هي (١٥ ، ٢١ ، ٢٧ ، ...)

$ح_{١٠} = \frac{١٠}{٢} [٢ \times ١٥ + ٩ \times ٦] = ٤٢٠$

٢

∵ ص = $س^٣$ − ٢ $س^٢$ + ٥

∴ صَ = ٣ $س^٢$ − ٤ س

عند النقطة (١ ، ٤)

ميل المماس = ٣ × $١^٢$ − ٤ × ١ = −١

عند س = ١

∴ طا هـ = −١ ∴ هـ = ١٣٥°

٥ محافظة الشرقية

أولاً أسئلة الاختيار من متعدد

(١) د (٢) ب (٣) أ (٤) جـ (٥) جـ
(٦) أ (٧) ب (٨) ب (٩) جـ (١٠) د
(١١) د (١٢) أ (١٣) ب (١٤) ب (١٥) جـ
(١٦) د (١٧) أ (١٨) ب (١٩) ب (٢٠) د
(٢١) جـ (٢٢) أ (٢٣) أ (٢٤) جـ (٢٥) د
(٢٦) ب (٢٧) ب

ثانياً الأسئلة المقالية

١

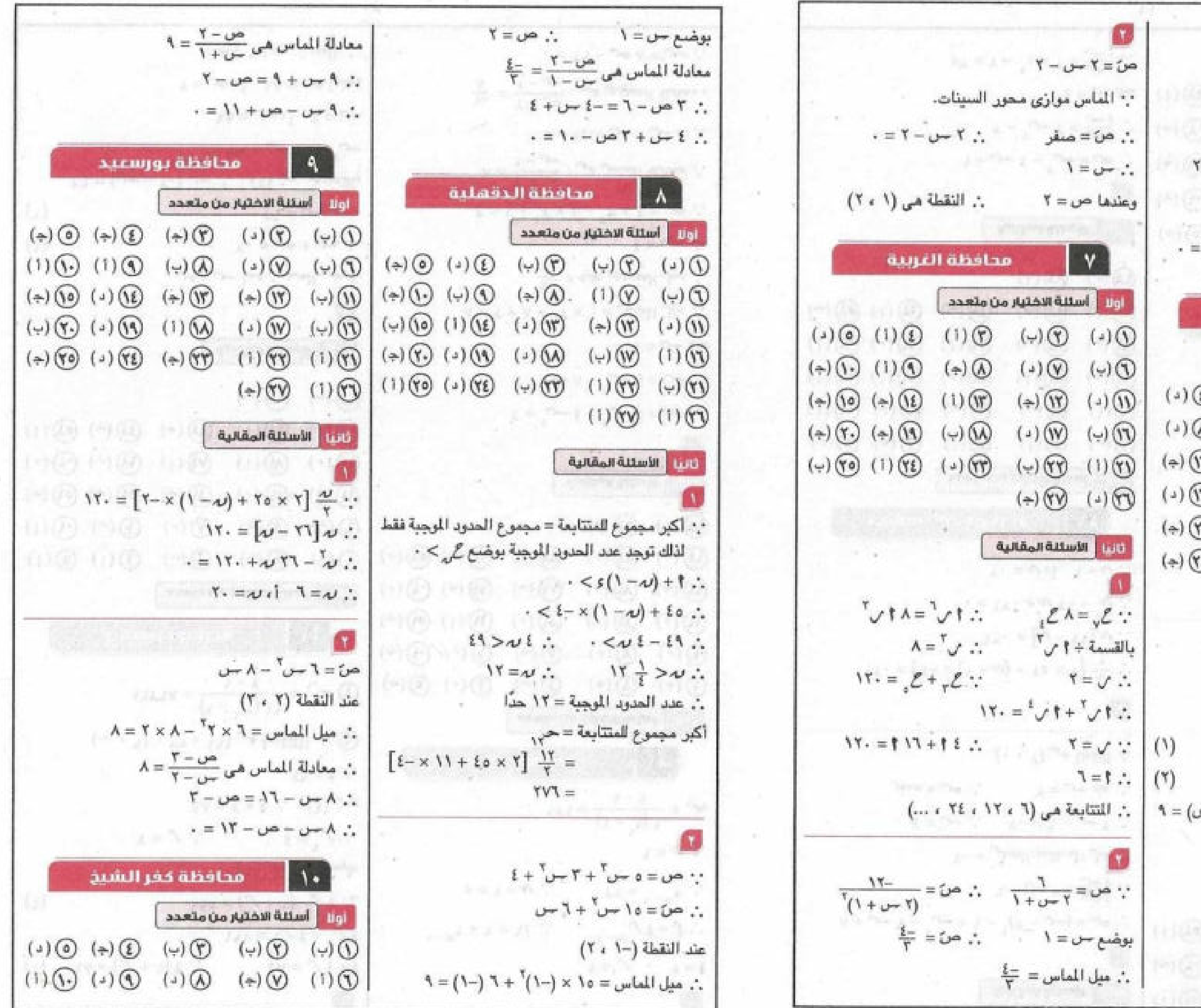
∵ $ح_٣ = ١١$ ∴ أ + ٢ء = ١١ (١)

∵ $ح_٦ = ٢٠$ ∴ أ + ٥ء = ٢٠ (٢)

بحل المعادلتين (١) ، (٢):

∴ أ = ٥ ، ء = ٣

∴ المتتابعة هي: (٥ ، ٨ ، ١١ ، ...)



٢

∵ ص = ٥ س² + ٢ س

صَ = ١٠ س + ٢

عند النقطة (٠ ، ٧)

ميل المماس = صَ عند س = ٠ = ١٠ × ٠ + ٢ = ٢

معادلة المماس هي : (ص − ٧) / (س − ٠) = ٢

∴ ٢ س = ص − ٧ ∴ ٢ س − ص + ٧ = ٠

٦ محافظة المنوفية

أولاً أسئلة الاختيار من متعدد

① (د) ② (جـ) ③ (د) ④ (د)
⑤ (د) ⑥ (أ) ⑦ (ب) ⑧ (د)
⑨ (أ) ⑩ (ب) ⑪ (ب) ⑫ (جـ)
⑬ (ب) ⑭ (جـ) ⑮ (أ) ⑯ (د)
⑰ (جـ) ⑱ (جـ) ⑲ (أ) ⑳ (جـ)
㉑ (د) ㉒ (ب) ㉓ (ب) ㉔ (جـ)
㉕ (جـ) ㉖ (جـ) ㉗ (أ)

ثانياً الأسئلة المقالية

١

بفرض العددين هما : س ، ص

∴ س + ص = ١٠ (١)

، س ص = ٩ (٢)

بالتعويض من (١) في (٢) : ∴ س (١٠ − س) = ٩

∴ س² − ١٠ س + ٩ = ٠

∴ (س − ٩) (س − ١) = ٠

∴ س = ٩ أ، س = ١

ومنها ص = ١ أ، ص = ٩

∴ العددان هما : ٩ ، ١

٢

صَ = ٢ س − ٢

∵ المماس موازي محور السينات.

∴ صَ = صفر ∴ ٢ س − ٢ = ٠

∴ س = ١

وعندها ص = ٢ ∴ النقطة هي (١ ، ٢)

٧ محافظة الغربية

أولاً أسئلة الاختيار من متعدد

① (د) ② (ب) ③ (أ) ④ (أ) ⑤ (د)
⑥ (ب) ⑦ (د) ⑧ (جـ) ⑨ (أ) ⑩ (جـ)
⑪ (د) ⑫ (جـ) ⑬ (أ) ⑭ (جـ) ⑮ (جـ)
⑯ (ب) ⑰ (د) ⑱ (ب) ⑲ (جـ) ⑳ (جـ)
㉑ (أ) ㉒ (ب) ㉓ (د) ㉔ (أ) ㉕ (ب)
㉖ (د) ㉗ (جـ)

ثانياً الأسئلة المقالية

١

∵ ح٧ = ٨ ح٤ ∴ أ ر⁶ = ٨ أ ر³

بالقسمة ÷ أ ر³ ∴ ر³ = ٨

∴ ر = ٢ ∵ ح٣ + ح٥ = ١٢٠

∴ أ ر² + أ ر⁴ = ١٢٠

∵ ر = ٢ ∴ ٤ أ + ١٦ أ = ١٢٠

∴ أ = ٦

∴ المتتابعة هي (٦ ، ١٢ ، ٢٤ ، ...)

٢

∵ ص = ٦ / (٢ س + ١) ∴ صَ = −١٢ / (٢ س + ١)²

بوضع س = ١ ∴ صَ = −٤/٣

∴ ميل المماس = −٤/٣

بوضع س = ١ ∴ ص = ٢

معادلة المماس هي (ص − ٢) / (س − ١) = −٤/٣

∴ ٣ ص − ٦ = −٤ س + ٤

∴ ٤ س + ٣ ص − ١٠ = ٠

٨ محافظة الدقهلية

أولاً أسئلة الاختيار من متعدد

① (د) ② (ب) ③ (ب) ④ (د) ⑤ (جـ)
⑥ (ب) ⑦ (أ) ⑧ (جـ) ⑨ (ب) ⑩ (جـ)
⑪ (د) ⑫ (جـ) ⑬ (د) ⑭ (أ) ⑮ (ب)
⑯ (أ) ⑰ (ب) ⑱ (د) ⑲ (د) ⑳ (جـ)
㉑ (ب) ㉒ (أ) ㉓ (ب) ㉔ (د) ㉕ (أ)
㉖ (أ) ㉗ (أ)

ثانياً الأسئلة المقالية

١

∵ أكبر مجموع للمتتابعة = مجموع الحدود الموجبة فقط

لذلك توجد عدد الحدود الموجبة بوضع حن > ٠

∴ أ + (ن − ١) ء > ٠

∴ ٤٥ + (ن − ١) × −٤ > ٠

∴ ٤٩ − ٤ ن > ٠ ∴ ٤ ن < ٤٩

∴ ن < ١٢ ١/٤ ∴ ن = ١٢

∴ عدد الحدود الموجبة = ١٢ حدًا

أكبر مجموع للمتتابعة = جـ١٢

= ١٢/٢ [٢ × ٤٥ + ١١ × −٤]

= ٢٧٦

٢

∵ ص = ٥ س³ + ٣ س² + ٤

∴ صَ = ١٥ س² + ٦ س

عند النقطة (−١ ، ٢)

∴ ميل المماس = ١٥ × (−١)² + ٦ (−١) = ٩

معادلة المماس هي (ص − ٢) / (س + ١) = ٩

∴ ٩ س + ٩ = ص − ٢

∴ ٩ س − ص + ١١ = ٠

٩ محافظة بورسعيد

أولاً أسئلة الاختيار من متعدد

① (ب) ② (د) ③ (جـ) ④ (جـ) ⑤ (جـ)
⑥ (ب) ⑦ (د) ⑧ (ب) ⑨ (أ) ⑩ (أ)
⑪ (ب) ⑫ (جـ) ⑬ (جـ) ⑭ (د) ⑮ (جـ)
⑯ (ب) ⑰ (د) ⑱ (أ) ⑲ (د) ⑳ (ب)
㉑ (أ) ㉒ (أ) ㉓ (جـ) ㉔ (د) ㉕ (جـ)
㉖ (أ) ㉗ (جـ)

ثانياً الأسئلة المقالية

١

∵ ن/٢ [٢ × ٢٥ + (ن − ١) × −٢] = ١٢٠

∴ ن [٢٦ − ن] = ١٢٠

∴ ن² − ٢٦ ن + ١٢٠ = ٠

∴ ن = ٦ أ، ن = ٢٠

٢

صَ = ٦ س² − ٨ س

عند النقطة (٢ ، ٣)

∴ ميل المماس = ٦ × ٢² − ٨ × ٢ = ٨

∴ معادلة المماس هي (ص − ٣) / (س − ٢) = ٨

∴ ٨ س − ١٦ = ص − ٣

∴ ٨ س − ص − ١٣ = ٠

١٠ محافظة كفر الشيخ

أولاً أسئلة الاختيار من متعدد

① (ب) ② (ب) ③ (ب) ④ (جـ) ⑤ (د)
⑥ (أ) ⑦ (جـ) ⑧ (د) ⑨ (د) ⑩ (أ)

(١١) (ب) (١٢) (جـ) (١٣) (جـ) (١٤) (ب) (١٥) (أ)
(١٦) (ب) (١٧) (جـ) (١٨) (د) (١٩) (د) (٢٠) (جـ)
(٢١) (ب) (٢٢) (جـ) (٢٣) (د) (٢٤) (ب) (٢٥) (أ)
(٢٦) (ب) (٢٧) (جـ)

ثانيا الأسئلة المقالية

١

∵ $ح_٣ = ١٦$ ∴ $أ ر^٢ = ١٦$

∵ $أ × (\frac{١}{٢})^٢ = ١٦$ ∴ أ = ٦٤

∴ المتتابعة هي (٦٤ ، ٣٢ ، ١٦ ، ...)

$ح_\infty = \frac{٦٤}{١ - \frac{١}{٢}} = ١٢٨$

٢

① ∵ $ص = (٦س^٢ + ٣س + ١)^{١٠}$

∴ $\frac{ءص}{ءس} = ١٠ (٦س^٢ + ٣س + ١)^٩ × (١٢س + ٣)$

$= ١٠ (١٢س + ٣)(٦س^٢ + ٣س + ١)^٩$

② ∵ $ص = \sqrt{٢س + ٣}$

∴ $\frac{ءص}{ءس} = \frac{٢}{٢\sqrt{٢س + ٣}} = \frac{١}{\sqrt{٢س + ٣}}$

١١ محافظة الفيوم

أولا أسئلة الاختيار من متعدد

(١) (د) (٢) (ب) (٣) (أ) (٤) (جـ) (٥) (جـ)
(٦) (جـ) (٧) (ب) (٨) (جـ) (٩) (جـ) (١٠) (جـ)
(١١) (جـ) (١٢) (ب) (١٣) (جـ) (١٤) (د) (١٥) (جـ)
(١٦) (أ) (١٧) (أ) (١٨) (جـ) (١٩) (ب) (٢٠) (جـ)
(٢١) (جـ) (٢٢) (ب) (٢٣) (جـ) (٢٤) (أ) (٢٥) (أ)
(٢٦) (أ) (٢٧) (أ)

ثانيا الأسئلة المقالية

١

∵ $ص = (س - ٣)^٢ - ١ = س^٢ - ٦س + ٨$

∴ $\frac{ءص}{ءس} = ٢س - ٦$

∵ ميل المستقيم المعطى = −٢

∴ ٢س − ٦ = −٢ ∴ س = ٢

∴ عند س = ٢ ∴ ص = صفر

∴ النقطة هي (٢ ، ٠)

٢

∵ $\frac{ن}{٢}[٢ × ٢٥ + (ن - ١) × -٢] = ١٢٠$

∴ ن [٢٦ − ن] = ١٢٠

∴ $ن^٢ - ٢٦ن + ١٢٠ = ٠$

∴ ن = ٦ أ، ن = ٢٠

١٢ محافظة بنى سويف

أولا أسئلة الاختيار من متعدد

(١) (ب) (٢) (أ) (٣) (أ) (٤) (جـ) (٥) (ب)
(٦) (أ) (٧) (ب) (٨) (ب) (٩) (د) (١٠) (أ)
(١١) (جـ) (١٢) (أ) (١٣) (د) (١٤) (أ) (١٥) (أ)
(١٦) (ب) (١٧) (ب) (١٨) (أ) (١٩) (د) (٢٠) (أ)
(٢١) (أ) (٢٢) (جـ) (٢٣) (ب) (٢٤) (أ) (٢٥) (ب)
(٢٦) (د) (٢٧) (أ)

ثانيا الأسئلة المقالية

١

∵ $ص = س^٣ - ٢س + ١$

∵ $\frac{ءص}{ءس} = ٣س^٢ - ٢$

عند س = ٥

∴ $\frac{ءص}{ءس} = ٣ × ٥^٢ - ٢ = ٧٣$

٢

أ = ٢ ، ر = ٢

∵ $ل = أ ر^{ن-١}$ ∴ $٦٤ = ٢ × ٢^{ن-١}$

∴ $٢^{ن-١} = ٣٢$ ∴ ن − ١ = ٥

∴ ن = ٦

$ح_٦ = \frac{٢(٢^٦ - ١)}{٢ - ١} = ١٢٦$

١٣ محافظة المنيا

أولا أسئلة الاختيار من متعدد

(١) (د) (٢) (جـ) (٣) (ب) (٤) (د) (٥) (جـ)
(٦) (د) (٧) (د) (٨) (جـ) (٩) (ب) (١٠) (جـ)
(١١) (د) (١٢) (د) (١٣) (د) (١٤) (أ) (١٥) (ب)
(١٦) (جـ) (١٧) (جـ) (١٨) (ب) (١٩) (جـ) (٢٠) (د)
(٢١) (د) (٢٢) (د) (٢٣) (أ) (٢٤) (جـ) (٢٥) (د)
(٢٦) (د) (٢٧) (ب)

ثانيا الأسئلة المقالية

١

∵ $ص = ٢س^٣ - ٤س^٢ + ٣$

∴ $ص' = ٦س^٢ - ٨س$

عند س = ٢

∴ ميل المماس = $٦ × ٢^٢ - ٨ × ٢ = ٨$

∴ ميل العمودى عليه = $-\frac{١}{٨}$

عند س = ٢

∴ $ص = ٢ × ٢^٣ - ٤ × ٢^٢ + ٣ = ٣$

∴ معادلة المماس هى: $\frac{ص - ٣}{س - ٢} = ٨$

∴ ٨س − ص − ١٣ = ٠

، معادلة العمودى هى: $\frac{ص - ٣}{س - ٢} = -\frac{١}{٨}$

∴ س + ٨ص − ٢٦ = ٠

٢

أ + أ ر = ٤٨ ∴ أ(١ + ر) = ٤٨ (١)

$أ ر^٢ + أ ر^٣ = ١٩٢$ ∴ $أ ر^٢ (١ + ر) = ١٩٢$ (٢)

بقسمة (٢) على (١):

∴ $ر^٢ = ٤$ ∴ ر = ٢

ومن (١): ∴ أ × ٣ = ٤٨

∴ أ = ١٦

① ∴ المتتابعة هى (١٦ ، ٣٢ ، ٦٤ ، ...)

② $ح_{١٠} = \frac{١٦(٢^{١٠} - ١)}{٢ - ١} = ١٦٣٦٨$

١٤ محافظة أسيوط

أولا أسئلة الاختيار من متعدد

(١) (د) (٢) (جـ) (٣) (ب) (٤) (أ) (٥) (أ)
(٦) (ب) (٧) (جـ) (٨) (د) (٩) (ب) (١٠) (أ)
(١١) (جـ) (١٢) (د) (١٣) (ب) (١٤) (ب) (١٥) (جـ)
(١٦) (د) (١٧) (أ) (١٨) (أ) (١٩) (ب) (٢٠) (د)
(٢١) (جـ) (٢٢) (أ) (٢٣) (جـ) (٢٤) (ب) (٢٥) (أ)
(٢٦) (جـ) (٢٧) (ب)

ثانيا الأسئلة المقالية

١

نفرض العددين هما س ، ص

∴ س + ص = ٢٠ (١)

، س ص = ٣٦ (٢)

بالتعويض من (١): ∴ س(٢٠ − س) = ٣٦

$س^٢ - ٢٠س + ٣٦ = ٠$

س = ٢ أ، س = ١٨

ومنها ص = ١٨ أ، ص = ٢

∴ العددان هما ٢ ، ١٨

٢

(أ) $\frac{(٢س + ٣)^٨}{٨ \times ٢} + ث = \frac{١}{١٦} (٢س + ٣)^٨ + ث$

(ب) $\frac{ءص}{ءس} = ٥ (٢س + ٣)^٤ \times ٢$

$= ١٠ (٢س + ٣)^٤$

عند س = −٢ $\therefore \frac{ءص}{ءس} = ١٠$

١٥ محافظة سوهاج

أولا أسئلة الاختيار من متعدد

① (ب)	② (د)	③ (جـ)	④ (جـ)	⑤ (أ)
⑥ (ب)	⑦ (د)	⑧ (جـ)	⑨ (ب)	⑩ (جـ)
⑪ (ب)	⑫ (ب)	⑬ (جـ)	⑭ (أ)	⑮ (د)
⑯ (د)	⑰ (جـ)	⑱ (ب)	⑲ (أ)	⑳ (د)
㉑ (ب)	㉒ (د)	㉓ (ب)	㉔ (ب)	㉕ (ب)
㉖ (جـ)	㉗ (ب)			

ثانيا الأسئلة المقالية

١

$\frac{ح_{ن+١}}{ح_ن} = \frac{٢ (−٣)^{ن+١−١}}{٢ (−٣)^{ن−١}} = −٣ =$ مقدار ثابت

$\therefore$ المتتابعة $(ح_ن)$ متتابعة هندسية أساسها = −٣

$\because ح_١ = ٢ ، ح_٢ = −٦$

$\therefore$ المتتابعة هى (٢ ، −٦ ، ١٨ ، ...)

$ح_٨ = \frac{٢ \left((−٣)^٨ − ١\right)}{−٣ − ١} = −٣٢٨٠$

٢

$\frac{ءص}{ءس} = (س − ٢) (٣س^٢) + (س^٣ − ٤)$

عند س = ٢ $\therefore \frac{ءص}{ءس} =$ ميل المماس = ٤

معادلة المماس هى $\frac{ص − ٠}{س − ٢} = ٤$

$\therefore ٤س − ص − ٨ = ٠$

الرياضيات

العامة

الجزء الخاص

بالإجابات

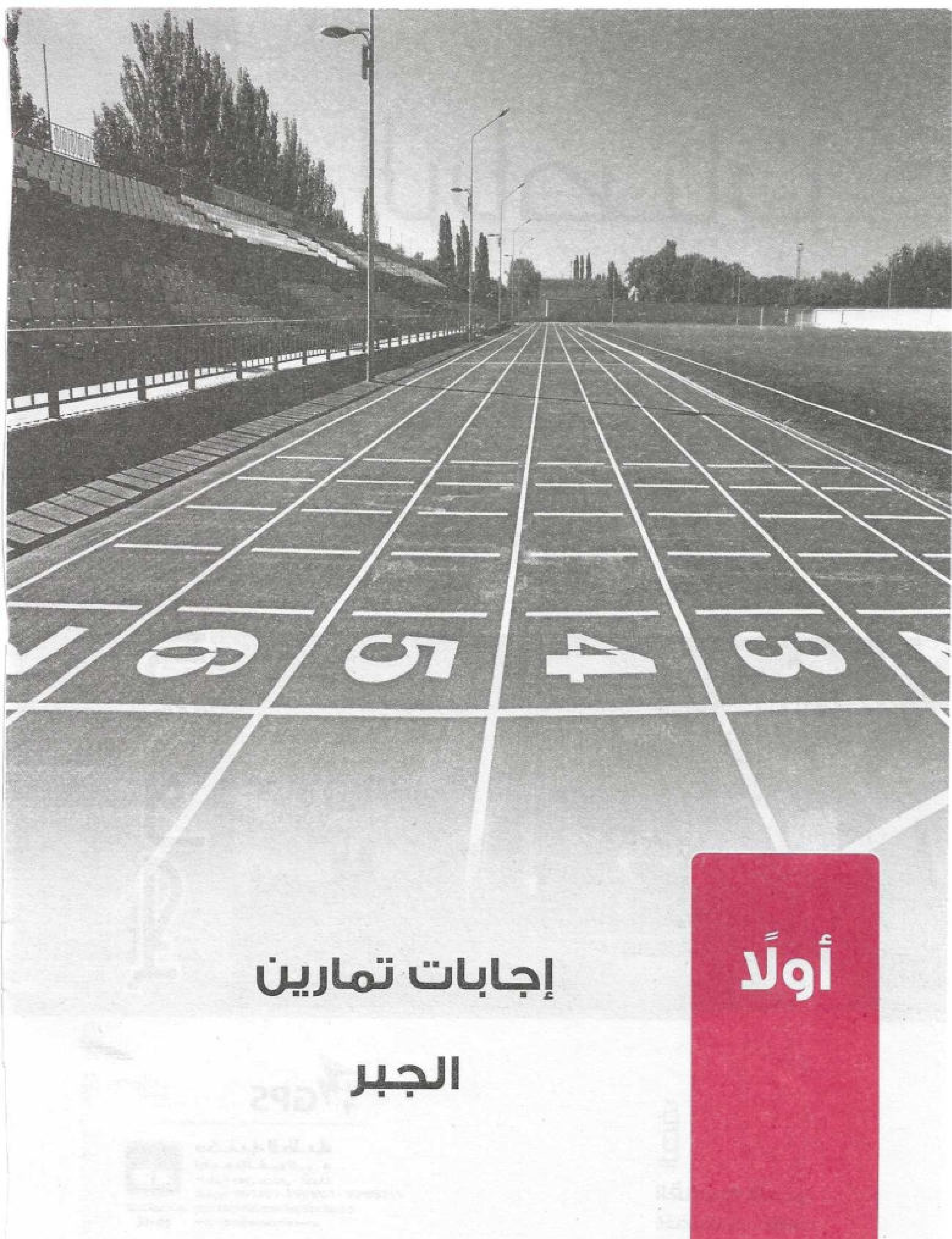


إعداد نخبة من خبراء التعليم

الصف الثانى الثانوى

القسم الأدبى

الفصل الدراسى الثانى



أولًا

إجابات تمارين

الجبر

إجابات الوحدة الأولى

إجابات تمارين 1

أولاً أسئلة الاختيار من متعدد

(١) (د) (٢) (ب) (٣) (ب) (٤) (جـ) (٥) (د)
(٦) (جـ) (٧) (د) (٨) (جـ) (٩) (أ) (١٠) (جـ)
(١١) (د) (١٢) (جـ) (١٣) (جـ) (١٤) (أ) (١٥) (جـ)
(١٦) (د) (١٧) (ب) (١٨) (ب) (١٩) (جـ) (٢٠) (د)
(٢١) (أ) (٢٢) (ب) (٢٣) (د)
(٢٤) أولاً : (د) ثانياً : (ب) ثالثاً : (د)
(٢٥) أولاً : (د) ثانياً : (ب) (٢٦) (ب) (٢٧) (أ)
(٢٨) (ب) (٢٩) (ب) (٣٠) (جـ) (٣١) (د) (٣٢) (ب)
(٣٣) (د) (٣٤) (د) (٣٥) (أ) (٣٦) (أ) (٣٧) (د)
(٣٨) (جـ) (٣٩) (أ) (٤٠) (أ) (٤١) (د) (٤٢) (ب)
(٤٣) (جـ)

ثانياً الأسئلة المقالية

١

(١) $ح_ن = ٢ \times \left(\frac{١}{٢}\right)^ن$ ∴ $ح_١ = ٢ \times \left(\frac{١}{٢}\right)^١ = ١$

، $ح_٢ = ٢ \times \left(\frac{١}{٢}\right)^٢ = \frac{١}{٢}$

، $ح_٣ = ٢ \times \left(\frac{١}{٢}\right)^٣ = \frac{١}{٤}$

، $ح_٤ = ٢ \times \left(\frac{١}{٢}\right)^٤ = \frac{١}{٨}$

، $ح_٥ = ٢ \times \left(\frac{١}{٢}\right)^٥ = \frac{١}{١٦}$

∴ الخمسة حدود الأولى هي : $\left(١ ، \frac{١}{٢} ، \frac{١}{٤} ، \frac{١}{٨} ، \frac{١}{١٦}\right)$

(٢) $ح_ن = \frac{(-١)^ن}{ن + ٣}$ ∴ $ح_١ = \frac{-١}{١ + ٣} = \frac{-١}{٤}$

، $ح_٢ = \frac{(-١)^٢}{٢ + ٣} = \frac{١}{٥}$ ، $ح_٣ = \frac{(-١)^٣}{٣ + ٣} = \frac{-١}{٦}$

، $ح_٤ = \frac{(-١)^٤}{٤ + ٣} = \frac{١}{٧}$ ، $ح_٥ = \frac{(-١)^٥}{٥ + ٣} = \frac{-١}{٨}$

∴ الخمسة حدود الأولى هي : $\left(\frac{-١}{٤} ، \frac{١}{٥} ، \frac{-١}{٦} ، \frac{١}{٧} ، \frac{-١}{٨}\right)$

(٣) $ح_ن = (-١)^ن (ن - ٢)^٢$

∴ $ح_١ = -(١ - ٢)^٢ = -١$

، $ح_٢ = (-١)^٢ (٢ - ٢)^٢ =$ صفر

، $ح_٣ = (-١)^٣ (٣ - ٢)^٢ = -١$

، $ح_٤ = (-١)^٤ (٤ - ٢)^٢ = ٤$

، $ح_٥ = (-١)^٥ (٥ - ٢)^٢ = -٩$

∴ الخمسة حدود الأولى هي : (−١ ، ٠ ، −١ ، ٤ ، −٩)

(٤) $ح_ن = \frac{(-١)^ن}{ن^٢}$ ∴ $ح_١ = \frac{-١}{(١)^٢} = -١$

، $ح_٢ = \frac{(-١)^٢}{(٢)^٢} = \frac{١}{٤}$ ، $ح_٣ = \frac{(-١)^٣}{(٣)^٢} = \frac{-١}{٩}$

، $ح_٤ = \frac{(-١)^٤}{(٤)^٢} = \frac{١}{١٦}$ ، $ح_٥ = \frac{(-١)^٥}{(٥)^٢} = \frac{-١}{٢٥}$

∴ الخمسة حدود الأولى هي : $\left(-١ ، \frac{١}{٤} ، \frac{-١}{٩} ، \frac{١}{١٦} ، \frac{-١}{٢٥}\right)$

٢

(١) (٢ ، ٤ ، ٦ ، ...)
(٢) (١٢ ، ١٥ ، ١٨ ، ... ، ٢٧)
(٣) (−١ ، −٣ ، −٥ ، ...)
(٤) (٥٥ ، ٦٠ ، ٦٥ ، ... ، ٨٠)

٣

(١) $ح_ن = ٢ن - ١$ ∴ $ح_١ = ٢ (١) - ١ = ١$

، $ح_٢ = ٢ (٢) - ١ = ٣$

، $ح_٣ = ٢ (٣) - ١ = ٥$

، $ح_٤ = ٢ (٤) - ١ = ٧$ ، $ح_٥ = ٢ (٥) - ١ = ٩$

∴ المتتابعة هي (١ ، ٣ ، ٥ ، ٧ ، ٩)

(٢) $ح_ن = ٢ - ٣ن$

∴ $ح_١ = ٢ - ٣ (١) = -١$

، $ح_٢ = ٢ - ٣ (٢) = -٤$

، $ح_٣ = ٢ - ٣ (٣) = -٧$ وهكذا

∴ المتتابعة هي (−١ ، −٤ ، −٧ ، ...)

(٣) $ح_ن = ن^٢$ ∴ $ح_١ = ١^٢ = ١$

، $ح_٢ = ٢^٢ = ٤$ ، $ح_٣ = ٣^٢ = ٩$

، $ح_٤ = ٤^٢ = ١٦$ ، $ح_٥ = ٥^٢ = ٢٥$

∴ المتتابعة هي (١ ، ٤ ، ٩ ، ١٦ ، ٢٥)

(٤) $ح_ن = ن^٣$ ∴ $ح_٢ = ٢^٣ = ٨$

، $ح_٣ = ٣^٣ = ٢٧$ ، $ح_٤ = ٤^٣ = ٦٤$ وهكذا

∴ المتتابعة هي (٨ ، ٢٧ ، ٦٤ ، ...)

٤

(١) ∵ $ح_{ن+١} = ٢ ح_ن$ ، $ح_١ = -١$

بوضع ن = ١ ∴ $ح_٢ = ٢ ح_١ = ٢ (-١) = -٢$

بوضع ن = ٢ ∴ $ح_٣ = ٢ ح_٢ = ٢ (-٢) = -٤$

بوضع ن = ٣ ∴ $ح_٤ = ٢ ح_٣ = ٢ (-٤) = -٨$

بوضع ن = ٤ ∴ $ح_٥ = ٢ ح_٤ = ٢ (-٨) = -١٦$

بوضع ن = ٥ ∴ $ح_٦ = ٢ ح_٥ = ٢ (-١٦) = -٣٢$

∴ الحدود الستة الأولى هي :

−١ ، −٢ ، −٤ ، −٨ ، −١٦ ، −٣٢

(٢) ∵ $ح_{ن+١} = \frac{-١}{ح_ن}$ ، $ح_١ = -١$

بوضع ن = ١ ∴ $ح_٢ = \frac{-١}{ح_١} = \frac{-١}{-١} = ١$

بوضع ن = ٢ ∴ $ح_٣ = \frac{-١}{ح_٢} = \frac{-١}{١} = -١$

بوضع ن = ٣ ∴ $ح_٤ = \frac{-١}{ح_٣} = \frac{-١}{-١} = ١$

بوضع ن = ٤ ∴ $ح_٥ = \frac{-١}{ح_٤} = \frac{-١}{١} = -١$

بوضع ن = ٥ ∴ $ح_٦ = \frac{-١}{ح_٥} = \frac{-١}{-١} = ١$

∴ الحدود الستة الأولى هي :

−١ ، ١ ، −١ ، ١ ، −١ ، ١

(٣) ∵ $ح_{ن+٢} = ح_{ن+١} + ح_ن$ ، $ح_١ = ٢$ ، $ح_٢ = ٥$

بوضع ن = ١ ∴ $ح_٣ = ح_٢ + ح_١ = ٥ + ٢ = ٧$

بوضع ن = ٢ ∴ $ح_٤ = ح_٣ + ح_٢ = ٧ + ٥ = ١٢$

بوضع ن = ٣ ∴ $ح_٥ = ح_٤ + ح_٣ = ١٢ + ٧ = ١٩$

بوضع ن = ٤ ∴ $ح_٦ = ح_٥ + ح_٤ = ١٩ + ١٢ = ٣١$

∴ الحدود الستة الأولى هي :

٢ ، ٥ ، ٧ ، ١٢ ، ١٩ ، ٣١

٥

(١) $ح_١ = ٣ (١) - ١$ ، $ح_٢ = ٣ (٢) - ١$

، $ح_٣ = ٣ (٣) - ١$ وهكذا

∴ النمط يتبع الحد العام للمتتابعة $(ح_ن)$

حيث $ح_ن = ٣ن - ١$

والحد التالى : $ح_٦ = ٣ (٦) - ١ = ١٧$

(٢) $ح_١ = ١$ ، $ح_٢ = ح_١ + ٢$ ، $ح_٣ = ح_٢ + ٣$

، $ح_٤ = ح_٣ + ٤$ وهكذا

∴ النمط يتبع الحد العام للمتتابعة $(ح_ن)$

حيث : $ح_١ = ١$ ، $ح_ن = ح_{ن-١} + ن$ ، $ن \geq ٢$

والحد التالى : $ح_٦ = ح_٥ + ٦ = ١٥ + ٦ = ٢١$

(٣) $ح_١ = ٢^٠$ ، $ح_٢ = ٢^١$ ، $ح_٣ = ٢^٢$ ، $ح_٤ = ٢^٣$ وهكذا

∴ النمط يتبع الحد العام للمتتابعة $(ح_ن)$

حيث $ح_ن = ٢^{ن-١}$

والحد التالى : $ح_٦ = ٢^{٦-١} = ٢^٥ = ٣٢$

④ $ح_١ = \left(\frac{١}{٢}\right)^{١}$ ، $ح_٢ = \left(\frac{١}{٢}\right)^{٢}$ ، $ح_٣ = \left(\frac{١}{٢}\right)^{٣}$

، $ح_٤ = \left(\frac{١}{٢}\right)^{٤}$ وهكذا

∴ النمط يتبع الحد العام للمتتابعة $(ح_ن)$

حيث $ح_ن = \left(\frac{١}{٢}\right)^{ن}$

والحد التالى : $ح_٦ = \left(\frac{١}{٢}\right)^{٦} = \frac{١}{٦٤}$

⑤ $ح_١ = ٢٠ + ٥\,(١)$ ، $ح_٢ = ٢٠ + ٥\,(٢)$

، $ح_٣ = ٢٠ + ٥\,(٣)$ ، $ح_٤ = ٢٠ + ٥\,(٤)$ وهكذا

∴ النمط يتبع الحد العام للمتتابعة $(ح_ن)$

حيث $ح_ن = ٢٠ + ٥ن$

والحد التالى : $ح_٦ = ٢٠ + ٥\,(٦) = ٥٠$

⑥ $ح_١ = ٦١ + ٤\,(١)$ ، $ح_٢ = ٦١ + ٤\,(٢)$

، $ح_٣ = ٦١ + ٤\,(٣)$ ، $ح_٤ = ٦١ + ٤\,(٤)$ وهكذا

∴ النمط يتبع الحد العام للمتتابعة $(ح_ن)$

حيث $ح_ن = ٦١ + ٤ن$

والحد التالى : $ح_٦ = ٦١ + ٤\,(٦) = ٨٥$

⑦ $ح_١ = ٣\,(-٢)^{٠}$ ، $ح_٢ = ٣\,(-٢)^{١}$ ، $ح_٣ = ٣\,(-٢)^{٢}$

، $ح_٤ = ٣\,(-٢)^{٣}$ وهكذا

∴ النمط يتبع الحد العام للمتتابعة $(ح_ن)$

حيث $ح_ن = ٣ \times (-٢)^{ن-١}$

والحد التالى : $ح_٦ = ٣ \times (-٢)^{٦-١} = -٩٦$

⑧ $ح_١ = (-١)^{١} \times ١$ ، $ح_٢ = (-١)^{٢} \times ٢$

، $ح_٣ = (-١)^{٣} \times ٣$ ، $ح_٤ = (-١)^{٤} \times ٤$ وهكذا

∴ النمط يتبع الحد العام للمتتابعة $(ح_ن)$ حيث

$ح_ن = (-١)^{ن} \times ن$

والحد التالى : $ح_٦ = (-١)^{٦} \times ٦ = ٦$

٦

① $\sum_{ر=١}^{٨} \left((-١)^{ر} + ٤ر\right)$

$= (-١ + ٤) + (١ + ٨) + (-١ + ١٢)$

$+ (١ + ١٦) + (-١ + ٢٠) + (١ + ٢٤)$

$+ (-١ + ٢٨) + (١ + ٣٢)$

$= ٣ + ٩ + ١١ + ١٧ + ١٩ + ٢٥ + ٢٧$

$+ ٣٣$

② $\sum_{ر=١}^{\infty} \left(\left(\frac{١}{٢}\right)^{ر-١}\right)$

$= \left(\frac{١}{٢}\right)^{٠} + \left(\frac{١}{٢}\right)^{١} + \left(\frac{١}{٢}\right)^{٢} + \left(\frac{١}{٢}\right)^{٣} + \cdots$

$= ١ + \frac{١}{٢} + \frac{١}{٤} + \frac{١}{٨} + \cdots$

③ $\sum_{ر=١}^{\infty} \left(\frac{١}{ر} - \frac{١}{ر+١}\right)$

$= \left(١ - \frac{١}{٢}\right) + \left(\frac{١}{٢} - \frac{١}{٣}\right) + \left(\frac{١}{٣} - \frac{١}{٤}\right)$

$+ \left(\frac{١}{٤} - \frac{١}{٥}\right) + \cdots$

$= \frac{١}{٢} + \frac{١}{٦} + \frac{١}{١٢} + \frac{١}{٢٠} + \cdots$

④ $\sum_{ر=٢}^{\infty} \left((-١)^{ر+١}\,(ر)\right)$

$= (-١)^{٣} \times ٢ + (-١)^{٤} \times ٣ + (-١)^{٥}$

$\times ٤ + (-١)^{٦} \times ٥ + \cdots$

$= (-٢) + ٣ + (-٤) + ٥ + \cdots$

٧

① $\sum_{ر=١}^{٤} (ر^{٢})$

$= ١^{٢} + ٢^{٢} + ٣^{٢} + ٤^{٢}$

$= ١ + ٤ + ٩ + ١٦ = ٣٠$

② $\sum_{ر=١}^{٧} (٢ر - ١)$

$= (٢ - ١) + (٤ - ١) + (٦ - ١)$

$+ (٨ - ١) + (١٠ - ١) + (١٢ - ١)$

$+ (١٤ - ١)$

$= ١ + ٣ + ٥ + ٧ + ٩ + ١١ + ١٣ = ٤٩$

③ $\sum_{ر=١}^{٥} (١ - ر^{٢})$

$= (١ - ١) + (١ - ٤) + (١ - ٩)$

$+ (١ - ١٦) + (١ - ٢٥)$

$= ٠ - ٣ - ٨ - ١٥ - ٢٤ = -٥٠$

④ $\sum_{ك=٣}^{٩} (٣ك + ١)$

$= (٣\,(٣) + ١) + (٣\,(٤) + ١) + (٣\,(٥) + ١)$

$+ (٣\,(٦) + ١) + (٣\,(٧) + ١) + (٣\,(٨) + ١)$

$+ (٣\,(٩) + ١)$

$= ١٠ + ١٣ + ١٦ + ١٩ + ٢٢ + ٢٥ + ٢٨$

$= ١٣٣$

٨

① $\sum_{ر=١}^{٤} (ر + ١)^{٢}$

$= (١ + ١)^{٢} + (٢ + ١)^{٢} + (٣ + ١)^{٢}$

$+ (٤ + ١)^{٢} = ٤ + ٩ + ١٦ + ٢٥ = ٥٤$

② $\sum_{ر=٥}^{٩} (٣ \times ٢^{ر-١})$

$= ٣\,(٢)^{٤} + ٣\,(٢)^{٥} + ٣\,(٢)^{٦} + ٣\,(٢)^{٧}$

$+ ٣\,(٢)^{٨}$

$= ٣ \times ١٦ + ٣ \times ٣٢ + ٣ \times ٦٤$

$+ ٣ \times ١٢٨ + ٣ \times ٢٥٦ = ١٤٨٨$

③ $\sum_{ر=٣}^{٧} (٢ر + ٣)$

$= (٢\,(٣) + ٣) + (٢\,(٤) + ٣)$

$+ (٢\,(٥) + ٣) + (٢\,(٦) + ٣)$

$+ (٢\,(٧) + ٣)$

$= ٩ + ١١ + ١٣ + ١٥ + ١٧ = ٦٥$

④ $\sum_{ر=٢}^{٦} (ر^{٢} - ٢)$

$= (٢^{٢} - ٢) + (٣^{٢} - ٢) + (٤^{٢} - ٢)$

$+ (٥^{٢} - ٢) + (٦^{٢} - ٢)$

$= ٢ + ٧ + ١٤ + ٢٣ + ٣٤ = ٨٠$

⑤ $\sum_{ر=١}^{٥} \left(٣ \times \left(\frac{١}{٢}\right)^{ر+١}\right)$

$= ٣ \times \left(\frac{١}{٢}\right)^{٢} + ٣\left(\frac{١}{٢}\right)^{٣} + ٣ \times \left(\frac{١}{٢}\right)^{٤}$

$+ ٣ \times \left(\frac{١}{٢}\right)^{٥} + ٣ \times \left(\frac{١}{٢}\right)^{٦}$

$= \frac{٣}{٤} + \frac{٣}{٨} + \frac{٣}{١٦} + \frac{٣}{٣٢} + \frac{٣}{٦٤} = \frac{٩٣}{٦٤}$

⑥ $\sum_{ر=١}^{٨} \left(-\frac{١}{٢}\right)^{ر}$

$= \left(-\frac{١}{٢}\right)^{١} + \left(-\frac{١}{٢}\right)^{٢} + \left(-\frac{١}{٢}\right)^{٣}$

$+ \left(-\frac{١}{٢}\right)^{٤} + \left(-\frac{١}{٢}\right)^{٥} + \left(-\frac{١}{٢}\right)^{٦}$

$+ \left(-\frac{١}{٢}\right)^{٧} + \left(-\frac{١}{٢}\right)^{٨}$

$= \frac{-١}{٢} + \frac{١}{٤} + \frac{-١}{٨} + \frac{١}{١٦} + \frac{-١}{٣٢} + \frac{١}{٦٤}$

$+ \frac{-١}{١٢٨} + \frac{١}{٢٥٦} = \frac{-٨٥}{٢٥٦}$

٩

① $\sum_{ر=١}^{٤} (٢ر)$

② $\sum_{ر=١}^{٩} (٥ر)$

③ $\sum_{ر=١}^{\infty} \left(\frac{١}{٢}\right)^{ر-٢}$

تطبيقات حياتية

١

① الخمسة حدود الأولى هى :

(٨ ، ١٠ ، ١٢ ، ١٤ ، ١٦)

② $ح_ن = ٦ + ٢ن$

③ فى اليوم السابع : بوضع $ن = ٧$

∴ $ح_٧ = ٦ + ٢ \times ٧ = ٢٠$ دقيقة

④ عندما $ح_ن = ٣٠$ دقيقة ∴ $٦ + ٢ن = ٣٠$

∴ $ن = ١٢$ أى فى اليوم الثانى عشر

٢

عدد المكعبات المستخدمة فى بناء الهرم

$= \sum_{ر=١}^{ن} (ر)$ وعند ن = ١٠

∴ عدد المكعبات = $\sum_{ر=١}^{١٠} ر$ = ١ + ٢ + ٣ + ٤ + ٥

+ ٦ + ٧ + ٨ + ٩ + ١٠

= ٥٥ مكعبًا

٣

محيط المثلث الأكبر = ٣٢ × ٣

، محيط المثلث التالى له = $\frac{١}{٢}$ × ٣٢ × ٣ وهكذا

① متسلسلة محيطات المثلثات

$= \sum_{ر=١}^{٣} \left(\frac{١}{٢}\right)^{ر-١}$ × ٣ × ٣٢

$= \sum_{ر=١}^{٣}$ ٣ × $(٢)^{٦-ر}$

② محيط المثلث الرابع

$= \left(\frac{١}{٢}\right)^{٣}$ × ٣ × ٣٢ = ١٢ سم

③ مجموع محيطات الأربع مثلثات الأولى

$= \sum_{ر=١}^{٤}$ ٣ × $(٢)^{٦-ر}$ = ٣ × $٢^{٥}$ + ٣ × $٢^{٤}$

+ ٣ × $٢^{٣}$ + ٣ × $٢^{٢}$

= ١٨٠ سم

إجابات تمارين 2

أولا أسئلة الاختيار من متعدد

① (ج) ② (ج) ③ (د) ④ (ج) ⑤ (د)

⑥ (ب) ⑦ (ج) ⑧ (ب) ⑨ (ج) ⑩ (ج)

⑪ (ج) ⑫ (ج) ⑬ (ب) ⑭ (ج) ⑮ (ج)

⑯ (ج) ⑰ (ب) ⑱ (ج) ⑲ (ج) ⑳ (أ)

(٢١) (ج) (٢٢) (ب) (٢٣) (ب) (٢٤) (ج) (٢٥) (أ)

(٢٦) (ج) (٢٧) (ب) (٢٨) (أ) (٢٩) (ج) (٣٠) (أ)

(٣١) (ج) (٣٢) (د) (٣٣) (ب) (٣٤) (أ) (٣٥) (ج)

(٣٦) (ج) (٣٧) (ب) (٣٨) (ج) (٣٩) (د) (٤٠) (ج)

(٤١) (د) (٤٢) (ب) (٤٣) (د) (٤٤) (ب) (٤٥) (ب)

(٤٦) (أ) (٤٧) (ج) (٤٨) (ب) (٤٩) (ب) (٥٠) (ب)

(٥١) (أ) (٥٢) (ج) (٥٣) (أ) (٥٤) (ج) (٥٥) (ج)

(٥٦) (د) (٥٧) (أ)

ثانيا الأسئلة المقالية

تمارين على المتتابعة الحسابية

١

① حسابية ، $ح_{ن}$ = ٩ + ٤ (ن − ١) = ٤ ن + ٥

② ∵ (١٢ − ٧) ≠ (٧ − ٤)

∴ المتتابعة ليست حسابية

③ حسابية ، $ح_{ن}$ = −٥ + (ن − ١) (−٦) = −٦ ن + ١

④ ∵ $\left(\frac{١}{٢} - \frac{١}{٢}\right) \neq \left(\frac{١}{٤} - \frac{١}{٢}\right)$

∴ المتتابعة ليست حسابية

⑤ حسابية

، $ح_{ن}$ = (س + ٢ ص) + (ن − ١) (٢ س + ص)

= س + ٢ ص + (٢ س + ص) ن

− ٢ س − ص

= − س + ص + (٢ س + ص) ن

⑥ حسابية ثابتة أساسها = صفر ، $ح_{ن}$ = ٧

٢

① $ح_{ن+١} - ح_{ن}$ = [٥ (ن + ١) + ٢] − (٥ ن + ٢)

= ٥ ن + ٥ + ٢ − ٥ ن − ٢ = ٥ (مقدار ثابت)

∴ ($ح_{ن}$) متتابعة حسابية والأساس = ٥

، $ح_{١}$ = ٧ ، $ح_{٢}$ = ١٢ ، $ح_{٣}$ = ١٧

② $ح_{ن+١} - ح_{ن}$ = $\left(١ - \frac{٣}{٢}(ن + ١)\right) - \left(١ - \frac{٣}{٢} ن\right)$

= $\left(١ - \frac{٣}{٢} ن - \frac{٣}{٢} - ١ + \frac{٣}{٢} ن\right)$

= − $\frac{٣}{٢}$ (مقدار ثابت)

∴ ($ح_{ن}$) حسابية والأساس = − $\frac{٣}{٢}$

، $ح_{١}$ = $\frac{-١}{٢}$ ، $ح_{٢}$ = −٢ ، $ح_{٣}$ = − ٣ $\frac{١}{٢}$

③ $ح_{ن+١} - ح_{ن}$ = ٣ × $٧^{ن+٢}$ − ٣ × $٧^{ن+١}$

= ٣ × $٧^{ن+١}$ (٧ − ١) = ١٨ × $٧^{ن+١}$ ≠ مقدار ثابت

∴ ($ح_{ن}$) ليست حسابية.

④ $ح_{ن} = \frac{(ن - ٥)(ن + ٥)}{ن + ٥}$ ، ∵ (ن + ٥) ≠ صفر

∴ $ح_{ن}$ = ن − ٥

، ∵ $ح_{ن+١} - ح_{ن}$ = (ن + ١ − ٥) − (ن − ٥)

= ١ (مقدار ثابت)

∴ ($ح_{ن}$) حسابية والأساس = ١

، $ح_{١}$ = −٤ ، $ح_{٢}$ = −٣ ، $ح_{٣}$ = −٢

٣

∵ (٥٠ س − ٩) − (١٦ + ٤٠ س)

= (٥ س + ٦) − (٣ س + ١٥)

∴ ١٠ س − ٢٥ = ٢ س − ٩

∴ ٨ س = ١٦ ∴ س = ٢

∴ المتتابعة هى (٩٦ ، ٩١ ، ... ، ٢١ ، ١٦)

، بوضع $ح_{ن}$ = ١٦

∴ ٩٦ + (ن − ١) (−٥) = ١٦

∴ (ن − ١) (−٥) = −٨٠

∴ ن − ١ = ١٦ ∴ ن = ١٧

∴ عدد حدود المتتابعة = ١٧ حدًا

٤

$ح_{ن}$ = ٦٣ + (ن − ١) × −٤

∴ $ح_{٧}$ = ٦٣ + ٦ × −٤ = ٣٩

، بفرض أن عدد الحدود = ن ∴ $ح_{ن}$ = −١٣٣

∴ ٦٣ + (ن − ١) × −٤ = −١٣٣

∴ −٤ ن + ٦٧ = −١٣٣

∴ ن = ٥٠

أى أن عدد حدود المتتابعة = ٥٠ حدًا

٥

أ = ٨ ، ء = ١١ − ٨ = ٣

، ∵ $ح_{ن}$ = ٥٠ ∴ ٨ + (ن − ١) (٣) = ٥٠

∴ (ن − ١) (٣) = ٤٢

∴ ن − ١ = ١٤ ∴ ن = ١٥

∴ عدد حدود المتتابعة = ١٥ حدًا

، $ح_{١٠}$ من النهاية (أ = ٥٠ ، ء = −٣)

= ٥٠ + ٩ × (−٣) = ٢٣

٦

$ح_{ن}$ < ٠ ∴ ١١ − ٢ (ن − ١) < ٠

∴ −٢ ن < −١٣ ∴ ن > ٦ $\frac{١}{٢}$

∴ ن = ٧ ، ٨ ، ٩ ، ...

∴ $ح_{٧}$ هو أول حد سالب

، $ح_{٧}$ = ١١ + ٦ (−٢) = −١

٧

$ح_{ن}$ > ٠

∴ − ٥١ + ٣ (ن − ١) > ٠

∴ ٣ ن > ٥٤ ∴ ن > ١٨

∴ ن = ١٩ ، ٢٠ ، ...

∴ $ح_{١٩}$ هو أول حد موجب

، $ح_{١٩}$ = − ٥١ + ٣ × ١٨ = ٣

٨

ع_ن < ٠ ∴ -٣٩ + ٥ (ن - ١) < ٠

∴ ن < ٨ ٤/٥ ∴ ن = ٨ أ، ٧ أ، .....

∴ ع_٨ هو آخر حد سالب

، ع_٨ = -٣٩ + ٥ × ٧ = -٤

٩

ع_ن < ٠ ∴ -٤٧ + ٥ (ن - ١) < ٠

∴ ٥ن < ٥٢ ∴ ن < ١٠ ٢/٥

∴ ن = ١٠ أ، ٩ أ، ... ∴ آخر حد سالب ع_١٠

∴ عدد الحدود السالبة = ١٠

١٠

∵ ع_ن > ٠ ∴ ٧٢ - ٩ (ن - ١) > ٠

∴ ٨١ > ٩ن ∴ ن < ٩

∴ عدد الحدود الموجبة = ٨

١١

نفرض أن ع_ن = ١٠٠ ∴ ١٢ + ٤ (ن - ١) = ١٠٠

∴ ٤ن = ٩١ ∴ ن = ٩١/٤ ∉ ص+

∴ لا يوجد حد قيمته ١٠٠ في المتتابعة المعطاة

١٢

① الصواب : لكل ن ∈ ص+ - {١}

② الصواب هو أ هو أساس المتتابعة الحسابية وليس ب

تمارين على تعيين المتتابعة الحسابية

١٣

أ + ٦ء = ١٨ (١)

، أ + ١٤ء = ٣٤ (٢)

بطرح (١) من (٢) : ∴ ٨ء = ١٦

∴ ء = ٢ ، أ = ٦

∴ المتتابعة هي : (٦ ، ٨ ، ١٠ ، ...)

١٤

∵ أ + ٧ء = ١١ (١)

، ع_١٠ + ع_١٧ = صفر

∴ أ + ٩ء + أ + ١٦ء = صفر

∴ ٢أ + ٢٥ء = صفر (٢)

بضرب (١) × ٢ وبالطرح من (٢)

∴ ١١ء = -٢٢

∴ ء = -٢ ، أ = ٢٥

∴ المتتابعة هي : (٢٥ ، ٢٣ ، ٢١ ، ...)

١٥

أ + ٤ء = ٢١ (١)

، ع_١ = ٣ع_٩ ∴ أ + ٩ء = ٣ (أ + ء)

∴ ٢أ - ٦ء = ٠ ∴ أ - ٣ء = ٠ (٢)

بطرح (٢) من (١) : ∴ ٧ء = ٢١

∴ ء = ٣ ، أ = ٩

∴ المتتابعة هي : (٩ ، ١٢ ، ١٥ ، ...)

١٦

أ + ٣ء = ١١ (١)

، ∵ ع_٥ + ع_٩ = ٤٠ ∴ أ + ٤ء + أ + ٨ء = ٤٠

∴ ٢أ + ١٢ء = ٤٠ ∴ أ + ٦ء = ٢٠ (٢)

بطرح (١) من (٢) : ∴ ٣ء = ٩

∴ ء = ٣ ، أ = ٢

∴ المتتابعة هي : (٢ ، ٥ ، ٨ ، ...)

، بفرض ع_ن = ١٥٢

∴ ٢ + ٣ × (ن - ١) = ١٥٢

∴ ٣ن - ١ = ١٥٢ ∴ ن = ٥١

١٧

∵ أ + ء + أ + ٢ء = ٤

∴ ٢أ + ٣ء = ٤

∴ أ + ٢ء = ٢ (١)

، أ + ٥ء + أ + ٦ء + أ + ٧ء = ٥٤

∴ ٣أ + ١٨ء = ٥٤ ∴ أ + ٦ء = ١٨ (٢)

، بطرح (١) من (٢) :

∴ ٤ء = ١٦ ∴ ء = ٤ ، أ = -٦

∴ المتتابعة هي : (-٦ ، -٢ ، ٢ ، ...)

١٨

∵ أ - أ - ٥ء = ٢٥ ∴ ء = -٥ (١)

، ∵ أ + ٦ء + أ + ٧ء = ٩٥ ∴ ٢أ + ١٣ء = ٩٥

ومن (١) : ∴ ٢أ = ١٦٠ ∴ أ = ٨٠

∴ المتتابعة هي : (٨٠ ، ٧٥ ، ٧٠ ، ...)

، ∵ ع_ن < ٠

∴ ٨٠ - ٥ (ن - ١) < ٠ ∴ ٥ن > ٨٥

∴ ن > ١٧

∴ ن = ١٨ أ، ١٩ أ، ٢٠ أ، ...

∴ ع_١٨ هو أول حد سالب

، ع_١٨ = ٨٠ - ٥ × ١٧ = -٥

١٩

∵ أ + ٥ء = ٢٠ (١)

، (أ + ٣ء)/(أ + ٩ء) = ٤/٧

∴ ٤أ + ٣٦ء = ٧أ + ٢١ء

∴ ٣أ - ١٥ء = ٠ (٢)

بضرب (١) × ٣ والجمع على (٢)

∴ ٦أ = ٦٠ ∴ أ = ١٠ ، ء = ٢

∴ المتتابعة هي : (١٠ ، ١٢ ، ١٤ ، ...)

٢٠

∵ (أ + ء) + (أ + ٤ء) = ٤

∴ ٢أ + ٥ء = ٤ ∴ أ = (٤ - ٥ء)/٢ (١)

، ∵ (أ + ٢ء) (أ + ٥ء) = ٧ (٢)

، بالتعويض من (١) في (٢) :

∴ ((٤ - ٥ء)/٢ + ٤ء/٢) ((٤ - ٥ء)/٢ + ١٠ء/٢) = ٧

∴ (٤ - ء) (٤ + ٥ء) = ٢٨

∴ ١٦ + ١٦ء - ٥ء² - ٢٨ = صفر

∴ ٥ء² - ١٦ء + ١٢ = صفر

∴ (٥ء - ٦) (ء - ٢) = صفر

∴ ء = ٦/٥ ومنها أ = -١ أو ء = ٢ ومنها أ = -٣

∴ المتتابعة هي : (-١ ، ١/٥ ، ٧/٥ ، ...)

أو (-٣ ، -١ ، ١ ، ...)

٢١

∵ أ + ء + أ + ٣ء = ٤٢ ∴ ٢أ + ٤ء = ٤٢

∴ أ + ٢ء = ٢١ (١)

، (أ + ٢ء) (أ + ٤ء) = ٣١٥

، من (١) : ∴ ٢١ (أ + ٤ء) = ٣١٥

∴ أ + ٤ء = ١٥ (٢)

بطرح (١) من (٢) :

∴ ٢ء = -٦ ∴ ء = -٣ ، أ = ٢٧

∴ المتتابعة هي : (٢٧ ، ٢٤ ، ٢١ ، ...)

٢٢

∵ (أ + ء) + (أ + ٢ء) = ١٥

∴ ٢أ + ٣ء = ١٥ ∴ أ = (١٥ - ٣ء)/٢ (١)

، ∵ ع_٥² = ٢٢٥ ∴ (أ + ٤ء)² = ٢٢٥ (٢)

وبالتعويض من (١) في (٢) :

∴ ((١٥ - ٣ء)/٢ + ٨ء/٢)² = ٢٢٥

∴ ء = $\frac{١٥ + ٥ء}{٢}$ = ±١٥ ∴ ء = ٣ ومنها أ = ٣

أ، ء = −٩ (مرفوض لأن المتتابعة تزايدية)

∴ المتتابعة هى : (٣ ، ٦ ، ٩ ، ...)

٢٣

∵ أ (أ + ٣ء) = ٤٥

∴ $أ^{٢}$ + ٣أء = ٤٥ (١)

، ∵ (أ + ٢ء) (أ + ٩ء) − (أ + ٣ء) (أ + ٦ء) = ٢٤

∴ $أ^{٢}$ + ١١أء + ١٨$ء^{٢}$ − $أ^{٢}$ − ٩أء − ١٨$ء^{٢}$ = ٢٤

∴ ٢أء = ٢٤ ∴ أء = ١٢ وبالتعويض فى (١)

∴ $أ^{٢}$ + ٣٦ = ٤٥ ∴ $أ^{٢}$ = ٩

∴ أ = −٣ (مرفوض) أ، أ = ٣ ومنها ء = ٤

∴ المتتابعة هى : (٣ ، ٧ ، ١١ ، ...)

٢٤

∵ عدد الحدود = ٢١ ∴ $ح_{١١}$ هو الحد الأوسط

∴ أ + ١٠ء = ٣٢ (١)

، $ح_{٢١}$ + $ح_{٢٠}$ + $ح_{١٩}$ = ١٧٧

∴ أ + ٢٠ء + أ + ١٩ء + أ + ١٨ء = ١٧٧

∴ ٣أ + ٥٧ء = ١٧٧

∴ أ + ١٩ء = ٥٩ (٢)

وبطرح (١) من (٢) : ∴ ٩ء = ٢٧

∴ ء = ٣ ومنها أ = ٢

∴ المتتابعة هى : (٢ ، ٥ ، ٨ ، ...)

٢٥

∵ (أ + ء) + (أ + ٢ء) = −٧ ∴ ٢أ + ٣ء = −٧

∴ أ = $\frac{−٧ − ٣ء}{٢}$ (١)

، $(أ + ء)^{٢}$ + $(أ + ٢ء)^{٢}$ = ٢٩ وبالتعويض من (١)

∴ $\left(\frac{−٧ − ٣ء}{٢} + \frac{٢ء}{٢}\right)^{٢} + \left(\frac{−٧ − ٣ء}{٢} + \frac{٤ء}{٢}\right)^{٢}$ = ٢٩

∴ $\left(\frac{−٧ − ء}{٢}\right)^{٢} + \left(\frac{−٧ + ء}{٢}\right)^{٢}$ = ٢٩

∴ $\frac{٤٩ + ١٤ء + ء^{٢}}{٤} + \frac{٤٩ − ١٤ء + ء^{٢}}{٤}$ = ٢٩

∴ ٩٨ + ٢$ء^{٢}$ = ١١٦

∴ $ء^{٢}$ = ٩ ∴ ء = ±٣

عندما ء = ٣ فإن : أ = −٨

∴ المتتابعة هى : (−٨ ، −٥ ، −٢ ، ...)

، عندما ء = −٣ فإن : أ = ١

∴ المتتابعة هى : (١ ، −٢ ، −٥ ، ...)

٢٦

نفرض أن الأعداد هى : أ − ٣ء ، أ − ء ، أ + ء ، أ + ٣ء

∴ (أ − ٣ء) + (أ − ء) + (أ + ء) + (أ + ٣ء) = ٣٦

∴ ٤أ = ٣٦ ∴ أ = ٩

، ∵ $(أ − ٣ء)^{٢}$ + $(أ − ء)^{٢}$ + $(أ + ء)^{٢}$ + $(أ + ٣ء)^{٢}$ = ٣٤٤

∴ ٤$أ^{٢}$ + ٢٠$ء^{٢}$ = ٣٤٤

∴ ٤ × ٨١ + ٢٠$ء^{٢}$ = ٣٤٤

∴ $ء^{٢}$ = ١ ∴ ء = ±١

∴ الأعداد هى : ٦ ، ٨ ، ١٠ ، ١٢

٢٧

نفرض الثلاثة أعداد هى : أ − ء ، أ ، أ + ء

∴ أ − ء + أ + أ + ء = ٣٣ ∴ ٣أ = ٣٣

∴ أ = ١١

، (أ − ء) (أ) (أ + ء) = ٧٩٢

∴ (أ) ($أ^{٢}$ − $ء^{٢}$) = ٧٩٢

∴ ١١ (١٢١ − $ء^{٢}$) = ٧٩٢ ∴ ١٢١ − $ء^{٢}$ = ٧٢

∴ $ء^{٢}$ = ٤٩ ∴ ء = ٧ أ، −٧

∴ الأعداد هى : ٤ ، ١١ ، ١٨

٢٨

أول عدد يقبل القسمة على ١١ بين ١١٠ ، ٤٥٠ هو ١٢١ وآخر عدد هو ٤٤٠ نفرض متتابعة حسابية حدها الأول ١٢١ وأساسها ١١ وحدها الأخير ٤٤٠

∴ ٤٤٠ = ١٢١ + ١١ (ن − ١) ∴ ١١ن = ٣٣٠

∴ ن = ٣٠

∴ عدد الأعداد المطلوبة = ٣٠ عدداً

٢٩

∵ أ = ٣ ، ٣ + (ن − ١) ء = ٣٩

∴ نء − ء = ٣٦ ∴ ٢نء − ٢ء = ٧٢ (١)

، ٣ + (٢ن − ١) ء = ٧٩

∴ ٢نء − ء = ٧٦ (٢)

بطرح (١) من (٢) : ∴ ء = ٤

∴ ٤ن − ٤ = ٣٦ ∴ ن = ١٠

∴ المتتابعة هى : (٣ ، ٧ ، ١١ ، ...)

٣٠

∵ أ = ٧ ، $ح_{١١}$ من البداية = ٤٧

∴ ٧ + ١٠ء = ٤٧ ∴ ء = ٤

، ∵ $ح_{١١}$ من النهاية = ٣٩٥

∴ ل − ١٠ء = ٣٩٥ ∴ ل − ٤٠ = ٣٩٥

∴ ل = ٤٣٥

∴ ($ح_{ن}$) = (٧ ، ١١ ، ١٥ ، ... ، ٤٣٥)

تمارين على الأوساط الحسابية

٣١

نفرض أن العددين س ، ص

∴ س + ص = ٢٢ ∴ ص = ٢٢ − س (١)

، $س^{٢}$ + $ص^{٢}$ = ٢٥٠ (٢)

وبالتعويض من (١) فى (٢) :

∴ $س^{٢}$ + $(٢٢ − س)^{٢}$ = ٢٥٠

∴ ٢$س^{٢}$ − ٤٤س + ٢٣٤ = ٠

∴ $س^{٢}$ − ٢٢س + ١١٧ = ٠

∴ (س − ٩) (س − ١٣) = ٠

∴ س = ٩ ومنها ص = ١٣ أ، س = ١٣ ومنها ص = ٩

∴ العددان هما : ٩ ، ١٣

٣٢

∵ أ = ٢٧ ، $ح_{١٨}$ = −٢٤ ∴ ٢٧ + ١٧ء = −٢٤

∴ ١٧ء = −٥١ ∴ ء = −٣

∴ الأوساط هى : (٢٤ ، ٢١ ، ..... ، −٢١)

٣٣

∵ أ = لو ٢ ، $ح_{١٠}$ = لو ١٠٢٤ = لو $٢^{١٠}$ = ١٠ لو ٢

∴ لو ٢ + ٩ء = ١٠ لو ٢

∴ ٩ء = ٩ لو ٢ ∴ ء = لو ٢

∴ الأوساط هى : (٢ لو ٢ ، ٣ لو ٢ ، ... ، ٩ لو ٢)

٣٤

الوسط السابع هو $ح_{٨}$ ، الوسط الثانى هو $ح_{٣}$

∴ $ح_{٨}$ = ٣ $ح_{٣}$

∴ ١ + ٧ء = ٣ (١ + ٢ء)

∴ ١ + ٧ء = ٣ + ٦ء ∴ ء = ٢

، $ح_{ن+٢}$ = ١٧

∴ ١ + ٢ (ن + ١) = ١٧ ∴ ٢ن + ٣ = ١٧

∴ ن = ٧ ∴ عدد الأوساط = ٧

٣٥

∵ أ + ٨ء = ٢٥ (١)

، $ح_{٤}$ = ١٠ ∴ أ + ٣ء = ١٠ (٢)

بطرح (٢) من (١) : ∴ ٥ء = ١٥

∴ ء = ٣ ، أ = ١

∴ المتتابعة هى : (١ ، ٤ ، ٧ ، ...)

٣٦

∵ (ح٢ + ح٦) / ٢ = ١٩

∴ أ + ٢ء + أ + ٦ء = ٣٨ ∴ أ + ٤ء = ١٩ (١)

، ∵ ح١٠ - ٢ ح٤ = ٢

∴ أ + ٩ء - ٢ (أ + ٣ء) = ٢ ∴ - أ + ٣ء = ٢ (٢)

بجمع (١) ، (٢) :

∴ ٧ء = ٢١ ∴ ء = ٣ ، أ = ٧

∴ المتتابعة هي : (٧ ، ١٠ ، ١٣ ، ...)

٣٧

الوسط الثاني هو ح٣ ، الوسط الرابع هو ح٥ ، الوسط السابع هو ح٨ ، الوسط الثالث هو ح٤

∴ أ + ٢ء + أ + ٤ء = ١٢

∴ أ + ٣ء = ٦ (١)

، (أ + ٧ء) - (أ + ٣ء) = ٤ ∴ ٤ء = ٤

∴ ء = ١ ومن معادلة (١) ∴ أ = ٣

∴ المتتابعة هي : (٣ ، ٤ ، ٥ ، ...)

٣٨

بفرض أن عدد الأوساط = ن ∴ عدد الحدود = ن + ٢

أ = ٢ ، (٢ + ٢ء) / (٤٧ - ء) = ٢ / ٧

∴ ١٤ + ١٤ء = ٩٤ - ٢ء ∴ ١٦ء = ٨٠

∴ ء = ٥ ، ∵ ح ن+٢ = ٤٧

∴ ٢ + ٥ (ن + ١) = ٤٧ ∴ ن = ٨

∴ عدد الأوساط = ٨

٣٩

بفرض أن عدد الأوساط = ن

∴ عدد الحدود = ن + ٢ ∵ أ = ٢٠

، (٢٠ + ١٥ء) + (٢٠ + ٢٠ء) = ٥ (٢٠ + ٥ء)

∴ ٤٠ + ٣٥ء = ١٠٠ + ٢٥ء

∴ ١٠ء = ٦٠ ∴ ء = ٦

، ∵ ح ن+٢ = ١٧٠ ∴ ٢٠ + ٦ (ن + ١) = ١٧٠

∴ ن = ٢٤ ∴ عدد الأوساط = ٢٤

٤٠

بفرض أن عدد الأوساط = ن

∴ عدد الحدود = ن + ٢

∵ أ = ٦ ، ح ن+٢ = ٣٦

∴ ((٦ + ء) + (٦ + ٢ء)) / ((٣٦ - ء) + (٣٦ - ٢ء)) = ١ / ٣

∴ (١٢ + ٣ء) / (٧٢ - ٣ء) = ١ / ٣ ∴ ٣ (٤ + ء) / ٣ (٢٤ - ء) = ١ / ٣

∴ ١٢ + ٣ء = ٢٤ - ء ∴ ٤ء = ١٢ ∴ ء = ٣

، ∵ ح ن+٢ = ٣٦ ∴ ٦ + ٣ (ن + ١) = ٣٦

∴ ن = ٩ ∴ عدد الأوساط = ٩

ثالثا مسائل تقيس مهارات التفكير

(١) (ب) (٢) (جـ) (٣) (د) (٤) (د)

إرشادات الحل :

(١) ∵ ل = ١٠أ ، ل - ء = (أ + ٢ء) + (أ + ٤ء)

∴ ل - ء = ٢أ + ٧ء ∴ ل = ٢أ + ٨ء

∴ ١٠أ = ٢أ + ٨ء ∴ ٨أ = ٨ء

∴ أ = ء

∴ ح٦ / ح٣ = (أ + ٥ء) / (أ + ٢ء) = (ء + ٥ء) / (ء + ٢ء) = ٦ء / ٣ء = ٢

(٢) ∵ ء هو أساس المتتابعة الحسابية

(أ ، س١ ، س٢ ، ... ، س٥ ، ب)

∴ ب = أ + ٦ء ∴ ء = (ب - أ) / ٦ (١)

إجابات تمارين 3

أولا أسئلة الاختيار من متعدد

(١) (جـ) (٢) (جـ) (٣) (جـ) (٤) (أ) (٥) (ب)

(٦) (ب) (٧) (د) (٨) (أ) (٩) (د) (١٠) (ب)

(١١) (د) (١٢) (د) (١٣) (جـ) (١٤) (د) (١٥) (ب)

(١٦) (ب) (١٧) (د) (١٨) (جـ) (١٩) (ب) (٢٠) (جـ)

(٢١) (جـ) (٢٢) (جـ) (٢٣) (د) (٢٤) (أ) (٢٥) (ب)

(٢٦) (ب) (٢٧) (جـ) (٢٨) (جـ) (٢٩) (ب) (٣٠) (أ)

(٣١) (ب) (٣٢) (د) (٣٣) (جـ) (٣٤) (ب) (٣٥) (جـ)

(٣٦) (جـ) (٣٧) (د) (٣٨) (د)

(٣٩) أولًا : (أ) ثانيًا : (د) ثالثًا : (جـ)

(٤٠) أولًا : (ب) ثانيًا : (جـ)

(٤١) أولًا : (ب) ثانيًا : (أ) (٤٢) (د)

(٤٣) (ب) (٤٤) (د) (٤٥) (أ) (٤٦) (د) (٤٧) (جـ)

(٤٨) (أ) (٤٩) (أ)

ثانيا الأسئلة المقالية

١

(١) ∵ ح ن = أ + (ن - ١) ء

∴ ٨٠ = ٢ + (ن - ١) × ٣ ∴ ن = ٢٧

∴ جـ٢٧ = ٢٧/٢ [٢ + ٨٠] = ١١٠٧

(٢) الأعداد الصحيحة التي تقبل القسمة على ٧ هي :

(٧ ، ١٤ ، ٢١ ، ..... ، ٩٩٤)

∴ أ = ٧ ، ل = ٩٩٤ ، ء = ٧

، ∵ ح ن = أ + (ن - ١) ء

∴ ٩٩٤ = ٧ + (ن - ١) × ٧ ∴ ن = ١٤٢

∴ جـ١٤٢ = ١٤٢/٢ [٧ + ٩٩٤] = ٧١٠٧١

، ∵ ءَ هو أساس المتتابعة الحسابية

(أ ، ص١ ، ص٢ ، ... ، ص٧ ، ب)

∴ ب = أ + ٨ءَ ∴ ءَ = (ب - أ) / ٨ (٢)

من (١) ، (٢) : ∴ ءَ / ء = ٨ / ٦ = ٤ / ٣

(٣) ∵ (أ ، ب ، جـ ، ٢٠ ، ك ، هـ ، و) متتابعة حسابية

∴ (جـ + ك) / ٢ = ٢٠ ومنها جـ + ك = ٤٠

، (ب + هـ) / ٢ = ٢٠ ومنها ب + هـ = ٤٠

، (أ + و) / ٢ = ٢٠ ومنها أ + و = ٤٠

∴ أ + ب + جـ + ك + هـ + و = ١٢٠

(٤) ∵ (س ، ص ، ع) في تتابع حسابي

∴ ٢ ص = س + ع

∴ (س + ٢ ص - ع) (٢ ص + ع - س)
(ع + س - ص)

= (س + س + ع - ع) (س + ع + ع - س)
(٢ ص - ص)

= (٢ س) (٢ ع) (ص) = ٤ س ص ع

تطبيقات على المتتابعة الحسابية

١

نفرض أن قياسات الزوايا هي أ ، ب ، جـ مرتبة تصاعديًا

، ب هو الوسط الحسابي بين أ ، جـ

∴ ٢ ب = أ + جـ ولكن أ + ب + جـ = ١٨٠°

∴ ٢ ب + ب = ١٨٠° ومنها ب = ٦٠°

ولكن جـ - أ = ٨٠° ، جـ + أ = ١٢٠°

∴ جـ = ١٠٠° ، أ = ٢٠°

٢

∵ ١٢٠ + ٨٠ ن = ١٤٠٠ ∴ ن = ١١

∴ عدد الأقساط = ١١

③ الحدود فردية الرتبة هى : (ح١ ، ح٣ ، ح٥ ، ......)

∵ ح ن = ١١٠

∴ ٢ + (ن − ١) × ٢ = ١١٠

∴ ن = ٣٧ وهو عدد فردى

∴ متتابعة الحدود الفردية الرتبة هى :

(٢ ، ٨ ، ١٤ ، ...... ، ١١٠)

∴ أ = ٢ ، ل = ١١٠ ، ء = ٦

، ∵ ح ن = أ + (ن − ١) ء

∴ ١١٠ = ٢ + (ن − ١) × ٦   ∴ ن = ١٩

∴ حـ١٩ = ١٩/٢ [٢ + ١١٠] = ١٠٦٤

④ ∵ ح ن = أ + (ن − ١) ء

∴ ٧١ = ٨ + ٣ (ن − ١)

∴ ن = ٢٢   ∴ عدد نصف الحدود = ١١ حدًا

∴ المجموع المطلوب هو مجموع حدود المتتابعة المعطاة من ح١٢ إلى ح٢٢ وعددهم ١١ حدًا

، ∵ ح١٢ = ٨ + ١١ × ٣ = ٤١

∴ المجموع المطلوب = ١١/٢ [٤١ + ٧١] = ٦١٦

⑤ ∵ ل = −١٢٧   ∴ −١٢٧ = ٢٥ + (ن − ١) × −٤

∴ ن = ٣٩   ∴ الثلث الأخير مكون من ١٣ حدًا

∴ حـ١٣ حدًا الأخيرة = ١٣/٢ [٢ ل + (١٣ − ١) × −ء]

= ١٣/٢ [٢ × −١٢٧ + ١٢ × ٤] = −١٣٣٩

٢

∵ ن/٢ [٨٠ − ٤ (ن − ١)] = ٢٠٨

∴ ن [٨٤ − ٤ ن] = ٤١٦

∴ ن٢ − ٢١ ن + ١٠٤ = ٠

∴ (ن − ١٣) (ن − ٨) = ٠

∴ ن = ٨ أو ن = ١٣

التفسير هو أن مجموع الحدود : ح٩ ، ح١٠ ، ح١١ ، ح١٢ ، ح١٣ يساوى صفر.

٣

① حـ١٥ = ١٥/٢ [٢ × ٩ + ١٤ × ٣] = ٤٥٠

② ح٥ = ٩ + ٤ × ٣ = ٢١

∴ حـ١١ = ١١/٢ [٢ × ٢١ + ١٠ × ٣] = ٣٩٦

③ ن/٢ [٢ × ٩ + (ن − ١) × ٣] = ٧٥٠

∴ ن (٣ ن + ١٥) = ١٥٠٠

∴ ن٢ + ٥ ن − ٥٠٠ = ٠

∴ (ن − ٢٠) (ن + ٢٥) = ٠

∴ ن = −٢٥ (مرفوض) أو ن = ٢٠

٤

أكبر مجموع لحدود المتتابعة الحسابية

(٣٣ ، ٣١ ، ٢٩ ، ......)

عندما نأخذ الحدود الموجبة فقط ويفرض أن رتبة آخر حد موجب هى ن

∴ ح ن > صفر   ∴ ٣٣ − ٢ (ن − ١) > صفر

∴ ٣٥ − ٢ ن > صفر

∴ ن < ٣٥/٢   ∴ ن = ١٧ أو ١٦ أو ١٥ أو ...

∴ ح١٧ هو آخر حد موجب

∴ المجموع المطلوب = ١٧/٢ [٦٦ + ١٦ × −٢] = ٢٨٩

٥

∵ ١٠/٢ [٢ × ٧ + ٩ ء] = ٢٥٠   ∴ ء = ٤

∴ المتتابعة هى : (٧ ، ١١ ، ١٥ ، ......)

٦

∵ ن/٢ [١٢ + −٢٦] = −١٤٠

∴ ن = ٢٠   ∴ ح٢٠ = −٢٦

∴ ١٢ + ١٩ ء = −٢٦   ∴ ء = −٢

∴ المتتابعة هى : (١٢ ، ١٠ ، ٨ ، ...... ، −٢٦)

٧

① ∵ حـ ن = ٥٤٥   ∴ ن/٢ [٢٣ + ٨٦] = ٥٤٥

∴ ن = ١٠   ∴ ح١٠ = ٨٦

∴ ٢٣ + ٩ ء = ٨٦

∴ ء = ٧

∴ المتتابعة هى : (٢٣ ، ٣٠ ، ٣٧ ، ...... ، ٨٦)

② ∵ حـ ن = −٥٨٥

∴ ن/٢ [١٧ + (−٩٥)] = −٥٨٥

∴ ن = ١٥   ∴ ح١٥ = −٩٥

∴ ١٧ + ١٤ ء = −٩٥   ∴ ء = −٨

∴ المتتابعة هى : (١٧ ، ٩ ، ١ ، ...... ، −٩٥)

٨

أ = ٢ ، ح١٠ = ٢٩   ∴ ٢ + ٩ ء = ٢٩

∴ ء = ٣

∴ المتتابعة هى : (٢ ، ٥ ، ٨ ، ...... ، ٢٩)

، ∵ متتابعة الأوساط هى : (٥ ، ٨ ، ١١ ، ...... ، ٢٦)

∴ مجموع الأوساط : حـ٨ = ٨/٢ [٥ + ٢٦] = ١٢٤

٩

أ = ٤٢ ، ح١٩ = −١٢   ∴ ٤٢ + ١٨ ء = −١٢

∴ ء = −٣

∴ المتتابعة هى : (٤٢ ، ٣٩ ، ٣٦ ، ...... ، −١٢)

، بفرض ح ن < ٠   ∴ ٤٢ + (ن − ١) (−٣) < ٠

∴ −٣ ن < −٤٥   ∴ ن > ١٥

∴ ن = ١٦ أو ١٧ أو ١٨ أو ......

∴ أول حد سالب هو ح١٦

، حـ١٩ = ١٩/٢ [٤٢ + (−١٢)] = ٢٨٥

١٠

∵ ح٣ + ح٥ = ٢٢   ∴ أ + ٢ء + أ + ٤ء = ٢٢

∴ أ + ٣ء = ١١ (١) ، ح٧ − ح٤ = ٩

∴ (أ + ٦ء) − (أ + ٣ء) = ٩

∴ ٣ء = ٩   ∴ ء = ٣

ومن (١) : ∴ أ = ٢

∴ المتتابعة هى : (٢ ، ٥ ، ٨ ، ......)

، حـ٢٥ = ٢٥/٢ [٢ × ٢ + ٢٤ × ٣] = ٩٥٠

١١

∵ أ = ٢٩ ، ح٢ = ٥ ح٧

∴ أ + ء = ٥ (أ + ٦ء)   ∴ ٢٩ ء = −٤ أ

∴ ٢٩ ء = −٤ (٢٩)   ∴ ء = −٤

∴ المتتابعة هى : (٢٩ ، ٢٥ ، ٢١ ، ......)

، المجموع يكون أكبر ما يمكن عند أخذ كل الحدود الموجبة فقط

∴ ح ن > صفر   ∴ أ + (ن − ١) ء > صفر

∴ ٢٩ − ٤ (ن − ١) > صفر

∴ ن < ٣٣/٤   ∴ ن = ٨ أو ٧ أو ......

∴ رتبة آخر حد موجب هى ٨

∴ عدد الحدود التى يجب أخذها بدءًا من الحد الأول ليكون المجموع أكبر ما يمكن هو ٨

١٢

∵ ح٢٠ = ٤١   ∴ أ + ١٩ء = ٤١   (١)

، ∵ ح٣ + ح٦ − ح٩ = ١

∴ أ + ٢ء + أ + ٥ء − أ − ٨ء = ١

∴ أ − ء = ١   (٢)

بطرح (٢) من (١) : ∴ ٢٠ ء = ٤٠

∴ ء = ٢ ، أ = ٣

∴ المتتابعة هى : (٣ ، ٥ ، ٧ ، ......)

ويفرض عدد الحدود المطلوبة ن ∴ حـن = ٤٤٠

∴ $\frac{ن}{٢}$ [٦ + ٢ (ن − ١)] = ٤٤٠

∴ ن (ن + ٢) = ٤٤٠

∴ ن² + ٢ن − ٤٤٠ = صفر

∴ (ن + ٢٢) (ن − ٢٠) = صفر ∴ ن = ٢٠ حدًا

١٣

∵ حـ٢٠ = ٨٢٠ ∴ $\frac{٢٠}{٢}$ [٢أ + ١٩ء] = ٨٢٠

∴ ٢أ + ١٩ء = ٨٢ (١)

، ∵ ع٤ + ع٧ = ٤٢ ∴ أ + ٣ء + أ + ٦ء = ٤٢

∴ ٢أ + ٩ء = ٤٢ (٢)

بطرح (٢) من (١) : ∴ ١٠ء = ٤٠

∴ ء = ٤ ومنها أ = ٣

∴ المتتابعة هي : (٣ ، ٧ ، ١١ ، ......)

١٤

∵ حـ٧ الأولى = ٢٤٥ ∴ $\frac{٧}{٢}$ [٢أ + ٦ء] = ٢٤٥

∴ أ + ٣ء = ٣٥ (١)

، ∵ حـ٧ التالية = ٩٨ وأولها هو ع٨

∴ $\frac{٧}{٢}$ [٢ (أ + ٧ء) + ٦ء] = ٩٨

∴ أ + ٧ء + ٣ء = ١٤ ∴ أ + ١٠ء = ١٤ (٢)

وبطرح (٢) من (١) : ∴ −٧ء = ٢١

∴ ء = −٣ ∴ أ = ٤٤

∴ المتتابعة هي : (٤٤ ، ٤١ ، ٣٨ ، ......)

ثالثًا مسائل تقيس مهارات التفكير

(١) (ب) (٢) (جـ)

إرشادات الحل :

(١) ∵ عدد الأوساط = ن ، الوسط الأول = (أ + ء)

والوسط الأخير = (ب − ء)

∴ مجموع هذه الأوساط = $\frac{ن}{٢}$ [أ + ء + ب − ء]

= $\frac{ن}{٢}$ (أ + ب)

= ن $\left(\frac{أ + ب}{٢}\right)$

(٢) ∵ ع١ + ع٥ + ع١٠ + ع١٦ = ٦٤

∴ أ + أ + ٤ء + أ + ٩ء + أ + ١٥ء = ٦٤

∴ ٤أ + ٢٨ء = ٦٤ ∴ أ + ٧ء = ١٦

، ∵ حـ١٥ الأولى = $\frac{١٥}{٢}$ [٢أ + ١٤ء]

= ١٥ (أ + ٧ء)

= ١٥ × ١٦ = ٢٤٠

تطبيقات عملية على المتتابعة الحسابية

١

عدد الكراسي يكون متتابعة حسابية هي :

(٢٠ ، ٢٢ ، ٢٤ ، ......)

∴ حـ٢٥ = $\frac{٢٥}{٢}$ [٢ × ٢٠ + ٢٤ × ٢] = ١١٠٠ كرسي

٢

حـ١٥ = $\frac{١٥}{٢}$ [٢ × ١٥ + ١٤ × ٢] = ٤٣٥ جنيهًا

٣

قيمة القرض = حـ١٠ = $\frac{١٠}{٢}$ [٢ × ٥٠٠ + ٩ × ٢٠٠]

= ١٤٠٠٠ جنيه

٤

ما سدده الرجل من دين = $\frac{١}{٥}$ × ٤٨٠٠٠ = ٩٦٠٠ جنيه

∴ حـ٥ = ٩٦٠٠ ∴ $\frac{٥}{٢}$ [٢أ + ٤ء] = ٩٦٠٠

∴ ٢أ + ٤ء = ٣٨٤٠ (١)

، ∵ حـ٢٠ = ٤٨٠٠٠

∴ $\frac{٢٠}{٢}$ [٢أ + ١٩ء] = ٤٨٠٠٠

∴ ٢أ + ١٩ء = ٤٨٠٠ (٢)

وبطرح (١) من (٢) : ∴ ١٥ء = ٩٦٠ ∴ ء = ٦٤

ومن (١) : ∴ أ = ١٧٩٢ جنيهًا

∴ مقدار القسط الأول = ١٧٩٢ جنيهًا

٥

المبلغ المستحق = حـ٥ = $\frac{٥}{٢}$ [٢ × ١٠٠٠ + ٤ × ١٠٠]

= ٦٠٠٠ جنيه

٦

∵ الثمرة الأولى بجوار الصندوق

∴ المسافة المقطوعة لإحضار الثمرة الأولى = صفر

، المسافة المقطوعة لإحضار الثمرة الثانية = ٢ × ٢

، المسافة المقطوعة لإحضار الثمرة الثالثة = ٢ × ٤ وهكذا

∴ المسافة الكلية = ٢ × ٢ + ٢ × ٤ + ٢ × ٦

+ ..... إلى ٢٠ حدًا

= ٢ [٢ + ٤ + ٦ + ... إلى ٢٠ حدًا]

= ٢ × $\frac{٢٠}{٢}$ [٢ × ٢ + ١٩ × ٢]

= ٨٤٠ مترًا

٧

(١) ع٧ = ٤ + ٦ × $\frac{١}{٢}$ = ٧ كم

(٢) حـ٧ = $\frac{٧}{٢}$ [٢ × ٤ + ٦ × $\frac{١}{٢}$] = ٣٨$\frac{١}{٢}$ كم

(٣) ٨١ = $\frac{ن}{٢}$ [٢ × ٤ + (ن − ١) × $\frac{١}{٢}$]

∴ ١٦٢ = ن (٨ + $\frac{١}{٢}$ ن − $\frac{١}{٢}$)

∴ ١٦٢ = ٧,٥ ن + $\frac{١}{٢}$ ن²

∴ ن² + ١٥ ن − ٣٢٤ = ٠

∴ (ن − ١٢) (ن + ٢٧) = ٠

∴ ن = ١٢ يومًا



أولًا أسئلة الاختيار من متعدد

(١) (ب)	(٢) (جـ)	(٣) (ب)	(٤) (ب)	(٥) (جـ)
(٦) (ب)	(٧) (د)	(٨) (د)	(٩) (أ)	(١٠) (د)
(١١) (أ)	(١٢) (د)	(١٣) (د)	(١٤) (جـ)	(١٥) (د)
(١٦) (د)	(١٧) (د)	(١٨) (ب)	(١٩) (جـ)	(٢٠) (د)
(٢١) (جـ)	(٢٢) (جـ)	(٢٣) (جـ)	(٢٤) (جـ)	(٢٥) (ب)
(٢٦) (أ)	(٢٧) (ب)	(٢٨) (د)	(٢٩) (د)	(٣٠) (أ)
(٣١) (جـ)	(٣٢) (د)	(٣٣) (جـ)	(٣٤) (جـ)	(٣٥) (جـ)
(٣٦) (د)	(٣٧) (ب)	(٣٨) (أ)	(٣٩) (ب)	(٤٠) (د)
(٤١) (أ)	(٤٢) (ب)	(٤٣) (جـ)	(٤٤) (د)	(٤٥) (ب)
(٤٦) (أ)	(٤٧) (د)	(٤٨) (جـ)	(٤٩) (جـ)	

ثانيًا الأسئلة المقالية

تمارين على تعريف المتتابعة الهندسية وحدها العام وتعيين المتتابعة الهندسية

١

(١) $\frac{ع_{ن+١}}{ع_ن}$ = $\frac{٥ × ٢^{ن+١}}{٥ × ٢^ن}$ = ٢^(ن + ١ − ن) = ٢

= مقدار ثابت.

∴ (عن) متتابعة هندسية وأساسها ر = ٢

، الحدود الثلاثة الأولى هي : ١٠ ، ٢٠ ، ٤٠

(٢) $\frac{ع_{ن+١}}{ع_ن}$ = $\frac{٤ (ن + ١)^٢}{٤ ن^٢}$ = $\left(\frac{ن + ١}{ن}\right)^٢$ = $\left(١ + \frac{١}{ن}\right)^٢$

≠ مقدار ثابت.

∴ (عن) ليست متتابعة هندسية.

(٣) $\frac{ع_ن}{ع_{ن-١}}$ = $\frac{١}{٤}$ = مقدار ثابت.

∴ (عن) متتابعة هندسية وأساسها ر = $\frac{١}{٤}$

، الحدود الثلاثة الأولى هي : ١٢ ، ٣ ، $\frac{٣}{٤}$

٢

$\frac{ح_{ن+١}}{ح_ن} = \frac{٢ \times ٣^{ن+١-٥}}{٢ \times ٣^{ن-٥}} = ٣$ = مقدار ثابت.

∴ (ح$_ن$) متتابعة هندسية ، ح$_٧ = ٢ \times ٣^{٧-٥} = ١٨$

٣

$\frac{ح_{ن+١}}{ح_ن} = \frac{\frac{٣}{٨}(٢)^{ن+١}}{\frac{٣}{٨}(٢)^{ن}} = ٢$ = مقدار ثابت.

∴ (ح$_ن$) متتابعة هندسية ، ح$_٨ = \frac{٣}{٨} \times (٢)^٨ = ٩٦$

، ح$_ن$ = ٧٦٨

∴ $\frac{٣}{٨} \times ٢^ن = ٧٦٨$ ∴ $٢^ن = ٢٠٤٨$

∴ $٢^ن = ٢^{١١}$ ∴ ن = ١١

٤

① أساس المتتابعة = $\frac{١}{٢}$ وبالتالى فإن الحدود السبعة الأولى هى : (٨ ، ٤ ، ٢ ، ١ ، $\frac{١}{٢}$ ، $\frac{١}{٤}$ ، $\frac{١}{٨}$)

التمثيل البيانى :

النقط هى : (١ ، ٨) ، (٢ ، ٤) ، (٣ ، ٢) ، (٤ ، ١) ، (٥ ، $\frac{١}{٢}$) ، (٦ ، $\frac{١}{٤}$) ، (٧ ، $\frac{١}{٨}$)

② أساس المتتابعة = ٣ وبالتالى فإن الحدود السبعة الأولى هى : ($\frac{١}{٢٧}$ ، $\frac{١}{٩}$ ، $\frac{١}{٣}$ ، ١ ، ٣ ، ٩ ، ٢٧)

التمثيل البيانى :

النقط هى : (١ ، $\frac{١}{٢٧}$) ، (٢ ، $\frac{١}{٩}$) ، (٣ ، $\frac{١}{٣}$) ، (٤ ، ١) ، (٥ ، ٣) ، (٦ ، ٩) ، (٧ ، ٢٧)

٥

① ∵ أ = ٩ ، ح$_٦$ = ٢٨٨

∴ ٩ × ر^٥ = ٢٨٨ ∴ ر^٥ = ٣٢

∴ ر = ٢

∴ المتتابعة هى : (٩ ، ١٨ ، ٣٦ ، ...)

② أ ر^٢ = ١٢ ، أ ر^٧ = ٣٨٤ وبالقسمة :

∴ $\frac{١}{ر^٥} = \frac{١}{٣٢}$ ∴ ر = ٢

∴ أ × ٤ = ١٢ ∴ أ = ٣

∴ المتتابعة هى : (٣ ، ٦ ، ١٢ ، ...)

③ أ ر^٢ = ١٨ ، أ ر^٥ = ٤٨٦

وبالقسمة ∴ $\frac{١}{ر^٣} = \frac{١}{٢٧}$

∴ ر = ٣ ∴ أ × ٩ = ١٨

∴ أ = ٢

∴ المتتابعة هى : (٢ ، ٦ ، ١٨ ، ...)

④ ∵ أ ر = ١٠٠ ، أ ر^٣ = ١ ، وبالقسمة :

∴ ر^٢ = $\frac{١}{١٠٠}$

∴ إما ر = $\frac{١}{١٠}$ ومنها أ = ١٠٠٠

أو ر = $-\frac{١}{١٠}$ ومنها أ = −١٠٠٠

∴ المتتابعة هى : (١٠٠٠ ، ١٠٠ ، ١٠ ، ...)

أو (−١٠٠٠ ، ١٠٠ ، −١٠ ، ...)

⑤ أ ر + أ ر^٤ = ٣٦

∴ أ ر (١ + ر^٣) = ٣٦ (١)

، أ ر^٢ + أ ر^٥ = ١٨

∴ أ ر^٢ (١ + ر^٣) = ١٨ (٢)

بقسمة (١) على (٢) : ∴ $\frac{١}{ر}$ = ٢

∴ ر = $\frac{١}{٢}$ وبالتعويض فى (١) :

∴ أ × $\frac{١}{٢}$ (١ + $\frac{١}{٨}$) = ٣٦

∴ أ × $\frac{١}{٢}$ × $\frac{٩}{٨}$ = ٣٦ ∴ أ = ٦٤

∴ المتتابعة هى : (٦٤ ، ٣٢ ، ١٦ ، ...)

⑥ أ ر − أ ر^٣ = ١٨

∴ − أ ر (ر^٢ − ١) = ١٨ (١)

، أ ر^٢ − أ = ٩ ∴ أ (ر^٢ − ١) = ٩ (٢)

وبقسمة (١) على (٢) : ∴ − ر = ٢

∴ ر = −٢

وبالتعويض فى (٢) :

∴ أ = ٣

∴ المتتابعة هى : (٣ ، −٦ ، ١٢ ، ...)

⑦ أ ر = ٨ ، أ + أ ر^٢ = ٢٠

∴ أ (١ + ر^٢) = ٢٠

∴ $\frac{أ(١ + ر^٢)}{أ ر} = \frac{٢٠}{٨}$ ∴ $\frac{ر^٢ + ١}{ر} = \frac{٥}{٢}$

∴ ٢ ر^٢ − ٥ ر + ٢ = ٠

∴ (٢ ر − ١) (ر − ٢) = ٠

∴ ر = $\frac{١}{٢}$ ومنها أ = ١٦ أو ر = ٢ ومنها أ = ٤

∴ المتتابعة هى : (١٦ ، ٨ ، ٤ ، ...)

أو (٤ ، ٨ ، ١٦ ، ...)

⑧ أ = ٤ أ ر^٢ ∴ ر^٢ = $\frac{١}{٤}$

∴ ر = $\frac{١}{٢}$ أو ر = $-\frac{١}{٢}$ (مرفوض)

، ∵ ح$_١$ + ح$_٥$ = ٣٦

∴ أ + أ ر^٤ = ٣٦

∴ $\frac{١}{٢}$ أ + $\frac{١}{١٦}$ أ = ٣٦

∴ $\frac{٩}{١٦}$ أ = ٣٦ ∴ أ = ٦٤

∴ المتتابعة هى : (٦٤ ، ٣٢ ، ١٦ ، ...)

⑨ أ + أ ر^٢ = ٢٠

∴ أ (١ + ر^٢) = ٢٠ (١)

، ∵ أ ر^٢ + أ ر^٤ = ٥ أ^٢ ر^٢

وبالقسمة على أ ر^٢ ∴ ١ + ر^٢ = ٥ أ

وبالتعويض فى (١) :

∴ أ × ٥ أ = ٢٠ ∴ أ^٢ = ٤

∴ أ = ٢ (والسالب مرفوض)

ومن (١) : ∴ ١ + ر^٢ = ١٠ ∴ ر^٢ = ٩

∴ ر = ٣ (والسالب مرفوض)

∴ المتتابعة هى : (٢ ، ٦ ، ١٨ ، ...)

⑩ أ ر^٢ − (أ + أ ر) = ١٠

∴ أ (ر^٢ − ر − ١) = ١٠ (١)

، أ + أ ر^٢ − أ ر = ١٤

∴ أ (ر^٢ − ر + ١) = ١٤ (٢)

وبقسمة (٢) على (١):

∴ $\frac{ر^{٢} - ر + ١}{ر^{٢} - ر - ١} = \frac{١٤}{١٠} = \frac{٧}{٥}$

∴ ٥ر^{٢} − ٥ر + ٥ = ٧ر^{٢} − ٧ر − ٧

∴ ٢ر^{٢} − ٢ر − ١٢ = ٠

∴ ر^{٢} − ر − ٦ = ٠

(ر + ٢) (ر − ٣) = ٠

∴ ر = ٣ أ، ر = −٢ (مرفوض لأن المتتابعة تزايدية)

وبالتعويض في (١): ∴ أ (٩ − ٣ − ١) = ١٠

∴ أ = ٢

∴ المتتابعة هي: (٢ ، ٦ ، ١٨ ، ...)

⑪ ٣ (أ + أ ر^{٢}) = أ ر + أ ر^{٣}

بالقسمة على أ حيث أ ≠ ٠

∴ ٣ + ٣ ر^{٢} = ر + ر^{٣}

∴ ر^{٣} − ٣ ر^{٢} + ر − ٣ = ٠

∴ ر^{٢} (ر − ٣) + (ر − ٣) = ٠

∴ (ر − ٣) (ر^{٢} + ١) = ٠ ∴ ر = ٣

، أ ر^{٤} − ٢ (أ + أ ر + أ ر^{٢} + أ ر^{٣}) = ٢

∴ أ (ر^{٤} − ٢ − ٢ ر − ٢ ر^{٢} − ٢ ر^{٣}) = ٢

وبالتعويض عن ر = ٣:

∴ أ (٨١ − ٢ − ٦ − ١٨ − ٥٤) = ٢

∴ أ = ٢

∴ المتتابعة هي: (٢ ، ٦ ، ١٨ ، ...)

⑫ ∵ أ + أ ر + أ ر^{٢} + أ ر^{٣} = ٤٥

∴ أ (١ + ر) + أ ر^{٢} (١ + ر) = ٤٥

∴ أ (١ + ر) (١ + ر^{٢}) = ٤٥ (١)

، ∵ أ ر^{٥} − أ ر = ٢٧٠

∴ أ ر (ر^{٤} − ١) = ٢٧٠

∴ أ ر (ر − ١) (ر + ١) (ر^{٢} + ١) = ٢٧٠ (٢)

بقسمة (٢) على (١):

∴ $\frac{أ ر (ر - ١) (ر + ١) (ر^{٢} + ١)}{أ (١ + ر) (١ + ر^{٢})} = \frac{٢٧٠}{٤٥}$

∴ ر^{٢} − ر − ٦ = ٠ ∴ (ر − ٣) (ر + ٢) = ٠

∴ ر = ٣ ، من (١): ∴ أ = $\frac{٩}{٨}$

∴ المتتابعة هي: ($\frac{٩}{٨}$ ، $\frac{٢٧}{٨}$ ، $\frac{٨١}{٨}$ ، ...)

⑬ أ + أ ر + أ ر^{٢} + أ ر^{٣} + أ ر^{٤} = ٢٤٢ (١)

، أ ر^{٣} = أ ر^{٢} + ٦ أ ر ، بالقسمة على أ ر

∴ ر^{٢} − ر − ٦ = ٠

∴ (ر − ٣) (ر + ٢) = ٠

∴ ر = ٣ أ، −٢ (مرفوض)

وبالتعويض في (١):

∴ أ (١ + ٣ + ٩ + ٢٧ + ٨١) = ٢٤٢

∴ أ = ٢

∴ المتتابعة هي: (٢ ، ٦ ، ١٨ ، ...)

⑭ ∵ أ + أ ر + أ ر^{٢} = ٥

∴ أ (١ + ر + ر^{٢}) = ٥ (١)

، ∵ أ^{٢} + أ^{٢} ر^{٢} + أ^{٢} ر^{٤} ... = ٨٠

∴ أ^{٢} (١ + ر^{٢}) = ٨٠ (٢)

بقسمة (٢) على مربع (١):

∴ $\frac{أ^{٢} (١ + ر^{٢})}{أ^{٢} ر^{٢} (١ + ر^{٢})^{٢}} = \frac{٨٠}{٢٥}$

∴ $\frac{١}{ر^{٢} (١ + ر^{٢})} = \frac{١٦}{٥}$

∴ ١٦ ر^{٤} + ١٦ ر^{٢} − ٥ = ٠

∴ (٤ ر^{٢} + ٥) (٤ ر^{٢} − ١) = ٠

∴ ر^{٢} = $\frac{-٥}{٤}$ (مرفوض)

أ، ر^{٢} = $\frac{١}{٤}$ ومنها ر = ± $\frac{١}{٢}$

وبالتعويض في (١): ∴ أ = ± ٨

∴ المتتابعة هي: (٨ ، ٤ ، ٢ ، ...)

أ، (−٨ ، ٤ ، −٢ ، ...)

⑥

نفرض أن الأعداد هي: $\frac{أ}{ر}$ ، أ ، أ ر

∴ $\frac{أ}{ر}$ × أ × أ ر = ٦٤

∴ أ^{٣} = ٦٤ ∴ أ = ٤

، ∵ $\frac{أ}{ر}$ + أ + أ ر = ٢١ ∴ $\frac{٤}{ر}$ + ٤ + ٤ ر = ٢١

∴ ٤ + ٤ ر + ٤ ر^{٢} = ٢١ ر

∴ ٤ ر^{٢} − ١٧ ر + ٤ = ٠

∴ (٤ ر − ١) (ر − ٤) = ٠

∴ ر = $\frac{١}{٤}$ أ، ٤ ∴ الأعداد هي: ١ ، ٤ ، ١٦

⑦

نفرض أن الأعداد هي: أ ، أ ر ، أ ر^{٢}

∴ أ + أ ر + أ ر^{٢} = ١٤

∴ أ (١ + ر + ر^{٢}) = ١٤ (١)

، أ^{٢} × أ^{٢} ر^{٢} × أ^{٢} ر^{٤} = ٤٠٩٦

∴ أ^{٦} ر^{٦} = ٤٠٩٦ = (٤)^{٦} ∴ أ ر = ٤ (٢)

بقسمة (١) على (٢): ∴ $\frac{ر^{٢} + ر + ١}{ر} = \frac{٧}{٢}$

∴ ٢ ر^{٢} + ٢ ر + ٢ = ٧ ر

∴ ٢ ر^{٢} − ٥ ر + ٢ = ٠

∴ (٢ ر − ١) (ر − ٢) = ٠

∴ ر = $\frac{١}{٢}$ ومنها أ = ٨ أ، ر = ٢ ومنها أ = ٢

∴ الأعداد هي: ٨ ، ٤ ، ٢

⑧ التصحيح هو

① تمثل حدود المتتابعة الهندسية بمجموعة من النقاط المنفصلة التي تتبع الدالة الأسية.

② أساس المتتابعة الهندسية = $\frac{ح_{ن+١}}{ح_{ن}}$

تمارين على الأوساط الهندسية

⑨

بفرض أن العددين هما: س ، ص حيث س > ص

∵ س − ص = ٦٠

∴ س = ص + ٦٠ (١)

∵ س ص = ٢٥٦

وبالتعويض من (١): ∴ (٦٠ + ص) ص = ٢٥٦

∴ ص^{٢} + ٦٠ ص − ٢٥٦ = ٠

∴ (ص + ٦٤) (ص − ٤) = ٠

∴ ص = ٤ أ، ص = −٦٤ (مرفوض)

∴ س = ٦٤

∴ العددان هما: ٦٤ ، ٤

⑩

بفرض أن العددين هما: س ، ص

∴ س + ص = ١٠ (١) ، س ص = ٩

وبالتعويض من (١): ∴ س (١٠ − س) = ٩

∴ س^{٢} − ١٠ س + ٩ = ٠

∴ (س − ٩) (س − ١) = ٠

∴ س = ٩ أ، س = ١

ومنها ص = ١ أ، ص = ٩

∴ العددان هما: ٩ ، ١

⑪

بفرض أن العددين هما: س ، ص حيث س > ص

∴ س − ص = ٨ ∴ س = ٨ + ص (١)

، س ص = ٩ (٢)

بالتعويض من (١) في (٢):

∴ (٨ + ص) ص = ٩ ∴ ٨ ص + ص^{٢} = ٩

∴ ص^{٢} + ٨ ص − ٩ = ٠

∴ (ص + ٩) (ص − ١) = ٠

∴ ص = −٩ (مرفوض) أ، ص = ١

∴ س = ٨ + ١ = ٩ ∴ العددان هما : ٩ ، ١

١٢

بفرض أن العددين هما : س ، ص

∴ $\sqrt{س ص}$ − س = ٢ (١)

، ص − $\sqrt{س ص}$ = ٢ (٢)

بجمع (١) ، (٢) :

∴ ص − س = ٥ ∴ ص = س + ٥ (٣)

ومن (١) : ∴ $\sqrt{س ص}$ = ٢ + س

وبالتربيع :

∴ س ص = س^{٢} + ٤ س + ٤

وبالتعويض من (٣)

∴ س (س + ٥) = س^{٢} + ٤ س + ٤

∴ س^{٢} + ٥ س = س^{٢} + ٤ س + ٤

∴ س = ٤ ومن (٣) : ص = ٩

∴ العددان هما : ٤ ، ٩

١٣

∵ أصغر العددين هو ٩ ، ويفرض أن العدد الآخر هو س

∴ $\frac{١}{٢}$ (٩ + س) = $\frac{٥}{٣}$ $\sqrt{٩ س}$ = ٥ $\sqrt{س}$

∴ $\frac{١}{٤}$ (٩ + س)^{٢} = ٢٥ س

∴ ٨١ + ١٨ س + س^{٢} = ١٠٠ س

∴ س^{٢} − ٨٢ س + ٨١ = ٠

∴ (س − ٨١) (س − ١) = ٠

∴ س = ٨١ أ، ١

، ∵ أصغر العددين = ٩ ∴ س = ٨١

∴ العدد الآخر هو ٨١

١٤

بفرض أن العدد الأكبر س ، الأصغر ص

∴ $\sqrt{س ص}$ − ص = ٦

∴ $\sqrt{س ص}$ = ٦ + ص بتربيع الطرفين

∴ س ص = ٣٦ + ١٢ ص + ص^{٢} (١)

، س − $\frac{١}{٢}$ (س + ص) = ٩

∴ $\frac{١}{٢}$ س = ٩ + $\frac{١}{٢}$ ص

∴ س = ١٨ + ص (٢)

وبالتعويض من (٢) فى (١) :

∴ (١٨ + ص) ص = ٣٦ + ١٢ ص + ص^{٢}

∴ ص^{٢} + ١٨ ص = ٣٦ + ١٢ ص + ص^{٢}

∴ ٦ ص = ٣٦ ∴ ص = ٦

وبالتعويض فى (٢) : ∴ س = ٢٤

∴ العددان هما : ٦ ، ٢٤

١٥

∵ عدد الأوساط = ٦ ∴ عدد الحدود = ٨

∴ أ = $\frac{١}{٤}$ ، ح$_{٨}$ = ٣٢ ∴ $\frac{١}{٤}$ ر^{٧} = ٣٢

∴ ر^{٧} = ١٢٨ = ٢^{٧} ∴ ر = ٢

∴ الأوساط هى : $\frac{١}{٢}$ ، ١ ، ٢ ، ٤ ، ٨ ، ١٦

١٦

عدد الحدود = ٧ ∴ أ = ٤ ، ح$_{٧}$ = ٢٩١٦

∴ ٤ ر^{٦} = ٢٩١٦ ∴ ر^{٦} = ٧٢٩

∴ ر^{٦} = (±٣)^{٦} ∴ ر = ±٣

∴ الأوساط هى : (١٢ ، ٣٦ ، ١٠٨ ، ٣٢٤ ، ٩٧٢)

أ، (−١٢ ، ٣٦ ، −١٠٨ ، ٣٢٤ ، −٩٧٢)

١٧

(س + ٢) (ص − ٦) = ٢٥ (١)

، س + ص = ١٤ ∴ س = ١٤ − ص (٢)

وبالتعويض من (٢) فى (١) :

∴ (١٤ − ص + ٢) (ص − ٦) = ٢٥

∴ (−ص + ١٦) (ص − ٦) = ٢٥

∴ −ص^{٢} + ٢٢ ص − ٩٦ = ٢٥

∴ ص^{٢} − ٢٢ ص + ١٢١ = ٠

∴ (ص − ١١)^{٢} = ٠

∴ ص = ١١ وبالتعويض فى (٢) : ∴ س = ٣

١٨

الوسطين الأخيرين هما : $\frac{٤٨٦}{ر}$ ، $\frac{٤٨٦}{ر^{٢}}$

، الوسطين الأولين هما : ٢ ر ، ٢ ر^{٢}

∴ $\frac{٤٨٦}{ر}$ + $\frac{٤٨٦}{ر^{٢}}$ = ٩ (٢ ر + ٢ ر^{٢})

∴ $\frac{٤٨٦}{ر^{٢}}$ (ر + ١) = ١٨ ر (١ + ر)

∴ ر^{٣} = ٢٧ ∴ ر = ٣

ويفرض أن عدد الأوساط = ن

∴ ح$_{ن+٢}$ = ٤٨٦ ∴ ٢ × (٣)$^{ن+١}$ = ٤٨٦

∴ ٣$^{ن+١}$ = ٢٤٣ = ٣^{٥}

∴ ن = ٤ ∴ عدد الأوساط = ٤

١٩

الوسط الثانى = ٣ ر^{٢} ، الوسط الأخير = $\frac{٣٨٤}{ر}$

∴ ٣ ر^{٢} × $\frac{٣٨٤}{ر}$ = ٢٣٠٤ ∴ ر = $\frac{٢٣٠٤}{٣٨٤ × ٣}$ = ٢

، يفرض أن عدد الأوساط = ن

∴ عدد الحدود = ن + ٢ ∴ ح$_{ن+٢}$ = ٣٨٤

∴ ٣ × (٢)$^{ن+١}$ = ٣٨٤ ∴ ٢$^{ن+١}$ = ١٢٨ = ٢^{٧}

∴ ن = ٦ ∴ عدد الأوساط = ٦

٢٠

الوسطين الأولين هما : ٢ ر ، ٢ ر^{٢}

، الوسطين الأخيرين هما : $\frac{١٤٥٨}{ر}$ ، $\frac{١٤٥٨}{ر^{٢}}$

∴ $\frac{٢ ر + ٢ ر^{٢}}{\frac{١٤٥٨}{ر} + \frac{١٤٥٨}{ر^{٢}}}$ = $\frac{١}{٢٧}$ ∴ $\frac{٢ ر (١ + ر)}{\frac{١٤٥٨}{ر^{٢}} (ر + ١)}$ = $\frac{١}{٢٧}$

∴ $\frac{٢ ر^{٣} (ر + ١)}{١٤٥٨ (ر + ١)}$ = $\frac{١}{٢٧}$

∴ ر^{٣} = ٢٧ ∴ ر = ٣

ويفرض أن عدد الأوساط = ن ∴ ح$_{ن+٢}$ = ١٤٥٨

∴ ٢ × ٣$^{ن+١}$ = ١٤٥٨ ∴ ٣$^{ن+١}$ = ٧٢٩ = ٣^{٦}

∴ ن = ٥ ∴ عدد الأوساط = ٥

٢١

∵ ١ ، س ، ص فى تتابع حسابى

∴ ٢ س = ١ + ص

∴ ص = ٢ س − ١ (١)

، ∵ ١ ، ص ، س فى تتابع هندسى

∴ س = ص^{٢} (٢)

وبالتعويض من (٢) فى (١) :

∴ ٢ ص^{٢} − ص − ١ = ٠

∴ (٢ ص + ١) (ص − ١) = ٠

∴ ص = $\frac{−١}{٢}$ أ، ص = ١ (مرفوض)

وبالتعويض فى (١) : ∴ س = $\frac{١}{٤}$

٢٢

∵ ٤ ، ب ، حـ فى تتابع حسابى

∴ $\frac{٤ + حـ}{٢}$ = ب ∴ حـ = ٢ ب − ٤ (١)

، ∵ ٢ ، ب + ٣ ، ٥ حـ فى تتابع هندسى

∴ (ب + ٣)^{٢} = ١٠ حـ (٢)

من (١) ، (٢) : ∴ ب^{٢} + ٩ + ٦ ب = ١٠ (٢ ب − ٤)

∴ ب^{٢} − ١٤ ب + ٤٩ = ٠ ∴ (ب − ٧)^{٢} = ٠

∴ ب = ٧ ∴ حـ = ١٠

٢٣

∵ لو أ ، لو ب ، لو حـ في تتابع حسابي

∴ ٢ لو ب = لو أ + لو حـ

∴ لو ب^{2} = لو أ حـ   ∴ ب^{2} = أ حـ

∴ أ ، ب ، حـ في تتابع هندسي

٢٤ التصحيح هو :

① تعرف الأوساط الهندسية بأنها الحدود الواقعة بين حدين غير متتالين من متتابعة هندسية ويمكن إيجادها متى علمت قيمتا هذين الحدين وعدد هذه الأوساط.

② الوسط الحسابي لعددين حقيقيين (موجبين) مختلفين أكبر من وسطهما الهندسي.

ثالثًا مسائل تقيس مهارات التفكير

① (د)   ② (جـ)   ③ (د)

إرشادات الحل :

① إذا كان $(\text{ح}_{\text{ن}})$ متتابعة هندسية أساسها (ر)

∴ $(\text{ح}_{\text{ن}})^{\text{ك}}$ تكون متتابعة هندسية أيضًا وأساسها $\text{ر}^{\text{ك}}$

، إذا كان $(\text{ح}'_{\text{ن}})$ متتابعة هندسية أساسها (م)

∴ $(\text{ك}\ \text{ح}'_{\text{ن}})$ تكون متتابعة هندسية أيضًا وأساسها (م)

، $(\text{ح}_{\text{ن}}\ \text{ح}'_{\text{ن}})$ تكون متتابعة هندسية أساسها (ر م)

أي كل ما سبق صحيح

② ∵ س ، أ ، ب ، ص في تتابع حسابي

∴ أ + ب = س + ص

، ∵ س ، ل ، م ، ص في تتابع هندسي

∴ ل م = س ص

∴ $\frac{\text{أ} + \text{ب}}{\text{ل م}} = \frac{\text{س} + \text{ص}}{\text{س ص}}$

③ ∵ أ ، ب ، حـ متتابعة حسابية أساسها م

∴ ب = أ + م ، حـ = أ + ٢ م

∴ $(\text{٣}^{\text{أ}} ، \text{٣}^{\text{ب}} ، \text{٣}^{\text{حـ}}) = (\text{٣}^{\text{أ}} ، \text{٣}^{\text{أ}+\text{م}} ، \text{٣}^{\text{أ}+\text{٢م}})$

وهي متتابعة هندسية حدها الأول $\text{٣}^{\text{أ}}$ وأساسها $\text{٣}^{\text{م}}$

تطبيقات على المتتابعة الهندسية

١ ثمن السيارة يكون متتابعة هندسية

أ = ١٥٠٠٠٠ ، ر = ١ − ١٠٪ = ٠,٩

بعد أربع سنوات يكون ثمن السيارة = $\text{ح}_{\text{٥}}$

= أ $\text{ر}^{\text{٤}}$ = ١٥٠٠٠٠ × $(\text{٠,٩})^{\text{٤}}$ = ٩٨٤١٥ جنيهًا

٢ راتب الموظف يكون متتابعة هندسية

أ = ١٢٠٠ ، ر = ١ + ١٠٪ = ١,١

بعد أربع سنوات يكون راتبه = $\text{ح}_{\text{٥}}$ = أ $\text{ر}^{\text{٤}}$

= ١٢٠٠ × $(\text{١,١})^{\text{٤}}$

= ١٧٥٦,٩٢ جنيه

٣ ∵ ل = أ $\text{ر}^{\text{ن}-\text{١}}$

∴ ١٥٣٦ = ١٢ × $(\text{٢})^{\text{ن}-\text{١}}$

∴ $\text{٢}^{\text{ن}-\text{١}}$ = ١٢٨ = $\text{٢}^{\text{٧}}$

∴ ن − ١ = ٧   ∴ ن = ٨

أي بعد ٨ أيام

٤ عدد الطلاب يكون متتابعة هندسية

أ = ٢٤٠٠ ، ر = ١ + ٤٪ = ١,٠٤

∴ عدد الطلاب بعد ٦ سنوات = $\text{ح}_{\text{٧}}$ = أ $\text{ر}^{\text{٦}}$

= ٢٤٠٠ × $(\text{١,٠٤})^{\text{٦}}$ ≃ ٣٠٣٧ طالبًا

٥ (أ) متتابعة المسافات : (٥٠ ، ١٠٠ ، ٢٠٠ ، ...)

(ب) $\text{ح}_{\text{٧}}$ = أ $\text{ر}^{\text{٦}}$ = ٥٠ × $\text{٢}^{\text{٦}}$ = ٣٢٠٠ متر

∴ المسافة التي يقطعها في اليوم السابع = ٣٢٠٠ متر

إجابات تمارين 5

أولًا أسئلة الاختيار من متعدد

① (أ) ② (أ) ③ (ب) ④ (أ) ⑤ (جـ)

⑥ (أ) ⑦ (ب) ⑧ (د) ⑨ (جـ) ⑩ (أ)

⑪ (أ) ⑫ (د) ⑬ (أ) ⑭ (جـ) ⑮ (د)

⑯ (أ) ⑰ (جـ) ⑱ (أ) ⑲ (د) ⑳ (ب)

㉑ (جـ) ㉒ (جـ) ㉓ (د) ㉔ (جـ) ㉕ (أ)

㉖ (جـ) ㉗ (د) ㉘ (جـ) ㉙ (جـ) ㉚ (جـ)

㉛ (ب) ㉜ (ب) ㉝ (جـ) ㉞ (أ) ㉟ (جـ)

㊱ (ب) ㊲ (ب) ㊳ (د) ㊴ (أ) ㊵ (د)

㊶ (جـ) ㊷ (ب) ㊸ (أ)

ثانيًا الأسئلة المقالية

تمارين على المتسلسلة الهندسية ومجموع ن حدًا الأولى من متسلسلة هندسية

١

① $\text{حـ}_{\text{ن}} = \frac{\text{أ} - \text{ل ر}}{\text{١} - \text{ر}} = \frac{\text{١} - \text{٦٥٦١} \times \text{٣}}{\text{١} - \text{٣}} = \text{٩٨٤١}$

② $\text{حـ}_{\text{ن}} = \frac{\text{أ} - \text{ل ر}}{\text{١} - \text{ر}} = \frac{\text{٢٠} + \frac{\text{٥}}{\text{٣٢}} \times (-\frac{\text{١}}{\text{٢}})}{\text{١} + \frac{\text{١}}{\text{٢}}} = \frac{\text{٤٢٥}}{\text{٣٢}}$

٢

① $\text{حـ}_{\text{ن}} = \frac{\text{أ}(\text{١} - \text{ر}^{\text{ن}})}{\text{١} - \text{ر}} = \frac{\text{٤}(\text{١} - \text{٣}^{\text{٦}})}{\text{١} - \text{٣}} = \text{١٤٥٦}$

② $\text{حـ}_{\text{ن}} = \frac{\text{أ} - \text{ل ر}}{\text{١} - \text{ر}} = \frac{-\text{٤} - \frac{\text{١}}{\text{٨}} \times -\frac{\text{١}}{\text{٢}}}{\text{١} - (-\frac{\text{١}}{\text{٢}})} = \frac{-\text{٢١}}{\text{٨}}$

٣

① $\sum_{\text{ر}=\text{١}}^{\text{ن}} \text{٢} \times (\frac{\text{١}}{\text{٢}})^{\text{ر}-\text{١}}$

هو مجموع متتابعة هندسية فيها أ = ٢ ، ر = $\frac{\text{١}}{\text{٢}}$ ، ن = ٥

∴ $\text{حـ}_{\text{٥}} = \frac{\text{٢}(\text{١} - (\frac{\text{١}}{\text{٢}})^{\text{٥}})}{\text{١} - \frac{\text{١}}{\text{٢}}} = \frac{\text{٣١}}{\text{٨}}$

② $\sum_{\text{ر}=\text{٥}}^{\text{١٢}} \text{٣} \times (\text{٢})^{\text{ر}-\text{١}}$

هو مجموع متتابعة هندسية فيها أ = ٣ ، ر = ٢

، $\text{ح}_{\text{٥}}$ = ٣ × $\text{٢}^{\text{٤}}$ = ٤٨ ، ن = ١٢ − ٥ + ١ = ٨

∴ $\text{حـ}_{\text{٨}} = \frac{\text{٤٨}(\text{١} - (\text{٢})^{\text{٨}})}{\text{١} - \text{٢}} = \text{١٢٢٤٠}$

٤

$\frac{\text{ح}_{\text{ن}+\text{١}}}{\text{ح}_{\text{ن}}} = \frac{\text{١٠} \times \text{٢}^{\text{ن}+\text{١}-\text{٢}}}{\text{١٠} \times \text{٢}^{\text{ن}-\text{٢}}} = \text{٢}$ (مقدار ثابت)

∴ المتتابعة هندسية ، ر = ٢ ، أ = ٥

بفرض أن عدد الحدود = ن

∴ $\text{٢٥٥٥} = \frac{\text{٥}(\text{١} - \text{٢}^{\text{ن}})}{\text{١} - \text{٢}}$ ∴ $\text{١} - (\text{٢})^{\text{ن}} = -\text{٥١١}$

∴ $\text{٢}^{\text{ن}} = \text{٢}^{\text{٩}}$ ∴ ن = ٩

∴ عدد الحدود = ٩

٥

∵ $\text{ح}_{\text{٤}}$ = ٥٤   ∴ ٢ × $\text{ر}^{\text{٣}}$ = ٥٤

∴ $\text{ر}^{\text{٣}}$ = ٢٧   ∴ ر = ٣

، بفرض أن عدد الحدود = ن

∴ $\frac{\text{٢}(\text{٣}^{\text{ن}} - \text{١})}{\text{٣} - \text{١}} > \text{٥٠٠٠}$ ∴ $\text{٣}^{\text{ن}} > \text{٥٠٠١}$

∴ ن لو ٣ > لو ٥٠٠١   ∴ $\text{ن} > \frac{\text{لو ٥٠٠١}}{\text{لو ٣}}$

∴ ن > ٧,٨   ∴ ن = ٨ أو ٩ ، ...

∴ أقل عدد من الحدود يجب أخذه = ٨

٦

∵ أ $\text{ر}^{\text{٣}}$ = ٨   (١)

، أ $\text{ر}^{\text{٦}}$ = ٦٤   (٢)

وبقسمة (٢) على (١) :

∴ $ر^{٣} = ٨$ ∴ ر = ٢

وبالتعويض في (١) ∴ أ = ١

∴ المتتابعة هي : (١ ، ٢ ، ٤ ، ...)

، $حـ_{١٠} = \frac{١(٢^{١٠} - ١)}{٢ - ١} = ١٠٢٣$

٧

أ ر = ١٢

، ∵ $ح_{٤} = ٢ ح_{٣}$ ∴ $\frac{ح_{٤}}{ح_{٣}} = ٢$

∴ ر = ٢ ∴ أ × ٢ = ١٢

∴ أ = ٦

∴ $حـ_{٧} = \frac{٦(٢^{٧} - ١)}{٢ - ١} = ٧٦٢$

٨

أ ر = ٦ (١)

$أ ر^{٢} - أ = ٩$

$أ(ر^{٢} - ١) = ٩$ (٢)

بقسمة (٢) على (١) :

∴ $\frac{أ(ر^{٢} - ١)}{أ ر} = \frac{٩}{٦}$ ∴ $\frac{ر^{٢} - ١}{ر} = \frac{٣}{٢}$

∴ $٢ ر^{٢} - ٣ ر - ٢ = ٠$

∴ (٢ ر + ١) (ر − ٢) = ٠

∴ ر = ٢ أ، ر = $-\frac{١}{٢}$ (مرفوض)

∴ أ = ٣

∴ المتتابعة هي : (٣ ، ٦ ، ١٢ ، ...)

، $حـ_{١٢} = \frac{٣(٢^{١٢} - ١)}{٢ - ١} = ١٢٢٨٥$

٩

∵ $أ = ٤ أ ر^{٢}$ ∴ $ر^{٢} = \frac{١}{٤}$

∴ ر = $\frac{١}{٢}$ (الحدود موجبة)

، ∵ $أ ر + أ ر^{٤} = ٣٦$

∴ $أ(ر + ر^{٤}) = ٣٦$

∴ $أ\left(\frac{١}{٢} + \frac{١}{١٦}\right) = ٣٦$ ∴ أ = ٦٤

∴ المتتابعة هي : (٦٤ ، ٣٢ ، ١٦ ، ...)

، $حـ_{١٠} = \frac{٦٤\left(\left(\frac{١}{٢}\right)^{١٠} - ١\right)}{\frac{١}{٢} - ١} = ١٢٧ \frac{٧}{٨}$

١٠

∵ $أ ر^{٢} + أ ر^{٣} = ٦ أ ر$ ، بالقسمة على أ ر

∴ $ر + ر^{٢} = ٦$ ∴ $ر^{٢} + ر - ٦ = ٠$

∴ (ر − ٢) (ر + ٣) = ٠

∴ ر = ٢ أ، −٣ (مرفوض)

، ∵ $ح_{٧} = ٣٢٠$

∴ $أ × ٢^{٦} = ٣٢٠$ ∴ أ = ٥

∴ المتتابعة هي : (٥ ، ١٠ ، ٢٠ ، ...)

، $حـ_{٨} = \frac{٥(٢^{٨} - ١)}{٢ - ١} = ١٢٧٥$

١١

أ + أ ر = ٤٨ ∴ أ(١ + ر) = ٤٨ (١)

$أ ر^{٢} + أ ر^{٣} = ١٩٢$ ∴ $أ ر^{٢}(١ + ر) = ١٩٢$ (٢)

بقسمة (٢) على (١) :

∴ $ر^{٢} = ٤$ ∴ ر = ٢

ومن (١) : ∴ أ × ٣ = ٤٨ ∴ أ = ١٦

① المتتابعة هي : (١٦ ، ٣٢ ، ٦٤ ، ...)

② $حـ_{١٠} = \frac{١٦(٢^{١٠} - ١)}{٢ - ١} = ١٦٣٦٨$

١٢

∵ $أ + أ ر + أ ر^{٢} = ١٣$

∴ $أ(١ + ر + ر^{٢}) = ١٣$ (١)

، ∵ $أ ر^{٣} + أ ر^{٤} + أ ر^{٥} = ٣٥١$

∴ $أ ر^{٣}(١ + ر + ر^{٢}) = ٣٥١$ (٢)

بقسمة (٢) على (١) :

∴ $\frac{أ ر^{٣}(١ + ر + ر^{٢})}{أ(١ + ر + ر^{٢})} = \frac{٣٥١}{١٣}$

∴ $ر^{٣} = ٢٧$ ∴ ر = ٣

ومن (١) : أ = ١ ∴ المتتابعة هي : (١ ، ٣ ، ٩ ، ...)

، $حـ_{١٠} = \frac{١(١ - (٣)^{١٠})}{١ - ٣} = ٢٩٥٢٤$

١٣

∵ $\frac{أ[ر^{٤} - ١]}{ر - ١} = ٦٠$ (١)

، $\frac{أ ر^{٤}[ر^{٤} - ١]}{ر - ١} = \frac{١٦ أ[ر^{٤} - ١]}{ر - ١}$

∴ $ر^{٤} = ١٦$ ∴ ر = ٢ أ، −٢

وبالتعويض في (١) : ∴ أ = ٤ أ، أ = −١٢

∴ المتتابعة هي : (٤ ، ٨ ، ١٦ ، ...)

أ، (−١٢ ، ٢٤ ، −٤٨ ، ...) .

١٤

∵ $حـ_{ن} = ١٢٨ - ٢^{٧ - ن}$

∴ $حـ_{١} = ١٢٨ - ٢^{٧ - ١} = ٦٤ = ح_{١}$

، $حـ_{٢} = ١٢٨ - ٢^{٧ - ٢} = ٩٦ = ح_{١} + ح_{٢}$

∴ $ح_{٢} = ٩٦ - ٦٤ = ٣٢$

∴ $ر = \frac{ح_{٢}}{ح_{١}} = \frac{٣٢}{٦٤} = \frac{١}{٢}$

∴ المتتابعة هي : (٦٤ ، ٣٢ ، ١٦ ، ...)

، $ح_{٧} = أ ر^{٦} = ٦٤ × \left(\frac{١}{٢}\right)^{٦} = ١$

١٥

① $ر = \frac{٢١}{٧} = ٣$ ∴ |ر| > ١

∴ لا يمكن جمع عدد لا نهائي من حدودها

② $ر = \frac{٤٥}{٧٥} = \frac{٣}{٥}$ ∴ |ر| < ١

∴ يمكن إيجاد مجموع عدد لا نهائي من حدودها

، $حـ_{∞} = \frac{٧٥}{١ - \frac{٣}{٥}} = ١٨٧.٥$

③ $ر = \frac{-٥}{١٥} = -\frac{١}{٣}$ ∴ |ر| < ١

∴ يمكن إيجاد مجموع عدد لا نهائي من حدودها

، $حـ_{∞} = \frac{١٥}{١ - \left(-\frac{١}{٣}\right)} = ١١.٢٥$

④ $ر = \frac{-٤٨}{٩٦} = -\frac{١}{٢}$ ∴ |ر| < ١

∴ يمكن إيجاد مجموع عدد لا نهائي من حدودها

، $حـ_{∞} = \frac{٩٦}{١ - \left(-\frac{١}{٢}\right)} = ٦٤$

١٦

① $ر = \frac{١٢}{٢٤} = \frac{١}{٢}$ ∴ |ر| < ١

∴ يمكن إيجاد مجموع حدود المتتابعة إلى ∞

، $حـ_{∞} = \frac{٢٤}{١ - \frac{١}{٢}} = ٤٨$

② $ر = \frac{-٦}{٣} = -٢$ ∴ |ر| > ١

∴ لا يمكن إيجاد مجموع حدود المتتابعة إلى ∞

③ $ح_{١} = ٥ × ٢ = ١٠$ ، $ح_{٢} = ٥ × ٢^{٢} = ٢٠$

∴ $ر = \frac{ح_{٢}}{ح_{١}} = \frac{٢٠}{١٠} = ٢$ ∴ |ر| > ١

∴ لا يمكن إيجاد مجموع حدود المتتابعة إلى ∞

④ $ح_{١} = ٢ × ٥^{٠} = ٢$ ، $ح_{٢} = ٢ × ٥^{-١} = \frac{٢}{٥}$

∴ $ر = \frac{\frac{٢}{٥}}{٢} = \frac{١}{٥}$ ∴ |ر| < ١

∴ يمكن إيجاد مجموع حدود المتتابعة إلى ∞

، $حـ_{∞} = \frac{٢}{١ - \frac{١}{٥}} = \frac{٥}{٢}$

١٧

① $\sum_{ن=١}^{\infty} ٥٦ \times \left(\frac{٣}{٤}\right)^{ن-١}$

∴ أ = ٥٦ ، ر = $\frac{٣}{٤}$

∴ جـ∞ = $\frac{٥٦}{١ - \frac{٣}{٤}}$ = ٢٢٤

② $\sum_{ن=٢}^{\infty} \frac{١}{٨١}(٣)^{١-ن} = \sum_{ن=٢}^{\infty} \frac{١}{٨١}\left(\frac{١}{٣}\right)^{ن-١}$

∴ أ = $\frac{١}{٢٤٣}$ ، ر = $\frac{١}{٣}$

∴ جـ∞ = $\frac{\frac{١}{٢٤٣}}{١ - \frac{١}{٣}} = \frac{١}{١٦٢}$

١٨

أ = ١٨ ، أ ر^{٣} = $\frac{١٦}{٣}$

∴ ١٨ ر^{٣} = $\frac{١٦}{٣}$ ∴ ر = $\frac{٢}{٣}$

∴ جـ∞ = $\frac{١٨}{١ - \frac{٢}{٣}}$ = ٥٤

١٩

أ = ٨١ ، أ ر^{٥} = $\frac{١}{٣}$ ∴ ٨١ ر^{٥} = $\frac{١}{٣}$

∴ ر^{٥} = $\frac{١}{٢٤٣} = \left(\frac{١}{٣}\right)^{٥}$ ∴ ر = $\frac{١}{٣}$

، ح$_{٣}$ = ٨١ × $\left(\frac{١}{٣}\right)^{٢}$ = ٩

∴ جـ∞ = $\frac{٩}{١ - \frac{١}{٣}} = \frac{٢٧}{٢}$

٢٠

∵ $\frac{أ}{١ - ر}$ = ١٠٨ ∴ أ = ١٠٨ (١ − ر) (١)

، ∵ أ − أ ر = ١٢ ∴ أ (١ − ر) = ١٢ (٢)

بالتعويض من (١) في (٢):

∴ ١٠٨ (١ − ر)^{٢} = ١٢

∴ (١ − ر)^{٢} = $\frac{١}{٩}$ ∴ ١ − ر = ± $\frac{١}{٣}$

∴ ر = $\frac{٢}{٣}$ أو ر = $\frac{٤}{٣}$ (مرفوض)

∴ أ = ٣٦

∴ المتتابعة هي: (٣٦ ، ٢٤ ، ١٦ ، ...)

، جـ$_{٧}$ = $\frac{٣٦\left(١ - \left(\frac{٢}{٣}\right)^{٧}\right)}{١ - \frac{٢}{٣}} = \frac{٨٢٣٦}{٨١}$

٢١

∵ أ + أ ر = ١٦

∴ أ (١ + ر) = ١٦ (١)

، ∵ $\frac{أ}{١ - ر}$ = ٢٥ ∴ أ = ٢٥ (١ − ر) (٢)

بالتعويض من (٢) في (١):

∴ ٢٥ (١ − ر) (١ + ر) = ١٦

∴ ١ − ر^{٢} = $\frac{١٦}{٢٥}$

∴ ر^{٢} = $\frac{٩}{٢٥}$

∴ ر = $\frac{٣}{٥}$ ومنها أ = ١٠ أو ر = −$\frac{٣}{٥}$ ومنها أ = ٤٠

∴ المتتابعة هي: (١٠ ، ٦ ، $\frac{١٨}{٥}$ ، ...)

أو المتتابعة هي: (٤٠ ، −٢٤ ، $\frac{٧٢}{٥}$ ، ...)

٢٢

∵ أ = $\frac{أ ر}{١ - ر}$ ∴ ١ = $\frac{ر}{١ - ر}$

∴ ١ − ر = ر ∴ ر = $\frac{١}{٢}$

، ∵ أ + أ ر = ٩ ∴ أ + $\frac{١}{٢}$ أ = ٩

∴ $\frac{٣}{٢}$ أ = ٩ ∴ أ = ٦

∴ المتتابعة هي: (٦ ، ٣ ، $\frac{٣}{٢}$ ، ...)

٢٣

∵ ح$_{ن}$ = ٢ × $\frac{ح_{ن+١}}{١ - ر}$

∴ أ ر$^{ن-١}$ = ٢ $\left(\frac{أ ر^{ن}}{١ - ر}\right)$ ∴ ١ = $\frac{٢ ر}{١ - ر}$

∴ ر = $\frac{١}{٣}$ ∵ ح$_{٥}$ × ح$_{٣}$ = ١

∴ أ^{٢} ر^{٦} = ١ ∴ أ^{٢} × $\frac{١}{٧٢٩}$ = ١

∴ أ^{٢} = ٧٢٩ ∴ أ = ٢٧

∴ (ح$_{ن}$) = (٢٧ ، ٩ ، ٣ ، ...)

، جـ$_{٥}$ = $\frac{٢٧\left[١ - \left(\frac{١}{٣}\right)^{٥}\right]}{١ - \frac{١}{٣}} = \frac{١٢١}{٣}$

٢٤

∵ ح$_{ن}$ = ٧ × $\frac{ح_{ن+١}}{١ - ر}$ ∴ أ ر$^{ن-١}$ = $\frac{٧ أ ر^{ن}}{١ - ر}$

∴ ١ = $\frac{٧ ر}{١ - ر}$ ∴ ٧ ر = ١ − ر

∴ ر = $\frac{١}{٨}$

، ∵ ح$_{٣}$ = $\frac{٣}{٨}$ ∴ أ ر^{٢} = $\frac{٣}{٨}$

∴ أ $\left(\frac{١}{٦٤}\right)$ = $\frac{٣}{٨}$ ∴ أ = ٢٤

∴ المتتابعة هي: (٢٤ ، ٣ ، $\frac{٣}{٨}$ ، ...)

٢٥

∵ $\frac{أ}{١ - ر} = \frac{٣٧٥}{٤}$ (١)

، أ + أ ر = ٩٠

∴ أ (١ + ر) = ٩٠ (٢)

بقسمة (١) على (٢):

∴ $\frac{أ}{١ - ر} \times \frac{١}{أ (١ + ر)} = \frac{٣٧٥}{٤} \times \frac{١}{٩٠}$

∴ ١ − ر^{٢} = $\frac{٢٤}{٢٥}$ ∴ ر^{٢} = $\frac{١}{٢٥}$

∴ ر = $\frac{١}{٥}$ ومنها أ = ٧٥ أو ر = −$\frac{١}{٥}$ ومنها أ = ١١٢,٥

∴ يوجد متتابعتان هما: (٧٥ ، ١٥ ، ٣ ، ...)

أو (١١٢,٥ ، −٢٢,٥ ، ٤,٥ ، ...)

٢٦

∵ أ ر = ٢٤٠ (١)

، أ ر^{٤} = ٣٠ (٢)

بقسمة (٢) على (١): ∴ $\frac{أ ر^{٤}}{أ ر} = \frac{٣٠}{٢٤٠}$

∴ ر^{٣} = $\frac{١}{٨}$ ∴ ر = $\frac{١}{٢}$

وبالتعويض في (١):

∴ أ × $\frac{١}{٢}$ = ٢٤٠ ∴ أ = ٤٨٠

∴ المتتابعة هي: (٤٨٠ ، ٢٤٠ ، ١٢٠ ، ...)

، جـ∞ = $\frac{٤٨٠}{١ - \frac{١}{٢}}$ = ٩٦٠

٢٧

∵ أ ر − أ ر^{٥} = ٤٥

∴ أ ر (١ − ر^{٤}) = ٤٥ (١)

، ∵ $\frac{أ (١ - ر^{٤})}{١ - ر}$ = ١٨٠ (٢)

بقسمة (١) على (٢):

∴ أ ر (١ − ر^{٤}) × $\frac{١ - ر}{أ (١ - ر^{٤})} = \frac{٤٥}{١٨٠}$

∴ ر − ر^{٢} = $\frac{١}{٤}$ ∴ ٤ ر^{٢} − ٤ ر + ١ = ٠

∴ (٢ ر − ١)^{٢} = ٠

∴ ر = $\frac{١}{٢}$ ∴ |ر| < ١

∴ يمكن إيجاد مجموع عدد لا نهائي من حدودها

، من (١): ∴ أ = ٩٦

∴ المتتابعة هي: (٩٦ ، ٤٨ ، ٢٤ ، ...)

، جـ∞ = $\frac{٩٦}{١ - \frac{١}{٢}}$ = ١٩٢

٢٨

∵ أ ر + أ ر^{٢} = ٢٠ (١)

، أ + أ ر + أ ر^{٢} = ٦٥ (٢)

وبطرح (١) من (٢):

∴ أ = ٤٥ وبالتعويض في (١):

∴ ٤٥ ر + ٤٥ ر^{٢} = ٢٠

∴ ٩ ر^{٢} + ٩ ر − ٤ = ٠

∴ (٣ ر − ١) (٣ ر + ٤) = ٠

∴ ر = $\frac{١}{٣}$ أو ر = $\frac{-٤}{٣}$

∴ المتتابعة هي : (٤٥ ، ١٥ ، ٥ ، ...)

أو (٤٥ ، -٦٠ ، ٨٠ ، ...)

والمتتابعة (٤٥ ، ١٥ ، ٥ ، ...) يمكن جمعها إلى ∞

∴ $ح_{∞} = \frac{٤٥}{١ - \frac{١}{٣}} = ٦٧,٥$

٢٩

∵ أ + أ ر = ٣٦ ∴ أ (١ + ر) = ٣٦ (١)

، ∵ $(ح_{٣})^{٢} = ٣٦$

∴ $ح_{٣} = ٦$ ∴ $أ ر^{٢} = ٦$ (٢)

بقسمة (١) على (٢) :

∴ $\frac{١ + ر}{ر^{٢}} = ٦$

∴ $٦ ر^{٢} = ١ + ر$ ∴ $٦ ر^{٢} - ر - ١ = ٠$

∴ (٣ ر + ١) (٢ ر - ١) = ٠

∴ ر = $\frac{-١}{٣}$ (مرفوض) أو ر = $\frac{١}{٢}$

من (٢) : أ × $\frac{١}{٤}$ = ٦ ∴ أ = ٢٤

∴ المتتابعة هي : (٢٤ ، ١٢ ، ٦ ، ...)

، $ح_{∞} = \frac{٢٤}{١ - \frac{١}{٢}} = ٤٨$

٣٠

∵ أ + أ ر = ١٠٨ ∴ أ (١ + ر) = ١٠٨ (١)

، ∵ $أ ر^{٢} + أ ر^{٣} = ١٢$ ∴ $أ ر^{٢} (١ + ر) = ١٢$ (٢)

بقسمة (٢) على (١) :

∴ $\frac{أ ر^{٢} (١ + ر)}{أ (١ + ر)} = \frac{١}{٩}$

∴ $ر^{٢} = \frac{١}{٩}$ ∴ ر = $\frac{١}{٣}$ أو $-\frac{١}{٣}$ (مرفوض)

وبالتعويض في (١) : ∴ أ = ٨١

∴ المتتابعة هي : (٨١ ، ٢٧ ، ٩ ، ...)

، ∵ |ر| < ١

∴ يمكن إيجاد مجموع عدد غير منته من حدود المتتابعة

، $ح_{∞} = \frac{٨١}{١ - \frac{١}{٣}} = ١٢١,٥$

٣١

① الخطأ : |ر| ≥ ١ ، الصواب : |ر| < ١

② التصحيح : يساوي ضعف حدها الأول

ثالثًا مسائل تقيس مهارات التفكير

① (أ) ② (د) ③ (ج)

إرشادات الحل :

① ∵ $ح_{١} + ح_{٢} = ٣$ وهما عددان صحيحان

∴ $ح_{١} = ١$ ، $ح_{٢} = ٢$ ومنها ر = ٢

(مرفوض لأن المتتابعة غير منتهية)

أو $ح_{١} = ٢$ ، $ح_{٢} = ١$ ، ومنها ر = $\frac{١}{٢}$

∴ $ح_{∞} = \frac{أ}{١ - ر} = \frac{٢}{١ - \frac{١}{٢}} = ٤$

② ∵ المتسلسلة عبارة عن متتابعة هندسية حدها الأول أ = جتا ٦٠° = $\frac{١}{٢}$

، أساسها ر = جتا ٦٠° = $\frac{١}{٢}$

∴ $ح_{∞} = \frac{أ}{١ - ر} = \frac{\frac{١}{٢}}{١ - \frac{١}{٢}} = ١$

③ ∵ $\sum_{ر=٠}^{∞} \frac{أ}{(٤)^{ر}} = \sum_{ر=٠}^{∞} أ \left(\frac{١}{٤}\right)^{ر}$

$= \frac{أ}{١ - \frac{١}{٤}} = \frac{٤ أ}{٣}$

∴ $\frac{٤ أ}{٣} = ١٦$ ∴ أ = ١٢

تطبيقات حياتية

١

عدد البكتريا يكون متتابعة هندسية فيها أ = ٨٠٠ ، ر = ٢

∴ $ح_{١٠} = \frac{٨٠٠ (١ - (٢)^{١٠})}{١ - ٢} = ٨١٨٤٠٠$

٢

∵ مقدار ما يتسرب من الخزان يوميًا يكون متتابعة هندسية حدها الأول ٦ وأساسها ٢

ويفرض أن الخزان سيفرغ بعد ن يومًا

∴ $ح_{ن} = ٦١٣٨$ ∴ $\frac{٦ (٢^{ن} - ١)}{٢ - ١} = ٦١٣٨$

∴ $٢^{ن} - ١ = ١٠٢٣$ ∴ $٢^{ن} = ١٠٢٤ = ٢^{١٠}$

∴ ن = ١٠ ∴ الخزان سيفرغ بعد ١٠ أيام

٣

المرتب يكون متتابعة هندسية فيها أ = ٧٢٠٠

، ر = ١,٠٦

∴ $ح_{٧} = ٧٢٠٠ × (١,٠٦)^{٦} = ١٠٢١٣$

، $ح_{٧} = \frac{٧٢٠٠ [(١,٠٦)^{٧} - ١]}{١,٠٦ - ١} = ٦٠٤٣٦$ جنيهًا

٤

إنتاج الذهب يكون متتابعة هندسية

أ = ٤٢٠٠ ، ر = ٠,٩

∴ $ح_{٨} = ٤٢٠٠ × (٠,٩)^{٧} \simeq ٢٠٠٨,٨$ كجم

، $ح_{٨} = \frac{٤٢٠٠ [١ - (٠,٩)^{٨}]}{١ - ٠,٩} \simeq ٢٣٩٢٠$ كجم

٥

محيطات المثلثات تكون متتابعة هندسية هي :

(١٢٠ ، ٦٠ ، ٣٠ ، ...)

∴ أ = ١٢٠ ، ر = $\frac{١}{٢}$

∴ $ح_{١٠} = \frac{١٢٠ (١ - (\frac{١}{٢})^{١٠})}{١ - \frac{١}{٢}} \simeq ٢٤٠$ سم

٦

ما ينتجه البئر من بترول يكون متتابعة هندسية حدها الأول ٤٨٠٠٠ والأساس = ١ - ٠,٠٥ = ٠,٩٥

∴ مجموع ما ينتجه البئر في ٥ سنوات هو

$ح_{٥} = \frac{٤٨٠٠٠ [١ - (٠,٩٥)^{٥}]}{١ - ٠,٩٥} = ٢١٧١٧٠$ برميل

أقصى ما يمكن إنتاجه $ح_{∞} = \frac{٤٨٠٠٠}{١ - ٠,٩٥}$

= ٩٦٠٠٠٠ برميل

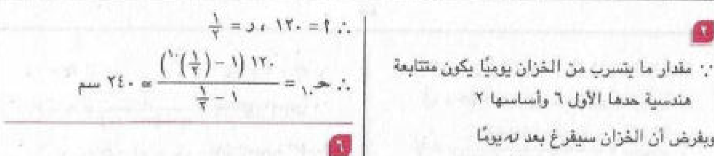
٧

المسافات المقطوعة تكون متتابعة هندسية فيها

أ = ٢٥ ، ر = $\frac{٦٠}{١٠٠} = \frac{٣}{٥}$

∴ المسافة الكلية = $ح_{∞} = \frac{٢٥}{١ - \frac{٣}{٥}} = \frac{١٢٥}{٢}$ متر

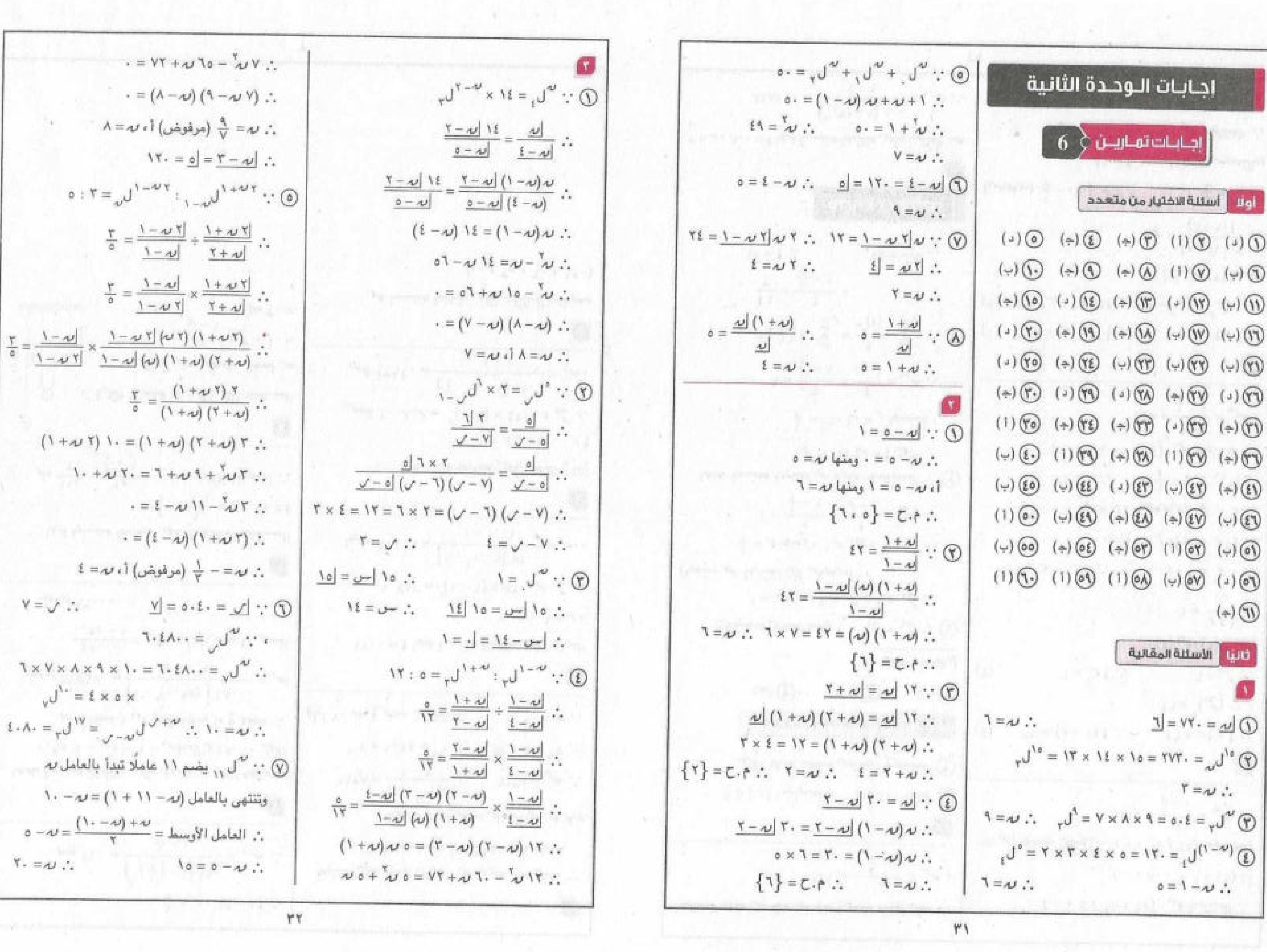
٨



المسافات التي تكون قد قطعتها الكرة من لحظة سقوطها حتى تسكن

$= ١٠ + ٢ × \frac{٥}{١ - \frac{١}{٢}}$

= ٣٠ مترًا



إجابات الوحدة الثانية

إجابات تمارين 6

أولاً: أسئلة الاختيار من متعدد

(١) (د)	(٢) (أ)	(٣) (ج)	(٤) (ج)	(٥) (د)
(٦) (ب)	(٧) (أ)	(٨) (ج)	(٩) (ج)	(١٠) (ب)
(١١) (ب)	(١٢) (د)	(١٣) (ج)	(١٤) (د)	(١٥) (ج)
(١٦) (ب)	(١٧) (ب)	(١٨) (ج)	(١٩) (ج)	(٢٠) (د)
(٢١) (ب)	(٢٢) (ب)	(٢٣) (ب)	(٢٤) (ج)	(٢٥) (د)
(٢٦) (د)	(٢٧) (ج)	(٢٨) (د)	(٢٩) (د)	(٣٠) (ج)
(٣١) (ج)	(٣٢) (د)	(٣٣) (ج)	(٣٤) (ج)	(٣٥) (أ)
(٣٦) (ج)	(٣٧) (أ)	(٣٨) (ج)	(٣٩) (أ)	(٤٠) (ب)
(٤١) (ج)	(٤٢) (ب)	(٤٣) (د)	(٤٤) (ب)	(٤٥) (ب)
(٤٦) (ب)	(٤٧) (ج)	(٤٨) (ج)	(٤٩) (ب)	(٥٠) (أ)
(٥١) (ب)	(٥٢) (أ)	(٥٣) (ج)	(٥٤) (ج)	(٥٥) (ب)
(٥٦) (د)	(٥٧) (ب)	(٥٨) (أ)	(٥٩) (أ)	(٦٠) (أ)
(٦١) (ج)				

ثانياً: الأسئلة المقالية

١

(١) ⌊ن = ٧٢٠ = ⌊٦ ∴ ن = ٦

(٢) $^{١٥}ل_{ن}$ = ٢٧٣٠ = ١٣ × ١٤ × ١٥ = $^{١٥}ل_{٣}$ ∴ ن = ٣

(٣) $^{ن}ل_{٣}$ = ٥٠٤ = ٩ × ٨ × ٧ = $^{٩}ل_{٣}$ ∴ ن = ٩

(٤) $^{(ن-١)}ل_{٤}$ = ١٢٠ = ٥ × ٤ × ٣ × ٢ = $^{٥}ل_{٤}$ ∴ ن − ١ = ٥ ∴ ن = ٦

(٥) ∵ $^{ن}ل_{٠}$ + $^{ن}ل_{١}$ + $^{ن}ل_{٢}$ = ٥٠
∴ ١ + ن + ن (ن − ١) = ٥٠
∴ ن² + ١ = ٥٠ ∴ ن² = ٤٩
∴ ن = ٧

(٦) ⌊ن − ٤ = ١٢٠ = ⌊٥ ∴ ن − ٤ = ٥
∴ ن = ٩

(٧) ∵ ن ⌊٢ن − ١ = ١٢ ∴ ٢ن ⌊٢ن − ١ = ٢٤ = ⌊٤
∴ ⌊٢ن = ⌊٤ ∴ ٢ن = ٤
∴ ن = ٢

(٨) ∵ ⌊ن + ١ / ⌊ن = ٥ ∴ (ن + ١) ⌊ن / ⌊ن = ٥
∴ ن + ١ = ٥ ∴ ن = ٤

٢

(١) ∵ ⌊ن − ٥ = ١
∴ ن − ٥ = ٠ ومنها ن = ٥
أو ن − ٥ = ١ ومنها ن = ٦
∴ م.ح = {٥ ، ٦}

(٢) ∵ ⌊ن + ١ / ⌊ن − ١ = ٤٢
∴ (ن + ١) (ن) ⌊ن − ١ / ⌊ن − ١ = ٤٢
∴ (ن + ١) (ن) = ٤٢ = ٧ × ٦ ∴ ن = ٦
∴ م.ح = {٦}

(٣) ∵ ١٢ ⌊ن = ⌊ن + ٢
∴ ١٢ ⌊ن = (ن + ٢) (ن + ١) ⌊ن
∴ (ن + ٢) (ن + ١) = ١٢ = ٤ × ٣
∴ ن + ٢ = ٤ ∴ ن = ٢ ∴ م.ح = {٢}

(٤) ∵ ⌊ن = ٣٠ ⌊ن − ٢
∴ ن (ن − ١) ⌊ن − ٢ = ٣٠ ⌊ن − ٢
∴ ن (ن − ١) = ٣٠ = ٦ × ٥
∴ ن = ٦ ∴ م.ح = {٦}

٣

(١) ∵ $^{ن}ل_{٤}$ = ١٤ × $^{ن-٢}ل_{٢}$
∴ ⌊ن / ⌊ن − ٤ = ١٤ ⌊ن − ٢ / ⌊ن − ٥
∴ ن (ن − ١) ⌊ن − ٢ / (ن − ٤) ⌊ن − ٥ = ١٤ ⌊ن − ٢ / ⌊ن − ٥
∴ ن (ن − ١) = ١٤ (ن − ٤)
∴ ن² − ن = ١٤ن − ٥٦
∴ ن² − ١٥ن + ٥٦ = ٠
∴ (ن − ٨) (ن − ٧) = ٠
∴ ن = ٨ أو ن = ٧

(٢) ∵ $^{٥}ل_{ر}$ = ٢ × $^{٦}ل_{ر-١}$
∴ ⌊٥ / ⌊٥ − ر = ٢ ⌊٦ / ⌊٧ − ر
∴ ⌊٥ / ⌊٥ − ر = ٢ × ٦ ⌊٥ / (٧ − ر) (٦ − ر) ⌊٥ − ر
∴ (٧ − ر) (٦ − ر) = ٢ × ٦ = ١٢ = ٤ × ٣
∴ ٧ − ر = ٤ ∴ ر = ٣

(٣) ∵ $^{ن}ل_{٠}$ = ١ ∴ ١٥ ⌊س = ⌊١٥
∴ ١٥ ⌊س = ١٥ ⌊١٤ ∴ س = ١٤
∴ ⌊س − ١٤ = ⌊٠ = ١

(٤) ∵ $^{ن-١}ل_{٢}$: $^{ن+١}ل_{٢}$ = ٥ : ١٢
∴ ⌊ن − ١ / ⌊ن − ٤ ÷ ⌊ن + ١ / ⌊ن − ٢ = ٥/١٢
∴ ⌊ن − ١ / ⌊ن − ٤ × ⌊ن − ٢ / ⌊ن + ١ = ٥/١٢
∴ (ن − ٢) (ن − ٣) ⌊ن − ٤ / ⌊ن − ٤ × ⌊ن − ١ / (ن + ١) (ن) ⌊ن − ١ = ٥/١٢
∴ ١٢ (ن − ٢) (ن − ٣) = ٥ ن (ن + ١)
∴ ١٢ن² − ٦٠ن + ٧٢ = ٥ن² + ٥ن

∴ ٧ن² − ٦٥ن + ٧٢ = ٠
∴ (٧ن − ٩) (ن − ٨) = ٠
∴ ن = ٩/٧ (مرفوض) أو ن = ٨
∴ ⌊ن − ٣ = ⌊٥ = ١٢٠

(٥) ∵ $^{٢ن+١}ل_{ن-١}$: $^{٢ن-١}ل_{ن}$ = ٣ : ٥
∴ ⌊٢ن + ١ / ⌊ن + ٢ ÷ ⌊٢ن − ١ / ⌊ن − ١ = ٣/٥
∴ ⌊٢ن + ١ / ⌊ن + ٢ × ⌊ن − ١ / ⌊٢ن − ١ = ٣/٥
∴ (٢ن + ١) (٢ن) ⌊٢ن − ١ / (ن + ٢) (ن + ١) (ن) ⌊ن − ١ × ⌊ن − ١ / ⌊٢ن − ١ = ٣/٥
∴ ٢ (٢ن + ١) / (ن + ٢) (ن + ١) = ٣/٥
∴ ٣ (ن + ٢) (ن + ١) = ١٠ (٢ن + ١)
∴ ٣ن² + ٩ن + ٦ = ٢٠ن + ١٠
∴ ٣ن² − ١١ن − ٤ = ٠
∴ (٣ن + ١) (ن − ٤) = ٠
∴ ن = −١/٣ (مرفوض) أو ن = ٤

(٦) ∵ ⌊ر = ٥٠٤٠ = ⌊٧ ∴ ر = ٧
∵ $^{ن}ل_{ر}$ = ٦٠٤٨٠٠
∴ $^{ن}ل_{٧}$ = ٦٠٤٨٠٠ = ١٠ × ٩ × ٨ × ٧ × ٦ × ٥ × ٤ = $^{١٠}ل_{٧}$
∴ ن = ١٠ ∴ $^{ن+ر}ل_{ن-ر}$ = $^{١٧}ل_{٣}$ = ٤٠٨٠

(٧) ∵ $^{ن}ل_{١١}$ يضم ١١ عاملاً تبدأ بالعامل ن
وتنتهي بالعامل (ن − ١١ + ١) = ن − ١٠
∴ العامل الأوسط = (ن + (ن − ١٠)) / ٢ = ن − ٥
∴ ن − ٥ = ١٥ ∴ ن = ٢٠

٤

① الطرف الأيمن = (ن + ١) (ن) |ن − ١ / |ن − ١ − ن (ن − ١) |ن − ٢ / |ن − ٢

= ن (ن + ١) − ن (ن − ١)

= $ن^{٢}$ + ن − $ن^{٢}$ + ن = ٢ ن

= الطرف الأيسر.

② الطرف الأيمن = (ن + ٣) (ن + ٢) (ن + ١) |ن / |ن

= (ن + ٣) (ن + ٢) (ن + ١)

= (ن + ٣) × $ل^{ن+٢}_{٢}$

= الطرف الأيسر.

③ الطرف الأيمن = ٨ × ٧ |٢ / ٨ × ٧ |٦ + ٨ |٣ / ٨ |٧ + |٤ / |٨

= (٥٦ × ٢ + ٨ × ٦ + ٢٤) / |٨ = ١٨٤ / |٨

= ١٨٤ / ٨ |٧ = ٢٣ / |٧ = الطرف الأيسر.

④ الطرف الأيمن = |ن + ١ / |ن − ر = (ن + ١) |ن / |ن − ر

= (ن + ١) × $ل^{ن}_{ر}$ = الطرف الأيسر.

⑤ $ل^{ن}_{ر}$ / $ل^{ن-١}_{ر-١}$ = |ن / |ن − ر × |ن − ر / |ن − ١ = ن |ن − ١ / |ن − ١ = ن

∴ $ل^{٩٧}_{٤٠}$: $ل^{٩٦}_{٣٩}$ = $ل^{٩٧}_{٤٠}$: $ل^{٩٧-١}_{٤٠-١}$ = ٩٧

٥

① ∵ (ن + ١) / |ن (ن + ١) + ٢ / |ن + ١ = ٥٦ / (ن + ٢) |ن + ١

∴ (ن + ١ + ٢) / |ن + ١ = ٥٦ / (ن + ٢) |ن + ١

∴ (ن + ٢) (ن + ٣) = ٥٦ = ٧ × ٨

∴ ن + ٢ = ٧ ∴ ن = ٥

② ∵ (ن + ١) / (ن + ٢) |ن + ١ + ن / (ن + ١) |ن = ١٣ / ٤٢

∴ ١ / (ن + ٢) + ١ / (ن + ١) = ١٣ / ٤٢

∴ (ن + ١ + ن + ٢) / (ن + ٢) (ن + ١) = ١٣ / ٤٢

∴ (٢ ن + ٣) / (ن + ٢) (ن + ١) = ١٣ / ٤٢

∴ ١٣ (ن + ٢) (ن + ١) = ٤٢ (٢ ن + ٣)

∴ ١٣ $ن^{٢}$ + ٣٩ ن + ٢٦ = ٨٤ ن + ١٢٦

∴ ١٣ $ن^{٢}$ − ٤٥ ن − ١٠٠ = ٠

∴ (١٣ ن + ٢٠) (ن − ٥) = ٠

∴ ن = −٢٠ / ١٣ (مرفوض)، أ، ن = ٥

٦

① $ل^{٧}_{٥}$ = ٢٥٢٠ طريقة.

② |٩ − ١ = |٨ = ٤٠٣٢٠ طريقة.

③ $ل^{١٠}_{٣}$ = ٧٢٠ طريقة.

④ عدد الطرق

= ٣ × ٢ = ٦ طرق.

كفتة ← عصير، مياه غازية
فراخ ← عصير، مياه غازية
سمك ← عصير، مياه غازية

⑤ عدد الترتيبات = $ل^{٢٨}_{٥}$

= ١١٧٩٣٦٠٠ ترتيب.

⑥ عدد الطرق = ٢ × ٣ × ٢ = ١٢ طريقة.

⑦ $ل^{٤}_{٢}$ = ٤ × ٣ = ١٢ عددًا. ⑧ $٣^{٣}$ = ٢٧ عددًا

⑨ $٤^{٢}$ = ١٦ عددًا.

آحاد	عشرات	مئات
٣	٤	٤
٢	٤	٣

⑩ ٤ × ٤ × ٣ = ٤٨ طريقة.

⑪ ٢ × ٤ × ٣ = ٢٤ عددًا.

⑫ ٣ × ٢ × ٢ × ١ = ١٢ طريقة. [٣] [٢] [٢] [١]

٧

① $ل^{٧}_{٢}$ = ٢١٠

② $ل^{٧}_{٧}$ = |٧ = ٥٠٤٠

③ ٣ × $ل^{٦}_{٤}$ = ٣ × ٦ × ٥ × ٤ × ٣ = ١٠٨٠ طريقة.

آحاد	عشرات	مئات	الآلاف	عشرات الآلاف
٣	٦	٥	٤	٣

④ ١ × $ل^{٦}_{٣}$ = ١ × ٦ × ٥ × ٤ [١] [٦] [٥] [٤]

= ١٢٠ طريقة.

⑤ ٣ × $ل^{٦}_{٣}$ = ٣ × ٦ × ٥ × ٤ [٣] [٦] [٥] [٤]

= ٣٦٠ طريقة.

٨

① $ل^{٥}_{٢}$ = ٥ × ٤ = ٢٠ ② $٥^{٢}$ = ٥ × ٥ = ٢٥

③ $ل^{٥}_{٣}$ = ٥ × ٤ × ٣ = ٦٠

④ ٢ × $ل^{٤}_{٢}$ = ٢ × ٤ × ٣ = ٢٤ [٣] [٤] [٢]

⑤ ١ × $ل^{٤}_{٣}$ = ١ × ٤ × ٣ × ٢ [١] [٤] [٣] [٢]

= ٢٤

٩

① $ل^{٦}_{١}$ = ٦

② عدد طرق اختيار حرفين مع مراعاة الترتيب

= $ل^{٦}_{٢}$ = ٦ × ٥ = ٣٠

١٠

∵ س = {١، ٢، ٣، ٤، ٥، ٦، ٧}

∴ ن(س) = ٧ ، ن(ص) = $ل^{٧}_{٢}$ = ٧ × ٦ = ٤٢

١١

∵ $ل^{س+ص}_{٣}$ = ٥٠٤ = ٩ × ٨ × ٧ = $ل^{٩}_{٣}$

∴ س + ص = ٩ (١)

، ∵ $ل^{س-ص}_{٤}$ = ١٢٠ = ٥ × ٤ × ٣ × ٢ = $ل^{٥}_{٤}$

∴ س − ص = ٥ (٢)

من (١) ، (٢) : ∴ س = ٧ ، ص = ٢

∴ $ل^{س}_{ص}$ = $ل^{٧}_{٢}$ = ٤٢

١٢

① ∵ $ل^{س+٢}_{٢}$ = ٤٢ س

∴ (س + ٢) (س + ١) × س = ٤٢ س

∴ (س + ٢) (س + ١) = ٤٢ = ٧ × ٦

∴ س + ٢ = ٧ ∴ س = ٥

② ∵ $ل^{٧}_{س}$ = س × $ل^{٧}_{س-١}$

∴ |٧ / |٧ − س = س |٧ / |٧ − س + ١

∴ ١ / |٧ − س = س / |٨ − س

∴ ١ / |٧ − س = س / (٨ − س) |٧ − س

∴ ٨ − س = س ∴ س = ٤

③ ∵ |س − ٢ × |س / |س − ٢ = ٢٠ |س − ٢

∴ |س = ٢٠ |س − ٢

∴ س (س − ١) |س − ٢ = ٢٠ |س − ٢

∴ س (س − ١) = ٢٠ = ٥ × ٤

∴ س = ٥

④ ∵ |س + ٢ / |س × |س / |س − ١١ = ١٨٢ × |س − ١١

∴ |س + ٢ = ١٨٢ |س

∴ (س + ٢) (س + ١) |س = ١٨٢ |س

∴ (س + ٢) (س + ١) = ١٨٢ = ١٤ × ١٣

∴ س + ٢ = ١٤ ∴ س = ١٢

١٣

∵ ٢٠ × |س + ٢ / |س = |س + ٥ / |س

∴ ٢٠ |س + ٢ = (س + ٥) (س + ٤) |س + ٢

∴ (س + ٥) (س + ٤) = ٢٠ = ٦ × ٥

∴ س + ٥ = ٦ ∴ س = ١ ∴ م.ح = {١}

١٤

∵ $^{ن}ل_{١٠} > {}^{ن}ل_{١٤}$ ∴ $\frac{|ن}{|ن - ١٥} > \frac{|ن}{|ن - ١٤}$

∴ $|ن - ١٤ < |ن - ١٥$

∴ $(ن - ١٤)\ |ن - ١٥ > |ن - ١٥$

∴ $ن - ١٤ > ١$ ∴ $ن > ١٥$

∴ $ن = ١٦$ أ، ١٧ أ، ١٨ أ، ...

∴ أقل قيمة للعدد $ن = ١٦$

١٥

∵ $^{أ+ب}ل_{٤} = ٨٤٠ = ٧ \times ٦ \times ٥ \times ٤ = {}^{٧}ل_{٤}$

∴ $أ + ب = ٧$ (١)

، ∵ $|أ - ب = ٦ = |٣$ ∴ $أ - ب = ٣$ (٢)

من (١) ، (٢) : ∴ $أ = ٥$ ، $ب = ٢$

∴ $|٢أ - ٥ب = |٢ \times ٥ - ٥ \times ٢ = |٠ = ١$

١٦

∵ $|ر = ١٢٠ = |٥$ ∴ $ر = ٥$

، $^{ن}ل_{٥} = ٢٥٢٠ = ٧ \times ٦ \times ٥ \times ٤ \times ٣ = {}^{٧}ل_{٥}$

∴ $ن = ٧$

∴ $|٢ر - ٢ن = |٢ \times ٥ - ٢ \times ٧ = |١ = ١$

١٧

∵ $^{ن}ل_{٤} = ١٤ \times {}^{ن-٢}ل_{٢}$

∴ $ن(ن - ١)(ن - ٢)(ن - ٣)$

$= ١٤ \times (ن - ٢)(ن - ٣)(ن - ٤)$

∴ $ن^٢ - ن = ١٤ن - ٥٦$

∴ $ن^٢ - ١٥ن + ٥٦ = ٠$

∴ $(ن - ٨)(ن - ٧) = ٠$ ∴ $ن = ٨$ أ، $ن = ٧$

∴ $|٣ن - ٢٤ = |٣ \times ٨ - ٢٤ = |٠ = ١$

أ، $|٣ن - ٢٤ = |٣ \times ٧ - ٢٤$ (مرفوض)

ثالثا مسائل تقيس مهارات التفكير

① (جـ) ② (جـ) ③ (د)

④ (ب) ⑤ (د) ⑥ (ب)

إرشادات الحل :

① ∵ $^{ن}ل_{٢}$ ، $^{ن}ل_{٣}$ ، $^{ن+١}ل_{٣}$ في تتابع حسابي

∴ $^{ن}ل_{٢} + {}^{ن+١}ل_{٣} = ٢\ {}^{ن}ل_{٣}$

∴ $ن(ن - ١) + (ن + ١)(ن)(ن - ١)$

$= ٢ن(ن - ١)(ن - ٢)$

بالقسمة على $ن(ن - ١)$ حيث $ن \neq ٠$ ، $ن \neq ١$

∴ $١ + (ن + ١) = ٢(ن - ٢)$ ∴ $ن = ٦$

∴ $ن + |ن - ٣ = ٦ + |٣ = ١٢$

② ∵ $س = |س$ ∴ $س = س\ |س - ١$

، بالقسمة على $س$ حيث $س \neq ٠$

∴ $|س - ١ = ١$

∴ $س - ١ = ٠$ ومنها $س = ١$

أ، $س - ١ = ١$ ومنها $س = ٢$

∴ عدد حلول المعادلة يساوي ٢

③ ∵ $|ن$ يقبل القسمة على ٧ ، ١٣

∴ يجب أن يحتوي مفكوك $|ن$ على العامل ٧ والعامل ١٣ وذلك يحدث فقط عندما $ن \geq ١٣$

④ ∵ رقم الآحاد يساوي صفر في $|ن$ عندما $ن \geq ٥$

∴ رقم الآحاد لا يساوي صفر في $|ن$ عندما $ن < ٥$

⑤ ∵ $|ر = ن$ ، $|ن = ر$

يتحقق عندما $ن = ر = ١$ ، $ن = ر = ٢$

∴ $ن + ر = ٢$ أ، ٤

⑥ ∵ $\frac{١}{٢}|ن$ ، $|ن - ٢$ ، $|٢ - ن$

هي أطوال أضلاع مثلث وذلك لا يتحقق إلا عندما تكون $ن = ٢$

∴ أطوال أضلاع المثلث هي $\frac{١}{٢}|٢$ ، $|٠$ ، $|٠$

أي أن : ١ ، ١ ، ١

∴ المثلث متساوي الأضلاع وطول ضلعه ١ سم

∴ مساحته $= \frac{١}{٢} \times ١ \times ١ \times$ جا ٦٠°

$= \frac{\sqrt{٣}}{٤}$ سم²

تطبيقات حياتية

١

عدد الاختيارات $= ٣ \times ٥ = ١٥$

٢

الآلاف	مئات	عشرات	آحاد
٩	٩	٩	٩

عدد الطرق $= ٩^٤ = ٦٥٦١$

٣

...	...	...	...	...	...	حـ	٩
١٠	١٠	١٠	١٠	١٠	١٠	٤	١

عدد الطرق

∴ عدد الطرق $= ١٠^٦ \times ٤ = ٤٠٠٠٠٠٠$

٤

متغيرة ← → ثابتة

.....	.....	.....	.....	.....	.....	.....	.....	٥	٢	٠
١٠	١٠	١٠	١٠	١٠	١٠	١٠	١٠	١	١	١

عدد الطرق

عدد الأرقام $= (١٠)^٨ = ١٠٠٠٠٠٠٠٠$

(لاحظ أننا نسمح بتكرار الرقم الواحد لأكثر من مرة)

٥

عدد اللوحات $= ٢٨ \times ٢٧ \times ٢٦ \times ٩ \times ٨ \times ٧$

$= ٩٩٠٦٦٢٤$

الأرقام — الحروف

٧	٨	٩	٢٦	٢٧	٢٨

إجابات تمارين 7

أولا أسئلة الاختيار من متعدد

① (جـ) ② (ب) ③ (جـ) ④ (ب) ⑤ (جـ)

⑥ (أ) ⑦ (د) ⑧ (د) ⑨ (أ) ⑩ (د)

⑪ (أ) ⑫ (جـ) ⑬ (ب) ⑭ (جـ) ⑮ (د)

⑯ (أ) ⑰ (جـ) ⑱ (جـ) ⑲ (جـ) ⑳ (د)

(٢١) (جـ) (٢٢) (أ) (٢٣) (جـ) (٢٤) (ب) (٢٥) (ب)

(٢٦) (ب) (٢٧) (ب) (٢٨) (د) (٢٩) (ب) (٣٠) (أ)

(٣١) (ب) (٣٢) (د) (٣٣) (أ) (٣٤) (د) (٣٥) (ب)

(٣٦) (جـ) (٣٧) (ب) (٣٨) (جـ) (٣٩) (د) (٤٠) (جـ)

(٤١) (ب) (٤٢) (جـ) (٤٣) (د) (٤٤) (د) (٤٥) (جـ)

(٤٦) (جـ) (٤٧) (ب) (٤٨) (جـ) (٤٩) (جـ) (٥٠) (ب)

(٥١) (د) (٥٢) (جـ) (٥٣) (جـ) (٥٤) (ب) (٥٥) (جـ)

(٥٦) (جـ) (٥٧) (ب) (٥٨) (د) (٥٩) (جـ) (٦٠) (د)

(٦١) (د) (٦٢) (جـ)

ثانيا الأسئلة المقالية

١

① $^{٨}ق_{٣} = \frac{^{٨}ل_{٣}}{|٣}$ ② $^{١٩}ق_{٣} = \frac{^{١٩}ل_{٣}}{|٣}$

③ $^{ن}ق_{ن} = \frac{^{ن}ل_{ن}}{|ن}$

④ $^{س}ق_{س - ص} = {}^{س}ق_{ص} = \frac{^{س}ل_{ص}}{|ص}$

٢

① $^{٨}ق_{٣}$ ② $^{٩}ق_{٣}$

③ $^{١٠}ق_{٤}$ ④ $^{٨}ق_{٠}$

٣

∵ $^{م}ق_{م - ٤} = ٣٥$ ∴ $^{م}ق_{م - (م - ٤)} = ٣٥$

∴ $^{م}ق_{٤} = ٣٥$

$\therefore$ $^{م}ل_{٤} = ٣٥\ |٤ = ٤ \times ٥ \times ٦ \times ٧ = {}^{٧}ل_{٤}$

$\therefore$ م = ٧

، $\because$ $^{ن}ق_{م} = {}^{ن}ق_{م+١}$ $\therefore$ م + م + ١ = ن

$\therefore$ ن = ٢م + ١ $\therefore$ ن = ١٥

٤

$\because$ $^{ن}ق_{٣} = ٣٥$ $\therefore$ $\frac{^{ن}ل_{٣}}{|٣} = ٣٥$

$\therefore$ $^{ن}ل_{٣} = ٣٥\ |٣ = ٢١٠ = ٥ \times ٦ \times ٧ = {}^{٧}ل_{٣}$

$\therefore$ ن = ٧ $\because$ $^{س}ق_{ن} = {}^{س}ق_{ن+٣}$

$\therefore$ $^{س}ق_{٧} = {}^{س}ق_{١٠}$ $\therefore$ س = ٧ + ١٠ = ١٧

٥

ر = ٢ر − ٤٧ $\therefore$ ر = ٤٧ (مرفوض)

أ، ر + ٢ر − ٤٧ = ٢٨

$\therefore$ ٣ر = ٧٥ $\therefore$ ر = ٢٥

٦

٢ر + ١ = ٣ر − ١ $\therefore$ ر = ٢

أ، ٢ر + ١ + ٣ر − ١ = ٢٥ $\therefore$ ٥ر = ٢٥

$\therefore$ ر = ٥

٧

٣ر − ٥ = ر − ٣ $\therefore$ ر = ١ (مرفوض)

لأن (٣ر − ٥) $\notin$ ط

أ، ٣ر − ٥ + ر − ٣ = ٣٦ ومنها ر = ١١

$\therefore$ $^{١١}ق_{ر} = {}^{١١}ق_{١١} = ١$

٨

$\frac{|ن+١}{|٤\ |ن-٣} = \frac{٥}{٢} \frac{|ن}{|٣\ |ن-٣}$

$\therefore$ $\frac{(ن+١)\ |ن}{٤\ |٣} = \frac{٥}{٢} \frac{|ن}{|٣}$ $\therefore$ $\frac{ن+١}{٤} = \frac{٥}{٢}$

$\therefore$ ن + ١ = ١٠ $\therefore$ ن = ٩

٩

$\frac{ن(ن-١)(ن-٢)}{|٣} = \frac{٩١}{٣} ن$

$\therefore$ $(ن-١)(ن-٢) = \frac{٩١}{٣} \times |٣ = ١٨٢ = ١٤ \times ١٣$

$\therefore$ ن − ١ = ١٤ $\therefore$ ن = ١٥

١٠

$\because$ $\frac{^{ن}ق_{٤}}{^{ن-٢}ق_{٢}} = \frac{٧}{٢}$

$\therefore$ $\frac{ن(ن-١)(ن-٢)(ن-٣)}{٤ \times ٣ \times ٢ \times ١}$

$\times \frac{١ \times ٢ \times ٣}{(ن-٢)(ن-٣)(ن-٤)} = \frac{٧}{٢}$

$\therefore$ $\frac{ن(ن-١)}{٤(ن-٤)} = \frac{٧}{٢}$

$\therefore$ ن(ن − ١) = ١٤(ن − ٤)

$\therefore$ $ن^{٢} - ١٥ن + ٥٦ = ٠$

$\therefore$ (ن − ٧)(ن − ٨) = ٠

$\therefore$ ن = ٧ أ، ٨

١١

$\because$ $\frac{^{ن}ق_{٥}}{^{ن}ق_{٤}} = \frac{|ن}{|٥\ |ن-٥} \times \frac{|٤\ |ن-٤}{|ن}$

$= \frac{|٤ \times (ن-٤)\ |ن-٥}{٥\ |٤\ |ن-٥} = \frac{ن-٤}{٥}$

$\therefore$ $\frac{ن-٤}{٥} = \frac{٨}{٥}$ $\therefore$ ن − ٤ = ٨

$\therefore$ ن = ١٢

١٢

① $\frac{^{ن}ل_{٣}}{|٣} = ٨٤$

$\therefore$ $^{ن}ل_{٣} = ٥٠٤ = ٩ \times ٨ \times ٧ = {}^{٩}ل_{٣}$

$\therefore$ ن = ٩ $\therefore$ م.ح = {٩}

② ر = ٢ر + ٣ $\therefore$ ر = −٣ (مرفوض)

أ، ر + ٢ر + ٣ = ١٢

$\therefore$ ٣ر = ٩ $\therefore$ ر = ٣

$\therefore$ م.ح = {٣}

③ ٢ن − ٢١ = ٣ $\therefore$ ن = ١٢

أ، ٢ن − ٢١ + ٣ = ن

$\therefore$ ن = ١٨ $\therefore$ م.ح = {١٢، ١٨}

④ $\frac{(ن+١)(ن)(ن-١)}{|٣} = ٤ \times \frac{(ن-١)(ن-٢)}{|٢}$

$\therefore$ (ن + ١) ن = ١٢ (ن − ٢)

$\therefore$ $ن^{٢} - ١١ن + ٢٤ = ٠$

$\therefore$ (ن − ٨)(ن − ٣) = ٠

$\therefore$ ن = ٨ أ، ن = ٣ $\therefore$ م.ح = {٨، ٣}

١٣

① $٢^{٥} = ٣٢$

② $\because$ $(^{٥}ق_{٠} = {}^{٥}ق_{٥})$، $(^{٥}ق_{١} = {}^{٥}ق_{٤})$، $(^{٥}ق_{٢} = {}^{٥}ق_{٣})$

$\therefore$ $^{٥}ق_{٠} - {}^{٥}ق_{١} + {}^{٥}ق_{٢} - {}^{٥}ق_{٣} + {}^{٥}ق_{٤} - {}^{٥}ق_{٥} = ٠$

١٤

$\frac{^{٢ن+م}ل_{٢}}{|٢} = ١٩٠$

$\therefore$ $^{٢ن+م}ل_{٢} = ١٩٠\ |٢ = ٣٨٠ = ٢٠ \times ١٩ = {}^{٢٠}ل_{٢}$

$\therefore$ ٢ن + م = ٢٠ (١)

، $^{ن-٢م}ل_{٣} = ٦٠ = ٥ \times ٤ \times ٣ = {}^{٥}ل_{٣}$

$\therefore$ ن − ٢م = ٥ (٢)

من (١)، (٢) ينتج أن: ن = ٩، م = ٢

١٥

$\because$ $^{ن}ق_{ر-١} = ٥٦$

$\therefore$ $\frac{^{ن}ل_{ر-١}}{|ر-١} = ٥٦$ $\therefore$ $\frac{٦٧٢٠}{|ر-١} = ٥٦$

$\therefore$ $|ر-١ = ١٢٠ = |٥$ $\therefore$ ر − ١ = ٥

$\therefore$ ر = ٦

$\therefore$ $^{ن}ل_{٥} = ٦٧٢٠ = ٨ \times ٧ \times ٦ \times ٥ \times ٤ = {}^{٨}ل_{٥}$

$\therefore$ ن = ٨

١٦

الطرف الأيمن = $\frac{^{ن}ق_{ر}}{^{ن-١}ق_{ر-١}}$

$= \frac{|ن}{|ر\ |ن-ر} \times \frac{|ر-١\ |ن-ر}{|ن-١}$

$= \frac{ن\ |ن-١\ |ر-١}{ر\ |ر-١\ |ن-١} = \frac{ن}{ر}$ = الطرف الأيسر.

، $^{١٠٠}ق_{٥٠} \div {}^{٩٩}ق_{٤٩} = \frac{١٠٠}{٥٠} = ٢$

١٧

الطرف الأيمن = $\frac{^{ن}ق_{ر}}{^{ن}ق_{ر-١}}$

$= \frac{|ن}{|ر\ |ن-ر} \times \frac{|ر-١\ |ن-ر+١}{|ن}$

$= \frac{|ر-١\ (ن-ر+١)\ |ن-ر}{ر\ |ر-١\ |ن-ر} = \frac{ن-ر+١}{ر}$

= الطرف الأيسر.

، $^{١٠}ق_{٦} \div {}^{١٠}ق_{٥} = \frac{١٠-٦+١}{٦} = \frac{٥}{٦}$

١٨

الطرف الأيمن = $^{ن}ق_{ر} + {}^{ن}ق_{ر-١}$

$= \frac{|ن}{|ر\ |ن-ر} + \frac{|ن}{|ر-١\ |ن-ر+١}$

$= \frac{(ن-ر+١)\ |ن + ر\ |ن}{|ر\ |ن-ر+١}$

$= \frac{|ن\ (ن-ر+١+ر)}{|ر\ |ن-ر+١} = \frac{|ن+١}{|ر\ |ن-ر+١}$

$= {}^{ن+١}ق_{ر}$ = الطرف الأيسر.

، $^{١٠}ق_{٣} + {}^{١٠}ق_{٤} = {}^{١١}ق_{٤} = ٣٣٠$

١٩

$^{٢ن}ق_{ن} = \frac{\underline{|٢ن}}{\underline{|ن}\ \underline{|ن}}$

$= \frac{٢ن(٢ن-١)(٢ن-٢)(٢ن-٣) \times ... \times ٤ \times ٣ \times ٢ \times ١}{\underline{|ن} \times \underline{|ن}}$

$= \frac{[٢ن(٢ن-٢)(٢ن-٤) \times ... \times ٦ \times ٤ \times ٢] \times [(٢ن-١)(٢ن-٣) \times ... \times ٥ \times ٣ \times ١]}{\underline{|ن} \times \underline{|ن}}$

$= \frac{٢^{ن}[ن(ن-١)(ن-٢) \times ... \times ٣ \times ٢ \times ١] \times [(٢ن-١)(٢ن-٣) \times ... \times ٣ \times ١]}{\underline{|ن} \times \underline{|ن}}$

$= \frac{٢^{ن}\ \underline{|ن}\ [١ \times ٣ \times ٥ \times .... \times (٢ن-١)]}{\underline{|ن} \times \underline{|ن}}$

$= ٢^{ن} \times \frac{١ \times ٣ \times ٥ \times .... \times (٢ن-١)}{\underline{|ن}}$

٢٠

$\because\ ^{٢ن+١}ل_{ن-١} : {}^{٢ن}ق_{ن+١} = \frac{٣}{٢}\ \underline{|ن-١}$

$\therefore \frac{\underline{|٢ن+١}}{\underline{|ن+٢}} \times \frac{\underline{|ن+١}\ \underline{|ن-١}}{\underline{|٢ن}} = \frac{٣}{٢}\ \underline{|ن-١}$

$\therefore \frac{(٢ن+١)\underline{|٢ن}}{(ن+٢)\underline{|ن+١}} \times \frac{\underline{|ن+١}\ \underline{|ن-١}}{\underline{|٢ن}} = \frac{٣}{٢}\ \underline{|ن-١}$

$\therefore \frac{٢ن+١}{ن+٢} = \frac{٣}{٢}$

$\therefore ٣ن + ٦ = ٤ن + ٢ \qquad \therefore ن = ٤$

٢١

① $^{ن}ق_{ر} = ١٠ \qquad \therefore \frac{^{ن}ل_{٣}}{\underline{|٣}} = ١٠$

$\therefore\ ^{ن}ل_{٣} = ٦٠ = ٥ \times ٤ \times ٣ = {}^{٥}ل_{٣}$

$\therefore ن = ٥ \qquad \therefore$ عدد الطلاب $= ٥$

② $^{١٠}ق_{٣} \times {}^{٨}ق_{٣} = ٣٣٦٠٠$

③ $^{٦}ق_{٢} + {}^{٥}ق_{٢} = ٢٥$

④ $^{١٠}ق_{٥} \times {}^{٥}ق_{٢} = ١٢٦٠٠$ ، أ، $^{١٠}ق_{٤} \times {}^{٦}ق_{٥} = ١٢٦٠$

٢٢

عدد طرق انتخاب اللجنة الأولى $= {}^{١٢}ق_{٣} = ٢٢٠$

، عدد طرق انتخاب اللجنة الثانية $= {}^{٩}ق_{٣} = ٨٤$

$\therefore$ عدد طرق انتخاب اللجنتين $= ٢٢٠ \times ٨٤$

$= ١٨٤٨٠$ طريقة.

٢٣

$\because ن(س) = ٦ \qquad \therefore ن(ظ) = {}^{٦}ق_{٢} = ١٥$

٢٤

$\because س = \{٥ ، ٦ ، ٧ ، ٨ ، ٩\} \qquad \therefore ن(س) = ٥$

$\therefore ن(ص) = {}^{٥}ل_{٢} = ٢٠$

، $ن(ظ) = {}^{٥}ق_{٢} = ١٠$

٢٥

عدد الطرق $= {}^{٦}ق_{١} + {}^{٦}ق_{٢} + {}^{٦}ق_{٣} + {}^{٦}ق_{٤}$

$+ {}^{٦}ق_{٥} + {}^{٦}ق_{٦} = ٦٣$ طريقة.

٢٦

قرار الأغلبية باتفاق ٥ أشخاص أ، ٤ أشخاص

أ، ٣ أشخاص $= {}^{٥}ق_{٥} + {}^{٥}ق_{٤} + {}^{٥}ق_{٣} = ١٦$ طريقة.

٢٧

① $^{١٣}ق_{٥} = ١٢٨٧$ ② $^{٧}ق_{٥} = ٢١$

③ $^{٦}ق_{٥} = ٦$ ④ $^{٧}ق_{٥} + {}^{٦}ق_{٥} = ٢٧$

⑤ $^{٧}ق_{٣} \times {}^{٦}ق_{٢} = ٥٢٥$

ثالثًا مسائل تقيس مهارات التفكير

① (جـ) ② (جـ) ③ (د)

④ (جـ) ⑤ (د)

إرشادات الحل :

① بالتجريب نجد أن :

$ر = ٣$ تعطى أكبر قيمة للمقدار $^{٦}ق_{ر}$

② $\because س \geq ن ، ن \geq س$

$\therefore ن = س$

$\therefore\ ^{ن}ل_{س} + {}^{ن}ل_{ن} = ١٤٤٠$

$\therefore ٢\ ^{ن}ل_{ن} = ١٤٤٠$

$\therefore\ ^{ن}ل_{ن} = ٧٢٠$

$\therefore \underline{|ن} = ٧٢٠ = \underline{|٦}$

$\therefore ن = ٦$

$\therefore\ ^{ن+٤}ق_{س-٥} = {}^{١٠}ق_{١} = ١٠$

③ $٠ \geq ر + ٢ \geq ٤$

$\therefore -٢ \geq ر \geq ٢$

$\therefore ر \in \{٢ ، ١ ، ٠ ، -١ ، -٢\}$ (١)

، $٠ \geq ٢ - ر \geq ٤$

$\therefore -٢ \geq -ر \geq ٢$

$\therefore ٢ \leq ر \leq -٢$

$\therefore ر \in \{-٢ ، -١ ، ٠ ، ١ ، ٢\}$ (٢)

من (١) ، (٢) :

$\therefore ر \in \{-٢ ، -١ ، ٠ ، ١ ، ٢\}$

④ $\sum_{ر} {}^{ن}ق_{ر} = {}^{ن}ق_{٠} + {}^{ن}ق_{١} + {}^{ن}ق_{٢} + ... + {}^{ن}ق_{ن}$

$= ٢^{ن}$

⑤ عدد المضلعات $= {}^{٦}ق_{٣} + {}^{٦}ق_{٤} + {}^{٦}ق_{٥} + {}^{٦}ق_{٦}$

$= ٤٢$ مضلع



ثانيًا

إجابات تمارين التفاضل والتكامل والاحتمال

إجابات الوحدة الثالثة

إجابات تمارين 8

أولا أسئلة الاختيار من متعدد

(١) (جـ) (٢) (ب) (٣) (د)

(٤) **أولاً** : (د) **ثانيًا** : (أ) **ثالثًا** : (د) (٥) (ب)

(٦) (ب) (٧) (ب) (٨) (د) (٩) (ب) (١٠) (أ)

(١١) (ب) (١٢) (جـ) (١٣) (ب) (١٤) (د) (١٥) (جـ)

(١٦) (د) (١٧) (جـ) (١٨) (جـ)

(١٩) **أولاً** : (ب) **ثانيًا** : (ب) (٢٠) (جـ) (٢١) (ب)

(٢٢) (ب) (٢٣) (د) (٢٤) (أ) (٢٥) (جـ) (٢٦) (أ)

(٢٧) (ب) (٢٨) (أ) (٢٩) (جـ) (٣٠) (أ)

ثانيا الأسئلة المقالية

١

ت (هـ) = د (١ + هـ) − د (١)

= [٣ (١ + هـ) − ٢] − (٣ − ٢) = ٣ هـ

∴ ت (٠,٤) = ٣ × ٠,٤ = ١,٢

٢

(١) ت (هـ) = د (٣ + هـ) − د (٣)

= (٣ + هـ)^٢ − ٣ (٣ + هـ) + ٤ − ٤

= ٩ + ٦ هـ + هـ^٢ − ٩ − ٣ هـ

= هـ^٢ + ٣ هـ

∴ ت (٠,٥) = ١,٧٥

(٢) التغير = د (٢,٤) − د (٢)

= [(٢,٤)^٢ − ٣ (٢,٤) + ٤]

− [(٢)^٢ − ٣ (٢) + ٤]

= ٠,٥٦

٣

(١) ∵ د (٢) = ٧ ، د (٢,٢) = ٨,٢٤

∴ التغير في د (س) = ٨,٢٤ − ٧ = ١,٢٤

(٢) ∵ د (٢) = ٧ ، د (١,٨) = ٥,٨٤

∴ التغير في د (س) = ٥,٨٤ − ٧ = −١,١٦

(٣) ∵ د (١) = ٢ ، د (١ + هـ) = هـ^٢ + ٤ هـ + ٢

∴ التغير في د (س) = هـ^٢ + ٤ هـ + ٢ − ٢

= هـ^٢ + ٤ هـ

(٤) ∵ د (٢) = ٧ ، د (٢ + هـ) = د (٢ + ١/٢)

= ١٠,٢٥

∴ التغير في د (س) = ١٠,٢٥ − ٧ = ٣,٢٥

(٥) ∵ د (٣) = ١٤

، د (٣ + Δس) = د (٣ + ٠,٢) = ١٥,٦٤

∴ التغير في د (س) = ١٥,٦٤ − ١٤ = ١,٦٤

٤

(١) م (هـ) = [د (٢ + هـ) − د (٢)] / هـ

= [(٢ + هـ)^٢ + ٣ (٢ + هـ) − ١ − ٩] / هـ

= [٤ + ٤ هـ + هـ^٢ + ٦ + ٣ هـ − ١ − ٩] / هـ

= (هـ^٢ + ٧ هـ) / هـ = هـ + ٧

∴ م (٠,٢) = ٠,٢ + ٧ = ٧,٢

(٢) متوسط التغير في د

= [د (٢) − د (٤,٥)] / (٢ − ٤,٥)

= (٩ + ٩ − ١ − [٢٠,٢٥ + ١٣,٥ − ١]) / −١,٥ = ١٠,٥

٥

م (هـ) = [د (س١ + هـ) − د (س١)] / هـ

= [٢ (س١ + هـ)^٢ − ٣ (س١ + هـ) + ٤ − (٢ س١^٢ − ٣ س١ + ٤)] / هـ

= (٤ س١ هـ + ٢ هـ^٢ − ٣ هـ) / هـ

= ٤ س١ + ٢ هـ − ٣

(١) عند س١ = ٣

∴ م (هـ) = ١٢ + ٢ هـ − ٣ = ٢ هـ + ٩

∴ م (٠,٢) = ٩,٤

(٢) عند س١ = ٣,٥ ، هـ = ٤ − ٣,٥ = ٠,٥

∴ م (هـ) = ١٤ + ١ − ٣ = ١٢

(٣) معدل التغير (عند س = ٢)

= نها (هـ ← ٠) (٤ س١ + ٢ هـ − ٣) = ٤ × ٢ − ٣ = ٥

٦

م (هـ) = [د (س١ + هـ) − د (س١)] / هـ

= [٥ + ٤ (س١ + هـ) − ٢ (س١ + هـ)^٢ − (٥ + ٤ س١ − ٢ س١^٢)] / هـ

= (٤ هـ − ٢ هـ^٢ − ٤ س١ هـ) / هـ = ٤ − ٢ هـ − ٤ س١

، عند س = ٢ ، هـ = ٠,٢

∴ م (هـ) = ٤ − ٠,٤ − ٨ = −٤,٤

∴ معدل التغير عند (س = ٤)

= نها (هـ ← ٠) (٤ − ٢ هـ − ٤ س١) = −١٢

٧

م (هـ) = [د (س١ + هـ) − د (س١)] / هـ

= [١/(س١ + هـ) − ١/س١] / هـ = −١ / (س١ (س١ + هـ))

∴ معدل التغير (عند س = √٣)

= نها (هـ ← ٠) −١ / (س١ (س١ + هـ)) = −١ / س١^٢ = −١/٣

٨

م (هـ) = [د (س١ + هـ) − د (س١)] / هـ

= [(٣ (س١ + هـ)^٢ + ١) / (س١ + هـ) − (٣ س١^٢ + ١) / س١] / هـ

= (٣ س١^٢ + ٣ س١ هـ − ١) / (س١ (س١ + هـ))

عند س١ = ٥ ، هـ = ٠,٢

∴ م (٠,٢) = (٣ (٥)^٢ + ٣ × ٥ × ٠,٢ − ١) / (٥ × ٥,٢) = ٧٧/٢٦

، معدل التغير عند (س = ٥)

= نها (هـ ← ٠) (٣ س١^٢ + ٣ س١ هـ − ١) / (س١ (س١ + هـ)) = (٣ س١^٢ − ١) / س١^٢ = ٧٤/٢٥

٩

(١) م (هـ) = [د (س١ + هـ) − د (س١)] / هـ

= [(س١ + هـ + ٢) / (س١ + هـ − ٢) − (س١ + ٢) / (س١ − ٢)] / هـ

= −٤ / ((س١ − ٢) (س١ + هـ − ٢))

(٢) عند س = ٣ ، هـ = ١/٣

∴ م (١/٣) = −٤ / (١ ١/٣) = −٣

(٣) معدل التغير عند (س = ٤)

= نها (هـ ← ٠) −٤ / ((س١ − ٢) (س١ + هـ − ٢)) = −٤ / (س١ − ٢)^٢

= −٤/٤ = −١

١٠

$م(هـ) = \frac{د(س_1+هـ) - د(س_1)}{هـ}$

$= \frac{س_1 + هـ + \frac{1}{س_1+هـ} - س_1 - \frac{1}{س_1}}{هـ}$

$= 1 + \frac{1}{هـ(س_1+هـ)} - \frac{1}{هـ\,س_1}$

$= \frac{س_1\,هـ(س_1+هـ) + س_1 - س_1 - هـ}{س_1\,هـ(س_1+هـ)}$

$= \frac{س_1\,هـ(س_1+هـ) - هـ}{س_1\,هـ(س_1+هـ)}$

$= \frac{س_1(س_1+هـ) - 1}{س_1(س_1+هـ)}$

∴ معدل التغير عندما (س = ٢)

$= \lim_{هـ \to 0} \frac{س_1(س_1+هـ) - 1}{س_1(س_1+هـ)} = \frac{س_1^2 - 1}{س_1^2}$

$= \frac{4 - 1}{4} = \frac{3}{4}$

١١

$م(هـ) = \frac{د(س_1+هـ) - د(س_1)}{هـ}$

$= \frac{\sqrt{س_1+هـ} - \sqrt{س_1}}{هـ}$

∴ معدل التغير $= \lim_{هـ \to 0} \frac{(س_1+هـ)^{\frac{1}{2}} - (س_1)^{\frac{1}{2}}}{هـ}$

$= \frac{1}{2}(س_1)^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2\sqrt{س_1}}$

، عند س = ٤

∴ معدل التغير للدالة $= \frac{1}{2\sqrt{4}} = \frac{1}{4}$

١٢

معدل التغير عند (س = ٢)

$= \lim_{هـ \to 0} \frac{د(2+هـ) - د(2)}{هـ}$

$= \lim_{هـ \to 0} \frac{(2+هـ)^5 - 2^5}{هـ} = 5(2)^4 = 80$

١٣

متوسط التغير $= \frac{د(س_2) - د(س_1)}{س_2 - س_1}$

① متوسط التغير $= \frac{4,4 - 1}{8 - 4} = 0,85$

أى أن متوسط جملة المبيعات يتزايد بمقدار ٠,٨٥ مليون جنيه/شهر

② متوسط التغير $= \frac{2 - 4,4}{10 - 8} = -1,2$

أى أن متوسط جملة المبيعات يتناقص بمقدار ١,٢ مليون جنيه/شهر

③ متوسط التغير $= \frac{1 - 1}{12 - 4} =$ صفر

١٤

∵ متوسط التغير $= \frac{د(س_2) - د(س_1)}{س_2 - س_1}$

وهو يمثل ميل الخط المستقيم المار بالنقطتين

$(س_1 ، د(س_1))$ ، $(س_2 ، د(س_2))$

وحيث إن ميل الخط المستقيم ثابت لأى نقطتين عليه فإن متوسط التغير فى د يكون ثابتًا فى الفترات

$]-2 ، 0[$ ، $]2 ، 4[$ ، $]6 ، \infty[$

١٥

بفرض طول ضلع المربع س سم

فإن المساحة ص = د(س) = $س^2$

∴ متوسط التغير فى المساحة

$= \frac{د(س_1+هـ) - د(س_1)}{هـ} = \frac{(س_1+هـ)^2 - س_1^2}{هـ}$

$= \frac{س_1^2 + 2س_1\,هـ + هـ^2 - س_1^2}{هـ} = 2س_1 + هـ$

، عندما يتغير طول الضلع من ٣ سم إلى ٣,٤ سم

فإن س = ٣ ، هـ = ٠,٤

∴ متوسط التغير فى المساحة = ٢ × ٣ + ٠,٤ = ٦,٤

، معدل التغير فى المساحة (عند س = ٥)

$= \lim_{هـ \to 0} (2س_1 + هـ) = 2س_1 = 10$

١٦

بفرض طول ضلع المربع س سم

∴ مساحة المربع ص = د(س) = $س^2$

∴ متوسط التغير فى المساحة

$= \frac{د(س_1+هـ) - د(س_1)}{هـ} = \frac{(س_1+هـ)^2 - س_1^2}{هـ}$

$= \frac{س_1^2 + 2س_1\,هـ + هـ^2 - س_1^2}{هـ} = 2س_1 + هـ$

، معدل التغير فى المساحة عندما (س = ٨)

$= \lim_{هـ \to 0} (2س_1 + هـ) = 2س_1 = 16$

١٧

① نفرض أن عرض اللوح = س سم

∴ الطول = (س + ٣) سم

∴ المساحة = س(س + ٣) = $س^2 + 3س$

∴ التغير فى المساحة

$= د(س_1+هـ) - د(س_1)$

$= (س_1+هـ)^2 + 3(س_1+هـ)$

$- س_1^2 - 3س_1$

$= هـ^2 + 2س_1\,هـ + 3هـ$

$= هـ(هـ + 2س_1 + 3)$

وعندما يتغير العرض من ٤ سم إلى ٤,٢ سم

∴ س = ٤ ، هـ = ٠,٢

∴ التغير فى المساحة = ٠,٢ (٠,٢ + ٨ + ٣)

= ٢,٢٤

② ∵ المحيط = ٢(٢س + ٣) = ٤س + ٦

∴ التغير فى المحيط = $د(س_1+هـ) - د(س_1)$

$= 4(س_1+هـ) + 6 - 4س_1 - 6 = 4هـ$

وعندما يتغير العرض من ٣,٥ سم إلى ٣,٧ سم

∴ س = ٣,٥ ، هـ = ٠,٢

∴ التغير فى المحيط = ٠,٨

١٨

① نفرض أن الطول = س سم

∴ العرض = $\frac{1}{2}$ س سم ∴ المساحة = $\frac{1}{2}س^2$

∴ متوسط التغير فى المساحة

$= \frac{د(س_1+هـ) - د(س_1)}{هـ}$

$= \frac{\frac{1}{2}(س_1+هـ)^2 - \frac{1}{2}س_1^2}{هـ} = س_1 + \frac{1}{2}هـ$

، عندما يتغير الطول من ١٥ سم إلى ١٦,٥ سم

∴ س = ١٥ ، هـ = ١,٥

∴ متوسط التغير فى المساحة = ١٥ + $\frac{1}{2}$ × ١,٥

= ١٥,٧٥

② معدل التغير فى المساحة

$= \lim_{هـ \to 0} (س_1 + \frac{1}{2}هـ) = س_1$

∴ معدل التغير فى المساحة عند (س = ١٥ سم) = ١٥

، ∵ المحيط = ٢(س + $\frac{1}{2}$س) = ٣س

∴ معدل التغير فى المحيط

$= \lim_{هـ \to 0} \frac{د(س_1+هـ) - د(س_1)}{هـ}$

$= \lim_{هـ \to 0} \frac{3(س_1+هـ) - 3س_1}{هـ}$

$= \lim_{هـ \to 0} 3 = 3$

∴ معدل التغير فى المحيط عند (س = ١٥ سم) = ٣

١٩

نفرض أن طول نصف قطر الصفيحة = نق سم

∴ مساحة الصفيحة = π نق^2

∴ معدل التغير فى مساحة الصفيحة عندما نق = ١٤

$= \lim_{هـ \to 0} \frac{د(14+هـ) - د(14)}{هـ}$

$= \lim_{هـ \to 0} \frac{\pi((14+هـ)^2 - (14)^2)}{هـ}$

$= \underset{\text{هـ}\to ٠}{\text{نهـا}} \dfrac{\pi\,(٢٨\,\text{هـ} + \text{هـ}^{٢})}{\text{هـ}}$

$= \underset{\text{هـ}\to ٠}{\text{نهـا}}\ \pi\,(٢٨ + \text{هـ}) = ٢٨\,\pi$

$= ٢٨ \times \dfrac{٢٢}{٧} = ٨٨$

٢٠

(١) نفرض أن طول نصف قطر الموجة = نق سم

∴ المساحة = π نق^{٢}

∴ متوسط التغير في المساحة

$= \dfrac{\text{د}(\text{نق}_{١} + \text{هـ}) - \text{د}(\text{نق}_{١})}{\text{هـ}}$

$= \dfrac{\pi(\text{نق}_{١} + \text{هـ})^{٢} - \pi\,\text{نق}_{١}^{٢}}{\text{هـ}} = \pi\,(٢\,\text{نق}_{١} + \text{هـ})$

، عندما يتغير طول نصف القطر من ٦ سم إلى ٦,٣ سم

∴ نق = ٦ ، هـ = ٠,٣

∴ متوسط التغير في المساحة = ١٢,٣ π

(٢) معدل التغير في المساحة

$= \underset{\text{هـ}\to ٠}{\text{نهـا}}\ \pi\,(٢\,\text{نق}_{١} + \text{هـ}) = ٢\,\pi\,\text{نق}_{١}$

، عند نق = ٥ سم

∴ معدل التغير في المساحة = ١٠ π

٢١

(١) نفرض أن طول حرف المكعب = س سم

∴ مساحته الكلية = ٦ س^{٢}

∴ متوسط التغير في المساحة

$= \dfrac{\text{د}(\text{س}_{١} + \text{هـ}) - \text{د}(\text{س}_{١})}{\text{هـ}}$

$= \dfrac{٦\,(\text{س}_{١} + \text{هـ})^{٢} - ٦\,\text{س}_{١}^{٢}}{\text{هـ}} = ١٢\,\text{س}_{١} + ٦\,\text{هـ}$

وعندما يتغير طول حرف المكعب من ٢ سم إلى ٢,١ سم

∴ س = ٢ ، هـ = ٠,١

∴ متوسط التغير في المساحة = ٢٤,٦

(٢) معدل التغير في المساحة

$= \underset{\text{هـ}\to ٠}{\text{نهـا}}\ (١٢\,\text{س}_{١} + ٦\,\text{هـ}) = ١٢\,\text{س}_{١}$

∴ معدل التغير في المساحة عندما (س = ٣ سم)

$= ٣٦$

(٣) الحجم = س^{٣}

∴ معدل التغير في الحجم عندما يكون طول الحرف ٥ سم

$= \underset{\text{هـ}\to ٠}{\text{نهـا}} \dfrac{(٥ + \text{هـ})^{٣} - ٥^{٣}}{\text{هـ}} = ٣\,(٥)^{٢} = ٧٥$

٢٢

نفرض أن طول نصف قطر الكرة = نق سم

∴ الحجم = $\frac{٤}{٣}\,\pi$ نق^{٣}

∴ معدل التغير في الحجم

$= \underset{\text{هـ}\to ٠}{\text{نهـا}} \dfrac{\text{د}(\text{نق}_{١} + \text{هـ}) - \text{د}(\text{نق}_{١})}{\text{هـ}}$

$= \underset{\text{هـ}\to ٠}{\text{نهـا}} \dfrac{\frac{٤}{٣}\pi\,[(\text{نق}_{١} + \text{هـ})^{٣} - \text{نق}_{١}^{٣}]}{\text{هـ}}$

$= \dfrac{٤\pi}{٣} \times \underset{\text{هـ}\to ٠}{\text{نهـا}} \dfrac{(\text{نق}_{١} + \text{هـ})^{٣} - \text{نق}_{١}^{٣}}{\text{هـ}}$

$= \dfrac{٤\pi}{٣} \times ٣\,\text{نق}_{١}^{٢} = ٤\,\pi\,\text{نق}_{١}^{٢}$

∴ معدل التغير في الحجم عند (نق = ٧ سم)

$= ١٩٦\,\pi$

٢٣

متوسط التغير $= \dfrac{١٠٠ - \frac{٤٢}{٢+١} - ١٠٠ + \frac{٤٢}{١+١}}{٢ - ١} = ٧$

إجابات تمارين 9

أولاً أسئلة الاختيار من متعدد

(١) (جـ) (٢) (أ) (٣) (ب) (٤) (جـ) (٥) (ب)

(٦) (ب) (٧) (ب)

ثانياً الأسئلة المقالية

١

$\text{دَ}(٣) = \underset{\text{هـ}\to ٠}{\text{نهـا}} \dfrac{\text{د}(٣ + \text{هـ}) - \text{د}(٣)}{\text{هـ}}$

$= \underset{\text{هـ}\to ٠}{\text{نهـا}} \dfrac{(٣ + \text{هـ})^{٢} - ٥ - (٣)^{٢} + ٥}{\text{هـ}}$

$= \underset{\text{هـ}\to ٠}{\text{نهـا}} \dfrac{٩ + ٦\,\text{هـ} + \text{هـ}^{٢} - ٩}{\text{هـ}}$

$= \underset{\text{هـ}\to ٠}{\text{نهـا}}\ (٦ + \text{هـ}) = ٦$

والمعنى الهندسي هو أن ميل المماس لمنحنى الدالة (عند س = ٣) هو ٦

٢

(١) $\text{دَ}(\text{س}) = \underset{\text{هـ}\to ٠}{\text{نهـا}} \dfrac{\text{د}(\text{س} + \text{هـ}) - \text{د}(\text{س})}{\text{هـ}}$

$= \underset{\text{هـ}\to ٠}{\text{نهـا}} \dfrac{٨ - ٨}{\text{هـ}} = \text{صفر}$

(٢) $\text{دَ}(\text{س}) = \underset{\text{هـ}\to ٠}{\text{نهـا}} \dfrac{٥\,(\text{س} + \text{هـ}) + ٢ - ٥\,\text{س} - ٢}{\text{هـ}}$

$= \underset{\text{هـ}\to ٠}{\text{نهـا}} \dfrac{٥\,\text{س} + ٥\,\text{هـ} - ٥\,\text{س}}{\text{هـ}} = ٥$

(٣) $\text{دَ}(\text{س}) = \underset{\text{هـ}\to ٠}{\text{نهـا}} \dfrac{٣\,(\text{س} + \text{هـ})^{٢} - ٣\,\text{س}^{٢}}{\text{هـ}}$

$= \underset{\text{هـ}\to ٠}{\text{نهـا}} \dfrac{٣\,\text{س}^{٢} + ٦\,\text{س}\,\text{هـ} + ٣\,\text{هـ}^{٢} - ٣\,\text{س}^{٢}}{\text{هـ}}$

$= \underset{\text{هـ}\to ٠}{\text{نهـا}} \dfrac{٦\,\text{س}\,\text{هـ} + ٣\,\text{هـ}^{٢}}{\text{هـ}}$

$= \underset{\text{هـ}\to ٠}{\text{نهـا}}\ (٦\,\text{س} + ٣\,\text{هـ}) = ٦\,\text{س}$

(٤) $\text{دَ}(\text{س}) = \underset{\text{هـ}\to ٠}{\text{نهـا}} \dfrac{(\text{س} + \text{هـ})^{٢} + ٥ - \text{س}^{٢} - ٥}{\text{هـ}}$

$= \underset{\text{هـ}\to ٠}{\text{نهـا}} \dfrac{\text{س}^{٢} + ٢\,\text{س}\,\text{هـ} + \text{هـ}^{٢} - \text{س}^{٢}}{\text{هـ}}$

$= \underset{\text{هـ}\to ٠}{\text{نهـا}}\ (٢\,\text{س} + \text{هـ}) = ٢\,\text{س}$

(٥) دَ(س)

$= \underset{\text{هـ}\to ٠}{\text{نهـا}} \dfrac{(\text{س} + \text{هـ})^{٢} + ٢\,(\text{س} + \text{هـ}) - \text{س}^{٢} - ٢\,\text{س}}{\text{هـ}}$

$= \underset{\text{هـ}\to ٠}{\text{نهـا}} \dfrac{\text{س}^{٢} + ٢\,\text{س}\,\text{هـ} + \text{هـ}^{٢} + ٢\,\text{س} + ٢\,\text{هـ} - \text{س}^{٢} - ٢\,\text{س}}{\text{هـ}}$

$= \underset{\text{هـ}\to ٠}{\text{نهـا}} \dfrac{٢\,\text{س}\,\text{هـ} + \text{هـ}^{٢} + ٢\,\text{هـ}}{\text{هـ}}$

$= \underset{\text{هـ}\to ٠}{\text{نهـا}}\ (٢\,\text{س} + \text{هـ} + ٢) = ٢\,\text{س} + ٢$

(٦) دَ(س)

$= \underset{\text{هـ}\to ٠}{\text{نهـا}} \dfrac{٩\,(\text{س} + \text{هـ}) + (\text{س} + \text{هـ})^{٢} - ٩\,\text{س} - \text{س}^{٢}}{\text{هـ}}$

$= \underset{\text{هـ}\to ٠}{\text{نهـا}} \dfrac{٩\,\text{س} + ٩\,\text{هـ} + \text{س}^{٢} + ٢\,\text{س}\,\text{هـ} + \text{هـ}^{٢} - ٩\,\text{س} - \text{س}^{٢}}{\text{هـ}}$

$= \underset{\text{هـ}\to ٠}{\text{نهـا}}\ (٩ + ٢\,\text{س} + \text{هـ}) = ٩ + ٢\,\text{س}$

(٧) دَ(س)

$= \underset{\text{هـ}\to ٠}{\text{نهـا}} \dfrac{٢\,(\text{س} + \text{هـ})^{٢} + ٥\,(\text{س} + \text{هـ}) - ٢\,\text{س}^{٢} - ٥\,\text{س}}{\text{هـ}}$

$= \underset{\text{هـ}\to ٠}{\text{نهـا}} \dfrac{٢\,\text{س}^{٢} + ٤\,\text{س}\,\text{هـ} + ٢\,\text{هـ}^{٢} + ٥\,\text{س} + ٥\,\text{هـ} - ٢\,\text{س}^{٢} - ٥\,\text{س}}{\text{هـ}}$

$= \underset{\text{هـ}\to ٠}{\text{نهـا}} \dfrac{٤\,\text{س}\,\text{هـ} + ٢\,\text{هـ}^{٢} + ٥\,\text{هـ}}{\text{هـ}}$

$= \underset{\text{هـ}\to ٠}{\text{نهـا}}\ (٤\,\text{س} + ٢\,\text{هـ} + ٥) = ٤\,\text{س} + ٥$

(٨) دَ(س)

$= \underset{\text{هـ}\to ٠}{\text{نهـا}} \dfrac{-(\text{س} + \text{هـ})^{٢} + ٣\,(\text{س} + \text{هـ}) - ٨ + \text{س}^{٢} - ٣\,\text{س} + ٨}{\text{هـ}}$

$= \underset{\text{هـ}\to ٠}{\text{نهـا}} \dfrac{-\text{س}^{٢} - ٢\,\text{س}\,\text{هـ} - \text{هـ}^{٢} + ٣\,\text{س} + ٣\,\text{هـ} + \text{س}^{٢} - ٣\,\text{س}}{\text{هـ}}$

$= \underset{\text{هـ}\to ٠}{\text{نهـا}}\ (-٢\,\text{س} - \text{هـ} + ٣) = -٢\,\text{س} + ٣$

(٩) $\text{دَ}(\text{س}) = \underset{\text{هـ}\to ٠}{\text{نهـا}} \dfrac{(\text{س} + \text{هـ})^{٣} - ١ - \text{س}^{٣} + ١}{\text{هـ}}$

$= \underset{\text{هـ}\to ٠}{\text{نهـا}} \dfrac{(\text{س} + \text{هـ})^{٣} - \text{س}^{٣}}{\text{هـ}} = ٣\,\text{س}^{٢}$

(١٠) $\text{دَ}(\text{س}) = \underset{\text{هـ}\to ٠}{\text{نهـا}} \dfrac{٥ + (\text{س} + \text{هـ})^{٣} - ٥ - \text{س}^{٣}}{\text{هـ}}$

$= \underset{\text{هـ}\to ٠}{\text{نهـا}} \dfrac{(\text{س} + \text{هـ})^{٣} - \text{س}^{٣}}{\text{هـ}} = ٣\,\text{س}^{٢}$

(١١) $\text{دَ}(\text{س}) = \underset{\text{هـ}\to ٠}{\text{نهـا}} \dfrac{\text{أ}\,(\text{س} + \text{هـ}) + \text{ب} - \text{أ}\,\text{س} - \text{ب}}{\text{هـ}}$

$= \underset{\text{هـ}\to ٠}{\text{نهـا}} \dfrac{\text{أ}\,\text{س} + \text{أ}\,\text{هـ} + \text{ب} - \text{أ}\,\text{س} - \text{ب}}{\text{هـ}}$

$= \underset{\text{هـ}\to ٠}{\text{نهـا}} \dfrac{\text{أ}\,\text{هـ}}{\text{هـ}} = \text{أ}$

٣

(١) $\text{دَ}(\text{س}) = \underset{\text{هـ}\to ٠}{\text{نهـا}} \dfrac{١}{\text{هـ}} \left(\dfrac{١}{\text{س} + \text{هـ}} - \dfrac{١}{\text{س}}\right)$

$= \underset{\text{هـ}\to ٠}{\text{نهـا}} \dfrac{١}{\text{هـ}} \left(\dfrac{\text{س} - \text{س} - \text{هـ}}{\text{س}\,(\text{س} + \text{هـ})}\right)$

$= \underset{\text{هـ}\to ٠}{\text{نهـا}} \dfrac{-١}{\text{س}\,(\text{س} + \text{هـ})} = \dfrac{-١}{\text{س}^{٢}}$

، الدالة غير قابلة للاشتقاق عند س = ٠

② $د'(س) = \underset{هـ \to 0}{\text{نهـا}} \frac{1}{هـ}\left[\frac{7}{س+هـ} - 2 - \frac{7}{س} + 2\right]$

$= \underset{هـ \to 0}{\text{نهـا}} \frac{1}{هـ}\left[\frac{7}{س+هـ} - \frac{7}{س}\right]$

$= \underset{هـ \to 0}{\text{نهـا}} \frac{1}{هـ}\left[\frac{7س - 7س - 7هـ}{س(س+هـ)}\right]$

$= \underset{هـ \to 0}{\text{نهـا}} \frac{-7}{س(س+هـ)} = \frac{-7}{س^2}$

، الدالة غير قابلة للاشتقاق عند $س = 0$

③ $د'(س) = \underset{هـ \to 0}{\text{نهـا}} \frac{1}{هـ}\left(\frac{1}{س+3+هـ} - \frac{1}{س+3}\right)$

$= \underset{هـ \to 0}{\text{نهـا}} \frac{1}{هـ}\left(\frac{س+3-س-3-هـ}{(س+3+هـ)(س+3)}\right)$

$= \underset{هـ \to 0}{\text{نهـا}} \frac{-1}{(س+3+هـ)(س+3)}$

$= \frac{-1}{(س+3)^2}$

، الدالة غير قابلة للاشتقاق عند $س = -3$

④ $د'(س)$

$= \underset{هـ \to 0}{\text{نهـا}} \frac{1}{هـ}\left(\frac{3}{2(س+هـ)-5} - \frac{3}{2س-5}\right)$

$= \underset{هـ \to 0}{\text{نهـا}} \frac{1}{هـ}\left(\frac{3(2س-5-2س-2هـ+5)}{(2س-5)(2س+2هـ-5)}\right)$

$= \underset{هـ \to 0}{\text{نهـا}} \frac{-6}{(2س-5)(2س+2هـ-5)}$

$= \frac{-6}{(2س-5)^2}$

، الدالة غير قابلة للاشتقاق عند $س = \frac{5}{2}$

⑤ $د'(س)$

$= \underset{هـ \to 0}{\text{نهـا}} \frac{1}{هـ}\left[\frac{س+هـ}{س+هـ+5} - \frac{س}{س+5}\right]$

$= \underset{هـ \to 0}{\text{نهـا}} \frac{1}{هـ}$ $\left[\frac{س^2+5س+هـس+5هـ-س^2-هـس-5س}{(س+5)(س+هـ+5)}\right]$

$= \underset{هـ \to 0}{\text{نهـا}} \frac{1}{هـ}\left[\frac{5هـ}{(س+5)(س+هـ+5)}\right]$

$= \underset{هـ \to 0}{\text{نهـا}} \frac{5}{(س+5)(س+هـ+5)}$

$= \frac{5}{(س+5)^2}$

، الدالة غير قابلة للاشتقاق عند $س = -5$

⑥ $د'(س)$

$= \underset{هـ \to 0}{\text{نهـا}} \frac{1}{هـ}\left[س+هـ+\frac{1}{س+هـ} - س - \frac{1}{س}\right]$

$= \underset{هـ \to 0}{\text{نهـا}} \frac{1}{هـ}\left[\frac{س\,هـ(س+هـ)+س-س-هـ}{س(س+هـ)}\right]$

$= \underset{هـ \to 0}{\text{نهـا}} \frac{1}{هـ}\left[\frac{هـ(س(س+هـ)-1)}{س(س+هـ)}\right]$

$= \underset{هـ \to 0}{\text{نهـا}} \frac{س(س+هـ)-1}{س(س+هـ)} = \frac{س^2-1}{س^2}$

، الدالة غير قابلة للاشتقاق عند $س = 0$

4

① $د'(س) = \underset{هـ \to 0}{\text{نهـا}} \frac{\sqrt{س+هـ-4} - \sqrt{س-4}}{هـ}$

$= \underset{هـ \to 0}{\text{نهـا}} \frac{(س+هـ-4)^{\frac{1}{2}} - (س-4)^{\frac{1}{2}}}{هـ}$

$= \frac{1}{2}(س-4)^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2\sqrt{س-4}}$

② $د'(س) = \underset{هـ \to 0}{\text{نهـا}} \frac{\sqrt{س+هـ+5} - \sqrt{س+5}}{هـ}$

$= \underset{هـ \to 0}{\text{نهـا}} \frac{(س+هـ+5)^{\frac{1}{2}} - (س+5)^{\frac{1}{2}}}{هـ}$

$= \frac{1}{2}(س+5)^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2\sqrt{س+5}}$

③ $د'(س) = \underset{هـ \to 0}{\text{نهـا}} \frac{5 - 4\sqrt{س+هـ} - 5 + 4\sqrt{س}}{هـ}$

$= \underset{هـ \to 0}{\text{نهـا}} \frac{-4(\sqrt{س+هـ} - \sqrt{س})}{هـ}$

$= -4\,\underset{هـ \to 0}{\text{نهـا}} \frac{(س+هـ)^{\frac{1}{2}} - (س)^{\frac{1}{2}}}{هـ}$

$= -4 \times \frac{1}{2} \times س^{-\frac{1}{2}} = \frac{-2}{\sqrt{س}}$

④ $د'(س) = \underset{هـ \to 0}{\text{نهـا}} \frac{6\sqrt{س+هـ+3} - 6\sqrt{س+3}}{هـ}$

$= \underset{هـ \to 0}{\text{نهـا}} \frac{6\left(\sqrt{س+هـ+3} - \sqrt{س+3}\right)}{هـ}$

$= 6\,\underset{هـ \to 0}{\text{نهـا}} \frac{(س+هـ+3)^{\frac{1}{2}} - (س+3)^{\frac{1}{2}}}{هـ}$

$= 6 \times \frac{1}{2} \times (س+3)^{-\frac{1}{2}} = \frac{3}{\sqrt{س+3}}$

⑤ $د'(س)$

$= \underset{هـ \to 0}{\text{نهـا}} \frac{\sqrt{3(س+هـ)+1} - \sqrt{3س+1}}{هـ}$

$= 3\,\underset{هـ \to 0}{\text{نهـا}} \frac{\sqrt{3س+3هـ+1} - \sqrt{3س+1}}{3هـ}$

$= 3\,\underset{هـ \to 0}{\text{نهـا}} \frac{(3س+1+3هـ)^{\frac{1}{2}} - (3س+1)^{\frac{1}{2}}}{(3س+1+3هـ) - (3س+1)}$

$= 3 \times \frac{1}{2}(3س+1)^{-\frac{1}{2}} = \frac{3}{2\sqrt{3س+1}}$

5

① $د'(س)$

$= \underset{هـ \to 0}{\text{نهـا}} \frac{(س+هـ)^2 - (س+هـ) + 1 - س^2 + س - 1}{هـ}$

$= \underset{هـ \to 0}{\text{نهـا}} \frac{س^2 + 2س\,هـ + هـ^2 - س - هـ - س^2 + س}{هـ}$

$= \underset{هـ \to 0}{\text{نهـا}} (2س + هـ - 1) = 2س - 1$

، ميل المماس عند النقطة (−٢ ، ٧)

$= د'(-2) = 2(-2) - 1 = -5$

② $د'(س)$

$= \underset{هـ \to 0}{\text{نهـا}} \frac{3(س+هـ)^2 + 4(س+هـ) + 7 - 3س^2 - 4س - 7}{هـ}$

$= \underset{هـ \to 0}{\text{نهـا}} \frac{3س^2 + 6س\,هـ + 3هـ^2 + 4س + 4هـ - 3س^2 - 4س}{هـ}$

$= \underset{هـ \to 0}{\text{نهـا}} (6س + 3هـ + 4) = 6س + 4$

، ميل المماس عند النقطة (−١ ، ٦)

$= د'(-1) = 6(-1) + 4 = -2$

6

① $د'(2) = \underset{هـ \to 0}{\text{نهـا}} \frac{3(2+هـ)^2 - 5 - 7}{هـ}$

$= \underset{هـ \to 0}{\text{نهـا}} \frac{12 + 12هـ + 3هـ^2 - 12}{هـ}$

$= \underset{هـ \to 0}{\text{نهـا}} (12 + 3هـ) = 12$

∴ ميل المماس = ١٢ ، قياس الزاوية = $85° \; 14'$

② $د'(1) = \underset{هـ \to 0}{\text{نهـا}} \frac{2(1+هـ)^2 + 3(1+هـ) - 4 - 1}{هـ}$

$= \underset{هـ \to 0}{\text{نهـا}} \frac{2 + 4هـ + 2هـ^2 + 3 + 3هـ - 5}{هـ}$

$= \underset{هـ \to 0}{\text{نهـا}} (7 + 2هـ) = 7$

∴ ميل المماس = ٧ ، قياس الزاوية ≃ $81° \; 52'$

③ $د'(-1)$

$= \underset{هـ \to 0}{\text{نهـا}} \frac{1 - 5(-1+هـ) - 3(-1+هـ)^2 - 3}{هـ}$

$= \underset{هـ \to 0}{\text{نهـا}} \frac{1 + 5 - 5هـ - 3 + 6هـ - 3هـ^2 - 3}{هـ}$

$= \underset{هـ \to 0}{\text{نهـا}} (1 - 3هـ) = 1$

∴ ميل المماس = ١

، قياس الزاوية = $45°$

④ $د'(1) = \underset{هـ \to 0}{\text{نهـا}} \frac{(1+هـ)^3 - 4 + 3}{هـ}$

$= \underset{هـ \to 0}{\text{نهـا}} \frac{(1+هـ)^3 - (1)^3}{هـ} = 3$

∴ ميل المماس = ٣ ، قياس الزاوية = $71° \; 34'$

7

∵ د كثيرة حدود ∴ مجالها ح ∴ ١ ∈ مجال د

، $د'(1) = \underset{هـ \to 0}{\text{نهـا}} \frac{(1+هـ)^2 - (1+هـ) + 1 - 1}{هـ}$

$= \underset{هـ \to 0}{\text{نهـا}} \frac{1 + 2هـ + هـ^2 - 1 - هـ}{هـ}$

$= \underset{هـ \to 0}{\text{نهـا}} (1 + هـ) = 1 \in ح$

∴ د قابلة للاشتقاق عند س = ١

8

① $د'(س) = \underset{هـ \to 0}{\text{نهـا}} \frac{أ(س+هـ)^2 + ب - أس^2 - ب}{هـ}$

$= \underset{هـ \to 0}{\text{نهـا}} \frac{أس^2 + 2أس\,هـ + أهـ^2 - أس^2}{هـ}$

$= \underset{هـ \to 0}{\text{نهـا}} (2أس + أهـ) = 2أس$

(٢) ∵ ميل المماس عند (٢ ، −٣) = ١٢

∴ $٤ أ = ١٢$ ∴ $أ = ٣$

∴ $د(س) = ٣ س^{٢} + ب$

، ∵ (٢ ، −٣) تقع على المنحنى

، ∴ $-٣ = ٣ (٢)^{٢} + ب$ ∴ $ب = -١٥$

إجابات تمارين 10

أولا أسئلة الاختيار من متعدد

(١) (جـ) (٢) (د) (٣) (ب) (٤) (جـ) (٥) (د)

(٦) (د) (٧) (ب) (٨) (جـ) (٩) (أ) (١٠) (د)

(١١) (جـ) (١٢) (أ) (١٣) (د) (١٤) (د) (١٥) (ب)

(١٦) (د) (١٧) (ب) (١٨) (جـ) (١٩) (جـ) (٢٠) (جـ)

(٢١) (د) (٢٢) (ب) (٢٣) (جـ) (٢٤) (ب) (٢٥) (جـ)

(٢٦) (أ) (٢٧) (أ) (٢٨) (أ) (٢٩) (ب) (٣٠) (ب)

(٣١) (د) (٣٢) (ب) (٣٣) (أ) (٣٤) (أ) (٣٥) (ب)

(٣٦) (د) (٣٧) (جـ) (٣٨) (جـ) (٣٩) (أ) (٤٠) (جـ)

(٤١) (جـ) (٤٢) (جـ)

ثانيا الأسئلة المقالية

١

(١) $\frac{ءص}{ءس} = صفر$ (٢) $\frac{ءص}{ءس} = ٥$

(٣) $\frac{ءص}{ءس} = ٤ س^{٣}$ (٤) $\frac{ءص}{ءس} = ١٨ س^{٥}$

(٥) $\frac{ءص}{ءس} = ٤ \pi س^{٢}$ (٦) $\frac{ءص}{ءس} = -٦ س^{-٩}$

(٧) $\frac{ءص}{ءس} = \frac{٣}{٢} س^{\frac{١}{٢}}$ (٨) $\frac{ءص}{ءس} = \frac{-٥}{٣} س^{\frac{-٨}{٣}}$

(٩) ∵ $ص = -٤ س^{-٥}$ ∴ $صَ = ٢٠ س^{-٦}$

٢

(١) ∵ $ص = ٤ س^{\frac{١}{٢}}$ ∴ $صَ = ٢ س^{-\frac{١}{٢}}$

(٢) ∵ $ص = -٤ س^{\frac{١}{٣}}$ ∴ $صَ = \frac{-٤}{٣} س^{-\frac{٢}{٣}}$

(٣) ∵ $ص = س^{\frac{٥}{٣}}$ ∴ $صَ = \frac{٥}{٣} س^{\frac{٢}{٣}}$

(٤) ∵ $ص = س^{\frac{٩}{٢}}$ ∴ $صَ = \frac{٩}{٢} س^{\frac{٧}{٢}}$

(٥) ∵ $ص = \frac{س^{٢}}{س^{\frac{١}{٢}}} = س^{\frac{٣}{٢}}$ ∴ $صَ = \frac{٣}{٢} س^{\frac{١}{٢}}$

(٦) ∵ $ص = ٢ س^{-\frac{١}{٢}}$ ∴ $صَ = -س^{-\frac{٣}{٢}}$

٣

(١) $دَ(س) = ٤$ (٢) $دَ(س) = ٦ س - ٤$

(٣) $صَ = ٣ س^{٢} + ٦ س$

(٤) $\frac{ءص}{ءس} = ٢٤ س^{٧} - ١٠ س^{٤} + ٦$

(٥) $\frac{ءص}{ءس} = -٢ س^{٢} + س^{٤}$

(٦) $\frac{ءص}{ءس} = ١٢ س^{٥} - ٩ س^{-١٠}$

(٧) $صَ = -١٢ س^{-٥} + ٤ س^{-\frac{١}{٣}}$

(٨) $ص = س^{٧} + س^{-٧}$

∴ $\frac{ءص}{ءس} = ٧ س^{٦} - ٧ س^{-٨}$

(٩) $ص = ٧ س^{٤} - \frac{١}{٤} س^{-١}$

∴ $صَ = ٢٨ س^{٣} + \frac{١}{٤} س^{-٢}$

(١٠) $ص = س^{٤} - ٣ س^{٢} + ٥ - ٢ س^{-٢} - ٣ س^{-٤}$

∴ $\frac{ءص}{ءس} = ٤ س^{٣} - ٦ س + ٤ س^{-٣} + ١٢ س^{-٥}$

(١١) $دَ(س) = ٧ س^{١٢} - ٥ س^{١٩} + ٦ س^{٢٥}$

(١٢) ∵ $ص = ٣ س^{٣} - ٢ س^{٢} + ١٢ س$

∴ $صَ = ٩ س^{٢} - ٤ س + ١٢$

(١٣) ∵ $ص = \frac{١}{٢} س^{٢} - \frac{١}{٥} + س^{-١} - ٢ س^{-٣}$

∴ $صَ = س - س^{-٢} + ٦ س^{-٤}$

(١٤) ∵ $ص = ٢ س^{٢} - ٨ + ٢ س^{-١} - ٦ س^{-٢}$

∴ $صَ = ٤ س - ٢ س^{-٢} + ١٢ س^{-٣}$

(١٥) ∵ $ص = (١ + ٤ س^{٢})(١ - ٤ س^{٢})$

$= ١ - ١٦ س^{٤}$ ∴ $صَ = -٦٤ س^{٣}$

(١٦) ∵ $ص = \frac{(س^{٢} - ٤)(س^{٢} + ٤)}{س^{٢}} = \frac{س^{٤} - ١٦}{س^{٢}}$

$= س^{٢} - ١٦ س^{-٢}$

∴ $صَ = ٢ س + ٣٢ س^{-٣}$

(١٧) ∵ $ص = (س^{٢} - ١)(س^{٢} + ١)(س^{٤} + ١)(س^{٨} + ١)(س^{١٦} + ١)$

$= (س^{٤} - ١)(س^{٤} + ١)(س^{٨} + ١)(س^{١٦} + ١)$

$= (س^{٨} - ١)(س^{٨} + ١)(س^{١٦} + ١)$

$= (س^{١٦} - ١)(س^{١٦} + ١) = س^{٣٢} - ١$

∴ $صَ = ٣٢ س^{٣١}$

٤

(١) $ص = ٢ س^{٦} + ٣ س^{\frac{١}{٢}}$

∴ $صَ = ١٢ س^{٥} + \frac{٣}{٢} س^{-\frac{١}{٢}}$

(٢) ∵ $ص = س - ١$ ∴ $صَ = ١$

(٣) ∵ $ص = س + ٤ س^{\frac{١}{٢}}$ ∴ $صَ = ١ + ٢ س^{-\frac{١}{٢}}$

(٤) $ص = س^{\frac{١}{٢}} + س^{-\frac{١}{٢}}$

∴ $صَ = \frac{١}{٢} س^{-\frac{١}{٢}} - \frac{١}{٢} س^{-\frac{٣}{٢}}$

(٥) $ص = ٣ س^{٣} - س^{\frac{٣}{٢}}$

∴ $صَ = ٩ س^{٢} - \frac{٣}{٢} س^{\frac{١}{٢}}$

(٦) $ص = ١ - ٢ س^{\frac{١}{٢}}$

∴ $صَ = -س^{-\frac{١}{٢}}$

(٧) $ص = ٤ س - ٣ + ٢ س^{-\frac{١}{٢}}$

∴ $صَ = ٤ - س^{\frac{-٣}{٢}}$

(٨) $ص = ٥ س^{-١} + س^{\frac{٣}{٢}} + ٢\sqrt{٣} س - ٤$

∴ $صَ = -٥ س^{-٢} + \frac{٣}{٢} س^{\frac{١}{٢}} + ٢\sqrt{٣}$

(٩) $ص = س^{٢} - س - ٣ س^{\frac{١}{٢}}$

∴ $صَ = ٢ س - ١ - \frac{٣}{٢} س^{-\frac{١}{٢}}$

٥

(١) $صَ = ٤ (س - ٥) + (٤ س - ٧) = ٨ س - ٢٧$

(٢) $صَ = (س^{٢} + ١)(٢) + (٢ س + ٥)(٢ س)$

$= ٦ س^{٢} + ١٠ س + ٢$

(٣) $صَ = (س^{٢} + ٢)(٣ س^{٢} - ٣)$

$+ ٢ س (س^{٣} - ٣ س + ١)$

$= ٥ س^{٤} + ٢ س - ٩$

(٤) $دَ(س) = (س + ٤)(٢ س + ٥)$

$+ (س^{٢} + ٥ س + ٧)$

$= ٣ س^{٢} + ١٨ س + ٢٧$

(٥) $صَ = (٤ س^{٢} - ١)(٢١ س^{٢} + ١)$

$+ ٨ س (٧ س^{٣} + س)$

$= ١٤٠ س^{٤} - ٩ س^{٢} - ١$

، عند $س = ١$

∴ $[صَ]_{س = ١} = ١٤٠ - ٩ - ١ = ١٣٠$

(٦) $صَ = ٣ س^{٢} (س^{٢} + ١) + ٢ س (س^{٣} + ٣)$

$= ٥ س^{٤} + ٣ س^{٢} + ٦ س$

، عند $س = -١$

∴ $[صَ]_{س = -١}$

$= ٥ (-١)^{٤} + ٣ (-١)^{٢} + ٦ (-١) = ٢$

(٧) $دَ(س) = (٤ س^{٢} - ٣ س + ٧)(٢ س + ٢)$

$+ (س^{٢} + ٢ س + ٣)(٨ س - ٣)$

∴ $دَ(٠) = ٥$

(٨) ∵ $د(س) = (٣ س^{٢} - ٤ س)(س^{٢} - ٢)$

∴ $دَ(س) = (٢ س)(٣ س^{٢} - ٤ س)$

$+ (س^{٢} - ٢)(٦ س - ٤)$

∴ $دَ(٠) = ٨$

⑨ $\because ص = (س^{٣} + ٥)(س^{٣} - ٩)$

$\therefore ص' = ٣س^{٢}(س^{٣} + ٥) + ٣س^{٢}(س^{٣} - ٩)$

$= ٦س^{٥} - ١٢س^{٢}$

$\therefore د'(١) = -٦$

٦

① $ص' = \frac{-٥ \times ٢}{(٢س + ٣)^{٢}} = \frac{-١٠}{(٢س + ٣)^{٢}}$

② $د'(س) = \frac{٢س + ١ - ٢س}{(٢س + ١)^{٢}} = \frac{١}{(٢س + ١)^{٢}}$

③ $ص' = \frac{(١ - ٤س)(٢) - (٢س + ٥)(-٤)}{(١ - ٤س)^{٢}}$

$= \frac{٢٢}{(١ - ٤س)^{٢}}$

④ $ص' = \frac{٥(٣س - ١١) - ٣(٥س - ٧)}{(٣س - ١١)^{٢}}$

$= \frac{-٣٤}{(٣س - ١١)^{٢}}$

⑤ $ص' = \frac{٢س(٣س + ١) - ٣(س^{٢} - ٢)}{(٣س + ١)^{٢}}$

$= \frac{٣س^{٢} + ٢س + ٦}{(٣س + ١)^{٢}}$

⑥ $ص' = \frac{(س^{٢} + ١)(٢س) - (س^{٢} - ٥)(٢س)}{(س^{٢} + ١)^{٢}}$

$= \frac{١٢س}{(س^{٢} + ١)^{٢}}$

⑦ $د'(س) = \frac{٢س(س^{٣} + ١) - ٣س^{٢}(س^{٢} - ١)}{(س^{٣} + ١)^{٢}}$

$= \frac{-س^{٤} + ٣س^{٢} + ٢س}{(س^{٣} + ١)^{٢}}$

⑧ $ص' = \frac{(س - ٢)(٢س - ٦) - (س^{٢} - ٦س + ٧)}{(س - ٢)^{٢}}$

$= \frac{س^{٢} - ٤س + ٥}{(س - ٢)^{٢}}$

⑨ $د'(س) = صفر - \left(\frac{-١}{(س - ١)^{٢}}\right) = \frac{١}{(س - ١)^{٢}}$

$\therefore د'(٣) = \frac{١}{(٣ - ١)^{٢}} = \frac{١}{٤}$

⑩ $د'(س) = \frac{س + ٢ - س}{(س + ٢)^{٢}} - \frac{(س - ٢) - (س - ١)}{(س - ٢)^{٢}}$

$= \frac{٢}{(س + ٢)^{٢}} + \frac{١}{(س - ٢)^{٢}}$

$\therefore د'(٠) = \frac{٣}{٤}$

٧

$\because ص = ١ - \frac{١}{س^{٣}} = ١ - س^{-٣}$

$\therefore \frac{دص}{دس} = ٣س^{-٤} = \frac{٣}{س^{٤}} \quad \therefore س^{٤}\left(\frac{دص}{دس}\right) = ٣$

٨

$\frac{دص}{دس} = \frac{-٣}{(س - ١)^{٢}}$ ، $\because س - ١ = \frac{٣}{ص}$

$\therefore \frac{دص}{دس} = \frac{-٣}{\left(\frac{٣}{ص}\right)^{٢}} = \frac{-١}{٣} ص^{٢}$

٩

$د(س) = أس^{٣} + ب س$

، $\because د(١) = ٢ \quad \therefore أ + ب = ٢$ (١)

، $د'(س) = ٣أس^{٢} + ب$

، $\because د'(١) = صفر \quad \therefore ٣أ + ب = صفر$ (٢)

بطرح (١) من (٢) : $\therefore ٢أ = -٢$

$\therefore أ = -١$ ، $ب = ٣$

١٠

$د'(س) = ٣س^{٢} - ٥ \quad \therefore ٣س^{٢} - ٥ = ٧$

$\therefore س^{٢} = ٤ \quad \therefore س = \pm ٢$

١١

$د'(س) = س^{٢} - ٤س + ٥$

$\therefore س^{٢} - ٤س + ٥ = ٢ \quad \therefore س^{٢} - ٤س + ٣ = ٠$

$\therefore (س - ١)(س - ٣) = صفر \quad \therefore س = ١$ أ، ٣

١٢

$\therefore د'(س) = \frac{(س - أ) - (س + أ)}{(س - أ)^{٢}} = \frac{-٢أ}{(س - أ)^{٢}}$

، $\because د'(٢) = -٢ \quad \therefore \frac{-٢أ}{(٢ - أ)^{٢}} = -٢$

$\therefore (٢ - أ)^{٢} - أ = ٠ \quad \therefore أ^{٢} - ٥أ + ٤ = ٠$

$\therefore (أ - ٤)(أ - ١) = ٠ \quad \therefore أ = ٤$ أ، $أ = ١$

١٣

$\frac{دص}{دس} = ٣أس^{٢} + ٢ب س$

، $\because \left[\frac{دص}{دس}\right]_{س=١} = ٨ \quad \therefore ٣أ + ٢ب = ٨$ (١)

، $\because م(٣) = \frac{د(٢) - د(-١)}{٣}$

$= \frac{(٨أ + ٤ب) - (-أ + ب)}{٣}$

$\therefore ٧ = \frac{٩أ + ٣ب}{٣} \quad \therefore ٣أ + ب = ٧$ (٢)

من (١) ، (٢) : $\therefore أ = ٢$ ، $ب = ١$

إجابات تمارين 11

أولا أسئلة الاختيار من متعدد

① (جـ) ② (أ) ③ (ب) ④ (ب) ⑤ (د)
⑥ (أ) ⑦ (ب) ⑧ (ب) ⑨ (أ) ⑩ (ب)
⑪ (جـ) ⑫ (جـ) ⑬ (أ) ⑭ (ب) ⑮ (ب)
⑯ (د) ⑰ (أ) ⑱ (أ) ⑲ (ب)

ثانيا الأسئلة المقالية

١

① $\frac{دص}{دع} = ٢ع$ ، $\frac{دع}{دس} = ٦س$

$\therefore \frac{دص}{دس} = \frac{دص}{دع} \times \frac{دع}{دس} = ٢ع \times ٦س$

$= ١٢س(٣س^{٢} - ٢)$

$= ٣٦س^{٣} - ٢٤س$

$\therefore \left[\frac{دص}{دس}\right]_{س=٢} = ٣٦(٢)^{٣} - ٢٤(٢) = ٢٤٠$

② $\frac{دص}{دع} = ٧ع^{٦}$ ، $\frac{دع}{دس} = ٣س^{٢} + ٤س$

$\therefore \frac{دص}{دس} = \frac{دص}{دع} \times \frac{دع}{دس}$

$= ٧ع^{٦} \times (٣س^{٢} + ٤س)$

$= ٧(٣س^{٢} + ٤س)(س^{٣} + ٢س^{٢} - ٤)^{٦}$

$\therefore \left(\frac{دص}{دس}\right)_{س=١} = ٤٩$

③ $\frac{دص}{دع} = ٥ع^{٤}$ ، $\frac{دع}{دس} = ٣(س - ١)^{٢}$

$\therefore \frac{دص}{دس} = \frac{دص}{دع} \times \frac{دع}{دس} = ٥ع^{٤} \times ٣(س - ١)^{٢}$

$= ٥(س - ١)^{١٢} \times ٣(س - ١)^{٢}$

$= ١٥(س - ١)^{١٤}$

$\therefore \left[\frac{دص}{دس}\right]_{س=٢} = ١٥(٢ - ١)^{١٤} = ١٥$

④ $\frac{دص}{دس} = ٣ع^{٢} + ١$ ، $\frac{دع}{دس} = ٢س - ١$

$\therefore \frac{دص}{دس} = \frac{دص}{دع} \times \frac{دع}{دس}$

$= (٣ع^{٢} + ١)(٢س - ١)$

$= (٢س - ١)[٣(س^{٢} - س)^{٢} + ١]$

$\therefore \left(\frac{دص}{دس}\right)_{س=٠} = -١$

⑤ $\frac{دص}{دع} = \frac{١}{٢\sqrt{ع}}$ ، $\frac{دع}{دس} = \frac{(س + ١) - (س - ٢)}{(س + ١)^{٢}}$

$= \frac{٣}{(س + ١)^{٢}}$

$\therefore \frac{دص}{دس} = \frac{دص}{دع} \times \frac{دع}{دس} = \frac{١}{٢\sqrt{ع}} \times \frac{٣}{(س + ١)^{٢}}$

$= \frac{١}{٢\sqrt{\frac{س - ٢}{س + ١}}} \times \frac{٣}{(س + ١)^{٢}}$

$\therefore \left(\frac{دص}{دس}\right)_{س=٣} = \frac{٣}{١٦}$

٢

① $\because ص = ع^{٤} = (٣س^{٢} - س + ٢)^{٤}$

$\therefore \frac{دص}{دس} = ٤(٣س^{٢} - س + ٢)^{٣}(٦س - ١)$

3

(2) $\because \text{ص} = \text{ع}^5 = (\text{س}^3 + 1)^5$

$\therefore \frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = 5(\text{س}^3 + 1)^4 (3\text{س}^2)$

$= 15\text{س}^2(\text{س}^3 + 1)^4$

(3) $\text{ع} = 5\text{س}^{-1} \quad \therefore \text{ص} = 3 \times 25\text{س}^{-2} - 1$

$\therefore \frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = -150\text{س}^{-3} = \frac{-150}{\text{س}^3}$

(4) $\text{ص} = (\text{س}^2 - 3\text{س} + 2)^{\frac{1}{3}}$

$\therefore \frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \frac{1}{3}(\text{س}^2 - 3\text{س} + 2)^{-\frac{2}{3}}(2\text{س} - 3)$

$= \frac{2\text{س} - 3}{3\sqrt[3]{(\text{س}^2 - 3\text{س} + 2)^2}}$

(5) $\frac{\text{ءص}}{\text{ءع}} = 6\text{ع}^2$

$, \frac{\text{ءع}}{\text{ءس}} = \frac{2(\text{س} - 1) - (2\text{س} + 1)}{(\text{س} - 1)^2} = \frac{-3}{(\text{س} - 1)^2}$

$\therefore \frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \frac{\text{ءص}}{\text{ءع}} \times \frac{\text{ءع}}{\text{ءس}} = 6\text{ع}^2 \times \frac{-3}{(\text{س} - 1)^2}$

$= \frac{(2\text{س} + 1)^2}{(\text{س} - 1)^2} \times \frac{-18}{(\text{س} - 1)^2}$

$= \frac{-18(2\text{س} + 1)^2}{(\text{س} - 1)^4}$

(6) $\text{ص} = \frac{2\text{س} + 1}{2\text{س} + 2} = \frac{2\text{س} + 1}{2(\text{س} + 1)}$

$\therefore \frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \frac{4(\text{س} + 1) - 2(2\text{س} + 1)}{4(\text{س} + 1)^2}$

$= \frac{1}{2(\text{س} + 1)^2}$

2

(1) $\text{ص}' = 12(\text{س} + 4)^{11}$ (2) $\text{ص}' = 7(\text{س} + 3)^6$

(3) $\text{ص}' = 8(2\text{س} + 3)^3$

(4) $\text{ص}' = -15(1 - 3\text{س})^4$

(5) $\text{ص}' = 12\text{س}(\text{س}^2 - 3)^5$

(6) $\text{ص}' = 16\text{س}(2\text{س}^2 - 3)^3$

(7) $\text{ص}' = 4(3\text{س}^2 - 4\text{س} + 1)^3(6\text{س} - 4)$

(8) $\text{ص}' = 5(\text{س}^3 - 3\text{س}^2 + 2)^4(3\text{س}^2 - 6\text{س})$

(9) $\text{ص}' = 9(2\text{س}^3 - 4\text{س} + 1)^8(6\text{س}^2 - 4)$

(10) $\text{ص}' = 10(6\text{س}^3 + 3\text{س} + 1)^9(18\text{س}^2 + 3)$

(11) $\text{ص}' = 7\left(\text{س}^2 + \frac{1}{\text{س}^2}\right)^6\left(2\text{س} - \frac{2}{\text{س}^3}\right)$

(12) $\because \text{ص} = 7(3\text{س} - 1)^{-6}$

$\therefore \text{ص}' = 7 \times -6(3\text{س} - 1)^{-7} \times 3$

$= -126(3\text{س} - 1)^{-7} = \frac{-126}{(3\text{س} - 1)^7}$

(13) $\because \text{ص} = 7(\text{س}^2 - 9)^{-5}$

$\therefore \text{ص}' = -35 \times 2\text{س}(\text{س}^2 - 9)^{-6}$

$= \frac{-70\text{س}}{(\text{س}^2 - 9)^6}$

4

(1) $\text{ص}' = 6(\text{س} + 3)^5 \quad \therefore [\text{ص}']_{\text{س} = -2} = 6$

(2) $\text{ص}' = 14\text{س}(\text{س}^2 - 2)^6$

$\therefore [\text{ص}']_{\text{س} = 0} = \text{صفر}$

(3) $\text{ص}' = -4(\text{س}^2 - \text{س} + 1)^{-5}(2\text{س} - 1)$

$\therefore [\text{ص}']_{\text{س} = 1} = -4$

(4) $\because \text{ص} = [(1 - \text{س})(1 + \text{س})]^6 = (1 - \text{س}^2)^6$

$\therefore \text{ص}' = 6(1 - \text{س}^2)^5 \times (-2\text{س})$

$= -12\text{س}(1 - \text{س}^2)^5$

$\therefore [\text{ص}']_{\text{س} = \sqrt{2}} = 12\sqrt{2}$

(5) $\text{ص}' = 9\left(\frac{3\text{س} - 2}{5\text{س} - 4}\right)^8$

$\times \frac{3(5\text{س} - 4) - 5(3\text{س} - 2)}{(5\text{س} - 4)^2}$

$= \frac{-18}{(5\text{س} - 4)^2} \times \left(\frac{3\text{س} - 2}{5\text{س} - 4}\right)^8$

$\therefore [\text{ص}']_{\text{س} = 1} = -18$

(6) $\text{ص}' = 5\left(\frac{\text{س}^2 + 1}{\text{س} - 3}\right)^4$

$\left(\frac{2\text{س}(\text{س} - 3) - (\text{س}^2 + 1)}{(\text{س} - 3)^2}\right)$

$= 5\left(\frac{\text{س}^2 + 1}{\text{س} - 3}\right)^4\left(\frac{\text{س}^2 - 6\text{س} - 1}{(\text{س} - 3)^2}\right)$

$\therefore [\text{ص}']_{\text{س} = 1} = \frac{-15}{2}$

(7) $\text{ص}' = 7\left(\frac{\text{س}^2 - 2}{3 - \text{س}^2}\right)^6$

$\left(\frac{2\text{س}(3 - \text{س}^2) + 2\text{س}(\text{س}^2 - 2)}{(3 - \text{س}^2)^2}\right)$

$= 7\left(\frac{\text{س}^2 - 2}{3 - \text{س}^2}\right)^6\left(\frac{2\text{س}}{(3 - \text{س}^2)^2}\right)$

$\therefore [\text{ص}']_{\text{س} = \text{صفر}} = \text{صفر}$

5

(1) $\text{ص}' = \frac{\text{س}}{\sqrt{\text{س}^2 + 1}}$

(2) $\because \text{ص} = (2\text{س} + 1)^{\frac{5}{3}}$

$\therefore \text{ص}' = \frac{5}{3}(2\text{س} + 1)^{\frac{2}{3}}(2)$

$= \frac{10}{3}\sqrt[3]{(2\text{س} + 1)^2}$

(3) $\text{ص}' = \frac{-2\text{س}}{\sqrt{9 - 2\text{س}^2}} \quad \therefore [\text{ص}']_{\text{س} = \frac{1}{\sqrt{2}}} = \frac{-1}{2}$

(4) $\because \text{ص} = (2\text{س}^3 + 4\text{س} + 3)^{\frac{2}{3}}$

$\therefore \text{ص}' = \frac{2}{3}(2\text{س}^3 + 4\text{س} + 3)^{-\frac{1}{3}}(6\text{س}^2 + 4)$

$= \frac{12\text{س}^2 + 8}{3\sqrt[3]{2\text{س}^3 + 4\text{س} + 3}}$

$\therefore [\text{ص}']_{\text{س} = 2} = \frac{56}{9}$

(5) $\because \text{ص} = (2\text{س}^2 - 3\text{س} + 9)^{\frac{1}{3}}$

$\therefore \text{ص}' = \frac{1}{3}(2\text{س}^2 - 3\text{س} + 9)^{-\frac{2}{3}}(4\text{س} - 3)$

$\therefore [\text{ص}']_{\text{س} = 1} = \frac{1}{12}$

6

(1) $\because \text{ص} = (\text{س}^3 - 2\text{س}^2)^{\frac{1}{5}}$

$\therefore \frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \frac{1}{5}(\text{س}^3 - 2\text{س}^2)^{-\frac{4}{5}}(3\text{س}^2 - 4\text{س})$

$= \frac{3\text{س}^2 - 4\text{س}}{5\sqrt[5]{(\text{س}^3 - 2\text{س}^2)^4}}$

(2) $\because \text{ص} = (3\text{س}^2 - 4)^{\frac{1}{3}}$

$\therefore \frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \frac{1}{3}(3\text{س}^2 - 4)^{-\frac{2}{3}}(6\text{س})$

$\therefore \frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \frac{2\text{س}}{\sqrt[3]{(3\text{س}^2 - 4)^2}}$

(3) $\because \text{ص} = (2\text{س}^2 - 3\text{س} - 5)^{\frac{2}{3}}$

$\therefore \frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \frac{2}{3}(2\text{س}^2 - 3\text{س} - 5)^{-\frac{1}{3}}(4\text{س} - 3)$

$= \frac{2(4\text{س} - 3)}{3(2\text{س}^2 - 3\text{س} - 5)^{\frac{1}{3}}}$

(4) $\because \text{ص}^3 = (\text{س} - 2)^{-4}$

$\therefore \text{ص} = (\text{س} - 2)^{-\frac{4}{3}}$

$\therefore \frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = -\frac{4}{3}(\text{س} - 2)^{-\frac{7}{3}} = \frac{-4}{3\sqrt[3]{(\text{س} - 2)^7}}$

(5) $\because \text{ص} = \left(\frac{1 - \text{س}^2}{1 + 2\text{س}^2}\right)^{\frac{1}{5}}$

$\therefore \frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \frac{1}{5}\left(\frac{1 - \text{س}^2}{1 + 2\text{س}^2}\right)^{-\frac{4}{5}}$

$\times \frac{-2\text{س}(1 + 2\text{س}^2) - 4\text{س}(1 - \text{س}^2)}{(1 + 2\text{س}^2)^2}$

$= \frac{-6\text{س}}{5(1 + 2\text{س}^2)^2} \times \left(\frac{1 - \text{س}^2}{1 + 2\text{س}^2}\right)^{-\frac{4}{5}}$

7

$\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = 2\text{س} \ , \ \frac{\text{ءس}}{\text{ءع}} = 3\text{ع}^2$

$\therefore \frac{ءص}{ءع} = \frac{ءص}{ءس} \times \frac{ءس}{ءع} = ٢ س \times ٣ ع^٢$

$= ٢ (ع^٣ - ٢) \times ٣ ع^٢$

$= ٦ ع^٥ - ١٢ ع^٢$

$\therefore \frac{ءص}{ءع} + ٤ \frac{ءس}{ءع} = (٦ ع^٥ - ١٢ ع^٢) + ٤ (٣ ع^٢)$

$= ٦ ع^٥$

٨

$\frac{ءص}{ءع} = ٢ ع + ١$ ، $\frac{ءع}{ءس} = ٤ س$

$\therefore \frac{ءص}{ءس} = \frac{ءص}{ءع} \times \frac{ءع}{ءس} = ٤ س (٢ ع + ١)$

$= ٤ س (٤ س^٢ + ١)$

$\therefore \frac{ءص}{ءس} - \frac{ءع}{ءس} = ٤ س (٤ س^٢ + ١) - ٤ س$

$= ١٦ س^٣$

٩

بإجراء التفاضل للطرفين

$\therefore ٣ (س + ص)^٢ \left(١ + \frac{ءص}{ءس}\right) = ٠$

، $\because (س + ص)^٢ \neq$ صفر

$\therefore ١ + \frac{ءص}{ءس} = ٠$ $\qquad \therefore \frac{ءص}{ءس} = -١$

١٠

$دَ(س) = ٧ (س - ٥)^٦ = ٧ \quad \therefore (س - ٥)^٦ = ١$

$\therefore س - ٥ = ١ \qquad \therefore س = ٦$

أ، $س - ٥ = -١ \qquad \therefore س = ٤$

١١

$\because$ ص = ١ عند س = ٢ $\quad \therefore (٢ أ + ب)^٢ = ١ \quad (١)$

، $\because \frac{ءص}{ءس} = ٢ أ (أ س + ب)$

$\therefore ٤ = ٢ أ (٢ أ + ب) \qquad \therefore ٢ أ + ب = \frac{٢}{أ} \quad (٢)$

من (١) ، (٢) : $\therefore أ^٢ = ٤$

$\therefore أ = \pm ٢$ ، وبالتعويض فى (٢) : $\therefore ب = \mp ٣$

إجابات تمارين 12

أولًا أسئلة الاختيار من متعدد

① (د)	② (أ)	③ (جـ)	④ (د)	⑤ (ب)
⑥ (ب)	⑦ (جـ)	⑧ (جـ)	⑨ (د)	⑩ (أ)
⑪ (د)	⑫ (د)	⑬ (ب)	⑭ (ب)	⑮ (د)
⑯ (جـ)	⑰ (ب)	⑱ (أ)	⑲ (د)	⑳ (أ)
㉑ (جـ)	㉒ (ب)	㉓ (د)	㉔ (جـ)	㉕ (د)
㉖ (د)	㉗ (جـ)	㉘ (ب)	㉙ (د)	㉚ (د)
㉛ (أ)	㉜ (ب)	㉝ (ب)	㉞ (أ)	㉟ (د)
㊱ (أ)	㊲ (جـ)	㊳ (ب)	㊴ (جـ)	

ثانيًا الأسئلة المقالية

١

① $صَ = ٣ س^٢ + ٢ س - ١$

$\therefore [صَ]_{س=١} = ٤ \qquad \therefore$ ميل المماس = ٤

② $صَ = \frac{س + ٢ - س}{(س + ٢)^٢} = \frac{٢}{(س + ٢)^٢}$

$\therefore [صَ]_{س=-١} = ٢ \qquad \therefore$ ميل المماس = ٢

③ $صَ = \frac{(س^٢ + ١)(٢ س + ١) - (س^٢ + س + ١)(٢ س)}{(س^٢ + ١)^٢}$

$= \frac{١ - س^٢}{(س^٢ + ١)^٢}$

$\therefore [صَ]_{س=١} =$ صفر

$\therefore$ ميل المماس = صفر

٢

① $صَ = ٦ س^٢ - ٦ س - ١٢$

$\therefore [صَ]_{س=-٢} = ٢٤$

$\therefore$ ميل العمودى $= -\frac{١}{٢٤}$

② $صَ = ٢ \left(\frac{٢ س - ٣}{س - ١}\right) \left(\frac{٢ (س - ١) - (٢ س - ٣)}{(س - ١)^٢}\right)$

$= \frac{٤ س - ٦}{(س - ١)^٣}$

$\therefore [صَ]_{س=٠} = ٦$

$\therefore$ ميل العمودى $= -\frac{١}{٦}$

③ $ص = س^٢ \left(س^٢ - \frac{٤}{س^٢}\right) = س^٤ - ٤$

$\therefore صَ = ٤ س^٣$

$\therefore [صَ]_{س=٢} = ٣٢$

$\therefore$ ميل العمودى $= -\frac{١}{٣٢}$

٣

① $صَ = ٦ س^٢ - ٤ \qquad \therefore [صَ]_{س=-٢} = ٢٠$

$\therefore$ ميل المماس = ٢٠ ، ميل العمودى $= -\frac{١}{٢٠}$

② $صَ = ١ - س^{-٢} \qquad \therefore [صَ]_{س=٤} = \frac{١٥}{١٦}$

$\therefore$ ميل المماس $= \frac{١٥}{١٦}$ ، ميل العمودى $= -\frac{١٦}{١٥}$

③ $صَ = \frac{-٥}{(س - ٣)^٢} \qquad \therefore [صَ]_{س=٢} = -٥$

$\therefore$ ميل المماس = −٥ ، ميل العمودى $= \frac{١}{٥}$

④ $صَ = (س^٣ - ٢) + (س + ١)(٣ س^٢)$

$\therefore [صَ]_{س=١} = ٥$

$\therefore$ ميل المماس = ٥ ، ميل العمودى $= -\frac{١}{٥}$

٤

لإيجاد نقط التقاطع مع محور السينات : نضع ص = ٠

$\therefore (س + ٢)(س^٣ + ١) = ٠$

$\therefore س = -٢$ أ، $س = -١$

$\therefore$ نقط التقاطع هى : (−٢ ، ٠) ، (−١ ، ٠)

، $\because صَ = ٣ س^٢ (س + ٢) + (س^٣ + ١)$

$\therefore [صَ]_{س=-٢} = -٧$ ، $[صَ]_{س=-١} = ٣$

$\therefore$ ميل المماس = −٧ عند النقطة (−٢ ، ٠)

، ميل المماس = ٣ عند النقطة (−١ ، ٠)

٥

لإيجاد نقطة التقاطع مع محور الصادات : نضع س = ٠

$\therefore د(٠) = -١$

$\therefore$ نقطة التقاطع هى (٠ ، −١)

، $\because دَ(س) = ٣ س^٢ - ٤ س + ٣$

$\therefore [دَ(س)]_{س=٠} = ٣$

$\therefore$ ميل المماس = ٣ عند النقطة (٠ ، −١)

٦

① $صَ = ٣ س^٢ - ٢ س \qquad \therefore [صَ]_{س=١} = ١$

$\therefore$ ظا ه = ١ $\qquad \therefore$ ه = ٤٥°

② $صَ = ٢ س - \frac{١}{س^٢} \qquad \therefore [صَ]_{س=١} = ١$

$\therefore$ ظا ه = ١ $\qquad \therefore$ ه = ٤٥°

③ $صَ = (س - ١)(٢) + (٢ س + ١) = ٤ س - ١$

$\therefore [صَ]_{س=٠} = -١ \qquad \therefore$ ظا ه = −١

$\therefore$ ه = ١٣٥°

④ $دَ(س) = \frac{٢ س (س^٢ + ٢) - ٢ س (س^٢ + ٥)}{(س^٢ + ٢)^٢}$

$= \frac{-٦ س}{(س^٢ + ٢)^٢}$

$\therefore [دَ(س)]_{س=١} = -\frac{٢}{٣} \qquad \therefore$ ظا ه $= \frac{-٢}{٣}$

$\therefore$ ه = ١٤٦° ١٨َ ٣٦ً

٧

$صَ = ٣ س^٢ - ١٢ س - ١٥$

، $\because$ المماس يوازى محور السينات

∴ ص' = صفر

∴ $٣ س^{٢} - ١٢ س - ١٥ = ٠$

∴ $س^{٢} - ٤ س - ٥ = ٠$

∴ (س − ٥) (س + ١) = صفر

∴ س = ٥ وعندها ص = −٨٠

أ، س = −١ وعندها ص = ٢٨

∴ النقط هى (٥ ، −٨٠) ، (−١ ، ٢٨)

٨

$ص' = ٢ س (س - ٣) + (س^{٢} + ٢)$

$= ٣ س^{٢} - ٦ س + ٢$

∴ $٣ س^{٢} - ٦ س + ٢ = ١١$

∴ $٣ س^{٢} - ٦ س - ٩ = ٠$

∴ $س^{٢} - ٢ س - ٣ = ٠$

∴ (س − ٣) (س + ١) = ٠

∴ س = ٣ وعندها ص = صفر

أ، س = −١ وعندها ص = −١٢

∴ النقط هى (٣ ، ٠) ، (−١ ، −١٢)

٩

ص' = ٢ س − ٢

① ∵ المماس موازى محور السينات

∴ ص' = ٠ ∴ ٢ س − ٢ = ٠

∴ س = ١

وعندها ص = ٢ ∴ النقطة هى (١ ، ٢)

② ∵ ميل المستقيم المعطى = $\frac{١}{٤}$

∴ ميل العمودى = −٤

∴ ص' = −٤ ∴ ٢ س − ٢ = −٤

∴ س = −١ وعندها ص = ٦

∴ النقطة هى (−١ ، ٦)

١٠

$ص' = ٣ س^{٢} - ٦ س$

① ∵ المماس يوازى محور السينات

∴ ص' = ٠

∴ $٣ س^{٢} - ٦ س = ٠$

∴ ٣ س (س − ٢) = ٠

∴ س = ٠ ومنها ص = ٠ أ، س = ٢

ومنها ص = −٤

∴ النقط هى : (٠ ، ٠) ، (٢ ، −٤)

② ∵ المماس عمودى على المستقيم الذى ميله = $\frac{-١}{٩}$

∴ ص' = ٩

∴ $٣ س^{٢} - ٦ س = ٩$

∴ $س^{٢} - ٢ س - ٣ = ٠$

∴ (س − ٣) (س + ١) = ٠

∴ س = ٣ ومنها ص = ٠

أ، س = −١ ومنها ص = −٤

∴ النقط هى : (٣ ، ٠) ، (−١ ، −٤)

١١

$ص' = ٣ س^{٢} - ٦ س - ٥$

، ميل المستقيم المار بالنقطتين (٣ ، ١) ، (٥ ، ٩)

$= \frac{٩ - ١}{٥ - ٣} = ٤$

∴ $٣ س^{٢} - ٦ س - ٥ = ٤$

∴ $٣ س^{٢} - ٦ س - ٩ = ٠$

∴ $س^{٢} - ٢ س - ٣ = ٠$

∴ (س − ٣) (س + ١) = ٠

∴ س = ٣ ومنها ص = −٣ أ، س = −١ ومنها ص = ١٣

∴ النقط هى : (٣ ، −٣) ، (−١ ، ١٣)

١٢

$ص' = \frac{(س + ٢) - (س - ٢)}{(س + ٢)^{٢}} = \frac{٤}{(س + ٢)^{٢}}$

، ∵ ظا $\frac{\pi}{٤} = ١$ ∴ $\frac{٤}{(س + ٢)^{٢}} = ١$

∴ $(س + ٢)^{٢} = ٤$ ∴ س + ٢ = ± ٢

∴ س = ٠ وعندها ص = −١

أ، س = −٤ وعندها ص = ٣

∴ النقط هى : (٠ ، −١) ، (−٤ ، ٣)

١٣

$ص' = ٩ س^{٢} - ١١$

① ميل المستقيم المعطى = −٢

∴ $٩ س^{٢} - ١١ = -٢$ ∴ $س^{٢} = ١$

∴ س = ١ وعندها ص = −٣

أ، س = −١ وعندها ص = ١٣

∴ النقط هى (١ ، −٣) ، (−١ ، ١٣)

② ميل المستقيم المعطى = $\frac{-١}{٢٥}$

∴ ميل العمودى = ٢٥

∴ $٩ س^{٢} - ١١ = ٢٥$ ∴ $س^{٢} = ٤$

∴ س = ٢ وعندها ص = ٧

أ، س = −٢ وعندها ص = ٣

∴ النقط هى (٢ ، ٧) ، (−٢ ، ٣)

③ ∵ ظا هـ = −١١

∴ $٩ س^{٢} - ١١ = -١١$

∴ س = ٠ وعندها ص = ٥

∴ النقطة هى (٠ ، ٥)

١٤

① $ص' = ٩ س^{٢} - ١٤ س + ١$

∴ ميل المماس عند (س = ١) هو −٤

∴ معادلة المماس هى : (ص + ٥) = −٤ (س − ١)

أى أن : ص + ٤ س + ١ = ٠

② $ص' = ٣ (س + ٣)^{٢}$

∴ ميل المماس عند (س = −١) هو ١٢

، ∵ د (−١) = ٨

∴ المنحنى يمر بالنقطة (−١ ، ٨)

∴ معادلة المماس هى : (ص − ٨) = ١٢ (س + ١)

أى أن : ١٢ س − ص + ٢٠ = ٠

③ $ص' = \frac{١}{٢ \sqrt{٢ س + ٧}}$

∴ ميل المماس عند (س = ٢) هو $\frac{١}{٦}$

، ∵ د (٢) = ٣

∴ المنحنى يمر بالنقطة (٢ ، ٣)

∴ معادلة المماس هى : (ص − ٣) = $\frac{١}{٦}$ (س − ٢)

أى أن : س − ٦ ص + ١٦ = ٠

④ $ص' = \frac{١}{٢ \sqrt{س}} + \frac{-٢}{\sqrt{س^{٣}}}$

∴ ميل المماس عند (س = ٤) هو صفر

∴ معادلة المماس هى : ص = ٤

⑤ $ص' = (س^{٢} + س) (٣ س^{٢}) + (س^{٣} + ٥) (٢ س + ١)$

∴ ميل المماس عند (س = −٢) هو ٣٣

∴ معادلة المماس هى : (ص + ٦) = ٣٣ (س + ٢)

أى أن : ص − ٣٣ س − ٦٠ = ٠

⑥ عند ص = −٨ ∴ $-٨ = \frac{٢ س - ٣}{٣ س + ٢}$

∴ −٢٤ س − ١٦ = ٢ س − ٣

∴ س = $-\frac{١}{٢}$

∴ النقطة هى ($-\frac{١}{٢}$ ، −٨)

، ∵ $ص' = \frac{٢ (٣ س + ٢) - ٣ (٢ س - ٣)}{(٣ س + ٢)^{٢}}$

$= \frac{١٣}{(٣ س + ٢)^{٢}}$

∴ ميل المماس عند (س = $-\frac{1}{2}$) هو ٥٢

∴ معادلة المماس هي : ص + ٨ = ٥٢ (س + $\frac{1}{2}$)

أي أن : ص − ٥٢ س − ١٨ = ٠

١٥

(١) عند س = −١

∴ ص = $(-١)^{٥}$ − ٤ $(-١)^{٢}$ + ٢ = ٥

∴ النقطة هي (−١ ، ٥)

، ∵ صَ = ٥ $س^{٤}$ − ١٢ $س^{٢}$

∴ ميل المماس عند (س = −١) هو −٧

∴ ميل العمودي = $\frac{1}{7}$

∴ معادلة العمودي هي :

ص − ٥ = $\frac{1}{7}$ (س + ١)

أي أن : ٧ ص − س − ٣٦ = ٠

(٢) صَ = $\frac{س - ٢ - س - ٢}{(س - ٢)^{٢}} = \frac{-٤}{(س - ٢)^{٢}}$

∴ ميل المماس عند (س = ٣) هو − ٤

∴ ميل العمودي = $\frac{1}{4}$

∴ معادلة العمودي هي : ص − ٥ = $\frac{1}{4}$ (س − ٣)

أي أن : ٤ ص − س − ١٧ = ٠

(٣) عند س = ٠ ∴ ص = $\frac{-1}{2}$

∴ النقطة هي (٠ ، $-\frac{1}{2}$)

، ∵ صَ = $\frac{٢ س (٢ - س^{٢}) + ٢ س (س^{٢} - ١)}{(٢ - س^{٢})^{٢}}$

= $\frac{٢ س}{(٢ - س^{٢})^{٢}}$

∴ ميل المماس عند (س = ٠) هو صفر

∴ ميل العمودي غير معرف

∴ معادلة العمودي هي س = ٠ (محور الصادات)

١٦

(١) عند س = ٢

∴ ص = ٢ $(٢)^{٣}$ − ٤ $(٢)^{٢}$ + ٣ = ٣

∴ النقطة هي (٢ ، ٣)

، ∵ صَ = ٦ $س^{٢}$ − ٨ س

∴ ميل المماس عند (س = ٢) هو ٨

∴ ميل العمودي = $-\frac{1}{8}$

∴ معادلة المماس هي : ص − ٣ = ٨ (س − ٢)

أي أن : ص − ٨ س + ١٣ = ٠

، معادلة العمودي هي : ص − ٣ = $-\frac{1}{8}$(س − ٢)

أي أن : ٨ ص + س − ٢٦ = ٠

(٢) عند س = −٢

∴ ص = $(-٢)^{٣}$ + $(-٢)^{٢}$ − ١ = −٥

∴ النقطة هي : (−٢ ، −٥)

، ∵ صَ = ٣ $س^{٢}$ + ٢ س

∴ ميل المماس عند (س = −٢) = ٨

∴ ميل العمودي = $\frac{-1}{8}$

∴ معادلة المماس هي : (ص + ٥) = ٨ (س + ٢)

أي أن : ص − ٨ س − ١١ = ٠

، معادلة العمودي هي :

(ص + ٥) = $\frac{-1}{8}$ (س + ٢)

أي أن : ٨ ص + س + ٤٢ = ٠

(٣) عند س = ٢

∴ ص = $(٣ × ٢ - ٥)^{٧}$ = ١

∴ النقطة هي : (٢ ، ١)

، ∵ صَ = ٢١ $(٣ س - ٥)^{٦}$

∴ ميل المماس عند (س = ٢) هو ٢١

∴ ميل العمودي = $\frac{-1}{21}$

∴ معادلة المماس هي : (ص − ١) = ٢١ (س − ٢)

أي أن : ص − ٢١ س + ٤١ = ٠

، معادلة العمودي هي : (ص − ١) = $\frac{-1}{21}$ (س − ٢)

أي أن : ٢١ ص + س − ٢٣ = ٠

١٧

عند س = ١ ∴ ص = ٢

∴ النقطة هي : (١ ، ٢)

، ∵ صَ = $\frac{س + ١ - (س + ٣)}{(س + ١)^{٢}} = \frac{-٢}{(س + ١)^{٢}}$

∴ ميل المماس عند (س = ١) هو = $-\frac{1}{2}$

، ميل العمودي = ٢

∴ معادلة المماس هي : ص − ٢ = $-\frac{1}{2}$(س − ١)

أي أن : ٢ ص + س − ٥ = ٠

، معادلة العمودي هي : ص − ٢ = ٢ (س − ١)

أي أن : ص − ٢ س = ٠

وبالتعويض بالنقطة أ (−٣ ، ٤) في معادلة المماس

∴ ٢ (٤) + (−٣) − ٥ = صفر (تحقق المعادلة)

∴ أ ∈ المماس للمنحنى عند (١ ، ٢)

١٨

صَ = ٦ $س^{٢}$ + ١٢ س + ٥

، ∵ ظا ١٣٥° = −١

∴ ٦ $س^{٢}$ + ١٢ س + ٥ = −١

∴ $س^{٢}$ + ٢ س + ١ = ٠

∴ $(س + ١)^{٢}$ = ٠ ∴ س = −١

، عند س = −١ فإن : ص = −١

∴ ميل المماس للمنحنى عند النقطة (−١ ، −١) هو −١

∴ معادلة المماس هي : ص + ١ = −١ (س + ١)

أي أن : ص + س + ٢ = ٠

١٩

لإيجاد نقط التقاطع مع محور السينات نضع ص = ٠

∴ (س − ٢) (س + ١) = ٠

∴ س = ٢ أ، س = −١

∴ نقطتا التقاطع مع محور السينات هما

(٢ ، ٠) ، (−١ ، ٠)

، ∵ صَ = (س − ٢) + (س + ١) = ٢ س − ١

∴ ميل المماس عند (س = ٢) هو ٣

∴ معادلة المماس عندها هي : ص − ٠ = ٣ (س − ٢)

أي أن : ص − ٣ س + ٦ = ٠

، ميل المماس عند (س = −١) هو −٣

∴ معادلة المماس عندها هي : ص − ٠ = −٣ (س + ١)

أي أن : ص + ٣ س + ٣ = ٠

٢٠

دَ (س) = ٢ أ س + ب

، ∵ عند س = −١

فإن ميل المماس = ظا ٤٥° = ١

∴ ١ = ٢ أ (−١) + ب

∴ ب − ٢ أ = ١ (١)

، ∵ (−١ ، ٣) تقع على المنحنى

∴ ٣ = أ $(-١)^{٢}$ + ب (−١) + ٥

∴ −٢ = أ − ب (٢)

∴ أ = ١ ، ب = ٣

٢١

∵ صَ = ٢ س + أ

، ∵ ميل المماس عند س = ١ يساوي ٥

∴ ٢ + أ = ٥ ∴ أ = ٣

، ∵ (١ ، ٢) تقع على المنحنى

∴ ٢ = ١ + أ + ب ∴ أ + ب = ٢

∴ ٣ + ب = ٢ ∴ ب = −١

٢٢

صَ = ٢ أ س^{٢} + ٢ ب س

∵ ميل المماس عند س = −١ يساوي ٨

∴ ٨ = ٢ أ − ٢ ب (١)

∵ (−١ ، −٣) تقع على المنحنى

∴ −٣ = − أ + ب (٢)

من (١) ، (٢) : ∴ أ = ٢ ، ب = −١

٢٣

صَ = ٢ س

∵ ميل المستقيم المعطى = ٤ ∴ ٤ = ٢ س

∴ س = ٢ ومن معادلة المنحنى

∴ النقطة هي (٢ ، ٩)

وبالتعويض في معادلة المستقيم

∴ ٩ = ٤ (٢) + أ ∴ أ = ١

٢٤

• بالنسبة للمنحنى الأول : صَ = ٢ س + ١

∴ ميل المماس عند (س = ١) هو م$_{١}$ = ٣

• بالنسبة للمنحنى الثاني : صَ = $\frac{-١}{٣\sqrt[٣]{س^{٢}}}$

∴ ميل المماس عند (س = ١) هو م$_{٢}$ = $-\frac{١}{٣}$

∵ م$_{١}$ م$_{٢}$ = ٣ × $-\frac{١}{٣}$ = −١

∴ المماسان متعامدان

٢٥

صَ = ٦ س − ٥ ∴ [صَ]$_{س = ١}$ = ١

∴ الميل = ١ = ظا هـ ∴ هـ = $\frac{\pi}{٤}$

∴ المماس يصنع زاوية موجبة قياسها $\frac{\pi}{٤}$ مع الاتجاه الموجب لمحور السينات

∴ معادلة المماس هي : $\frac{ص - ٠}{س - ١}$ = ١

∴ ص = س − ١

٢٦

عند ص = ٣ ∴ ٣ = س^{٢} − ٢ س + ٣

∴ س (س − ٢) = ٠ ∴ س = ٠ أو س = ٢

∴ توجد نقطتان (٠ ، ٣) ، (٢ ، ٣) وبالتالي توجد إجابتان

∵ صَ = ٢ س − ٢

∴ ميل المماس عند (س = ٠) هو −٢

∴ معادلة المماس هي : ص − ٣ = −٢ (س − ٠)

أي أن : ص + ٢ س − ٣ = ٠

، ميل المماس عند (س = ٢) هو ٢

∴ معادلة المماس هي : ص − ٣ = ٢ (س − ٢)

أي أن : ص − ٢ س + ١ = ٠

٢٧

صَ = ٥ − ٤ س ∴ الميل = [صَ]$_{س = ١}$ = ١

∴ معادلة المماس هي : $\frac{ص + ١}{س - ١}$ = ١

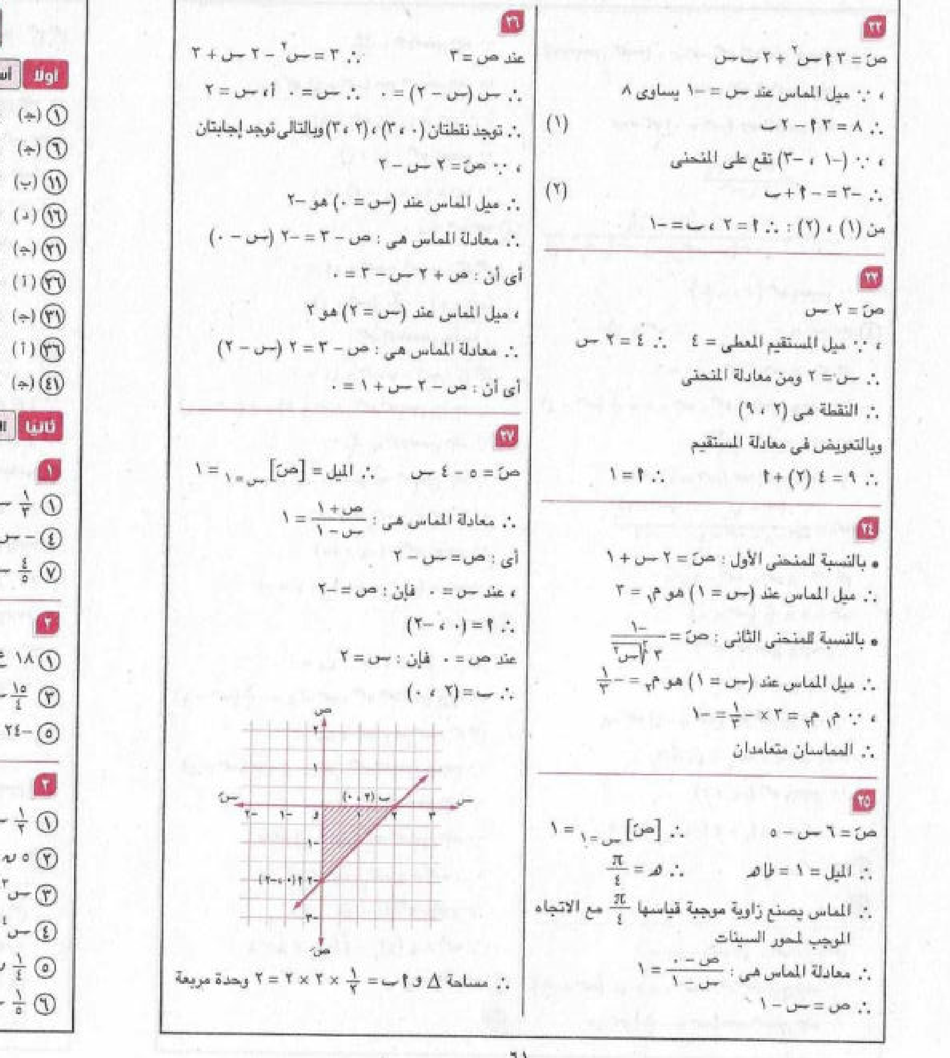
أي : ص = س − ٢

، عند س = ٠ فإن : ص = −٢

∴ أ = (٠ ، −٢)

عند ص = ٠ فإن : س = ٢

∴ ب = (٢ ، ٠)



∴ مساحة Δ و أ ب = $\frac{١}{٢}$ × ٢ × ٢ = ٢ وحدة مربعة

إجابات تمارين 13

أولا أسئلة الاختيار من متعدد

① (جـ)	② (ب)	③ (جـ)	④ (جـ)	⑤ (جـ)
⑥ (جـ)	⑦ (أ)	⑧ (جـ)	⑨ (د)	⑩ (أ)
⑪ (ب)	⑫ (ب)	⑬ (ب)	⑭ (جـ)	⑮ (أ)
⑯ (د)	⑰ (ب)	⑱ (أ)	⑲ (ب)	⑳ (ب)
㉑ (جـ)	㉒ (ب)	㉓ (جـ)	㉔ (د)	㉕ (ب)
㉖ (أ)	㉗ (جـ)	㉘ (د)	㉙ (جـ)	㉚ (أ)
㉛ (جـ)	㉜ (أ)	㉝ (د)	㉞ (ب)	㉟ (أ)
㊱ (أ)	㊲ (جـ)	㊳ (أ)	㊴ (ب)	㊵ (ب)
㊶ (جـ)	㊷ (د)	㊸ (جـ)	㊹ (د)	

ثانيا الأسئلة المقالية

١

① $\frac{١}{٣}$ س^{٣} + ث ② ث ③ $\frac{\pi س}{٥}$ + ث

④ − س^{٤} + ث ⑤ $\frac{٢}{٥}$ ف^{٦} + ث ⑥ − ع^{٣} + ث

⑦ $\frac{٤}{٥}$ س$^{-٢}$ + ث

٢

① ١٨ ع$^{\frac{١}{٣}}$ + ث ② $\frac{٢}{٣}$ س$^{\frac{٣}{٢}}$ + ث

③ $\frac{١٥}{٤}$ س$^{\frac{٤}{٣}}$ + ث ④ $\frac{٥}{٢}$ س$^{\frac{٢}{٥}}$ + ث

⑤ −٢٤ س$^{-\frac{١}{٢}}$ + ث ⑥ $\frac{٣\sqrt{٣}}{٧}$ ص$^{\frac{٧}{٣}}$ + ث

٣

① $\frac{١}{٢}$ س^{٢} + س + ث

② ٥ ن − ن^{٢} + ث

③ س^{٣} + س^{٢} − س + ث

④ س^{٤} − ٢ س^{٣} + ٤ س^{٢} − ٥ س + ث

⑤ $\frac{١}{٤}$ ن^{٤} − $\frac{٦}{٥}$ ن^{٥} + ث

⑥ $\frac{١}{٥}$ س^{٥} + س$^{-١}$ + ٥ س + ث

⑦ − س$^{-١}$ + $\frac{٢}{٣}$ س$^{\frac{٣}{٢}}$ + ٣ س + ث

⑧ − $\frac{٣}{٢}$ س$^{-٢}$ − ٢ س$^{-١}$ + ٥ س + ث

⑨ $\frac{١}{٤}$ س^{٤} + $\frac{٢}{٣}$ س$^{\frac{٣}{٢}}$ + ث

⑩ $\frac{١}{٣}$ أ س^{٣} − $\frac{ب}{٢}$ س^{٢} + جـ س + ث

⑪ س$^{\frac{٣}{٢}}$ + س$^{\frac{٧}{٤}}$ + ث

٤

① ∫ (٧ س^{٦} − ٧ س^{٢}) ء س

= س^{٧} − $\frac{٧}{٣}$ س^{٣} + ث

② ∫ (٢ س^{٣} + س) ء س

= $\frac{١}{٢}$ س^{٤} + $\frac{١}{٢}$ س^{٢} + ث

③ ∫ (٢ س^{٢} + س − ٣) ء س

= $\frac{٢}{٣}$ س^{٣} + $\frac{١}{٢}$ س^{٢} − ٣ س + ث

④ ∫ (س − ٢) (٤ س^{٢} + ١) ء س

= ∫ (٤ س^{٣} + س − ٨ س^{٢} − ٢) ء س

= س^{٤} + $\frac{١}{٢}$ س^{٢} − $\frac{٨}{٣}$ س^{٣} − ٢ س + ث

⑤ ∫ س^{٣} (٢ − س)^{٢} ء س

= ∫ س^{٣} (٤ − ٤ س + س^{٢}) ء س

= ∫ (٤ س^{٣} − ٤ س^{٤} + س^{٥}) ء س

= س^{٤} − $\frac{٤}{٥}$ س^{٥} + $\frac{١}{٦}$ س^{٦} + ث

⑥ ∫ (١ − س^{٢})^{٢} (١ + س^{٢})^{٢} ء س

= ∫ (١ − س^{٤})^{٢} ء س

= ∫ (١ − ٢ س^{٤} + س^{٨}) ء س

= س − $\frac{٢}{٥}$ س^{٥} + $\frac{١}{٩}$ س^{٩} + ث

⑦ ∫ (س + $\frac{١}{س}$)^{٢} ء س

= ∫ (س^{٢} + ٢ + $\frac{١}{س^{٢}}$) ء س

= $\frac{١}{٣}$ س^{٣} + ٢ س − س$^{-١}$ + ث

⑧ $\int \sqrt{\text{س}}\left(\text{س} + \sqrt{\text{س}}\right)\,\text{ءس}$

$= \frac{2}{5}\text{س}^{\frac{5}{2}} + \frac{1}{2}\text{س}^{2} + \text{ث}$

⑨ $\int \left(\frac{1}{\text{ع}^{2}} + 2\text{ع}^{2}\right)^{2}\text{ءع}$

$= \int \left(\frac{1}{\text{ع}^{4}} + 4 + 4\text{ع}^{4}\right)\text{ءع}$

$= -\frac{1}{3}\text{ع}^{-3} + 4\text{ع} + \frac{4}{5}\text{ع}^{5} + \text{ث}$

⑩ $\int \sqrt{\text{س}}\left(\text{س}\sqrt{\text{س}} + 2\sqrt{\text{س}} - \frac{1}{\sqrt{\text{س}}}\right)\text{ءس}$

$= \int (\text{س}^{2} + 2\text{س} - 1)\,\text{ءس}$

$= \frac{1}{3}\text{س}^{3} + \text{س}^{2} - \text{س} + \text{ث}$

5

① $\int \frac{3\text{س}^{2} - 4\text{س}}{\text{س}}\,\text{ءس}$

$= \int (3\text{س} - 4)\,\text{ءس}$

$= \frac{3}{2}\text{س}^{2} - 4\text{س} + \text{ث}$

② $\int \frac{\text{س}^{5} - 3\text{س}^{3} + 2}{\text{س}^{2}}\,\text{ءس}$

$= \int (\text{س}^{3} - 3\text{س} + 2\text{س}^{-2})\,\text{ءس}$

$= \frac{1}{4}\text{س}^{4} - \frac{3}{2}\text{س}^{2} - 2\text{س}^{-1} + \text{ث}$

③ $\int \frac{\text{س}^{7} + 5\text{س}^{6} - \text{س}^{3}}{\text{س}^{3}}\,\text{ءس}$

$= \int (\text{س}^{4} + 5\text{س}^{3} - 1)\,\text{ءس}$

$= \frac{1}{5}\text{س}^{5} + \frac{5}{4}\text{س}^{4} - \text{س} + \text{ث}$

④ $\int \frac{4\text{س}^{2} - 9}{2\text{س} - 3}\,\text{ءس}$

$= \int \frac{(2\text{س} - 3)(2\text{س} + 3)}{(2\text{س} - 3)}\,\text{ءس}$

$= \int (2\text{س} + 3)\,\text{ءس}$

$= \text{س}^{2} + 3\text{س} + \text{ث}$

⑤ $\int \frac{\text{س}^{2} - 5\text{س} + 6}{\text{س} - 2}\,\text{ءس}$

$= \int \frac{(\text{س} - 2)(\text{س} - 3)}{\text{س} - 2}\,\text{ءس}$

$= \int (\text{س} - 3)\,\text{ءس} = \frac{1}{2}\text{س}^{2} - 3\text{س} + \text{ث}$

⑥ $\int \frac{\text{س}^{2} - 2\text{س} - 8}{\text{س} + 2}\,\text{ءس}$

$= \int \frac{(\text{س} + 2)(\text{س} - 4)}{(\text{س} + 2)}\,\text{ءس}$

$= \int (\text{س} - 4)\,\text{ءس}$

$= \frac{1}{2}\text{س}^{2} - 4\text{س} + \text{ث}$

⑦ $\int \frac{\text{س}^{3} - 27}{\text{س} - 3}\,\text{ءس}$

$= \int \frac{(\text{س} - 3)(\text{س}^{2} + 3\text{س} + 9)}{\text{س} - 3}\,\text{ءس}$

$= \int (\text{س}^{2} + 3\text{س} + 9)\,\text{ءس}$

$= \frac{1}{3}\text{س}^{3} + \frac{3}{2}\text{س}^{2} + 9\text{س} + \text{ث}$

⑧ $\int \frac{\text{س}^{3} + 1}{\text{س} + 1}\,\text{ءس}$

$= \int \frac{(\text{س} + 1)(\text{س}^{2} - \text{س} + 1)}{(\text{س} + 1)}\,\text{ءس}$

$= \int (\text{س}^{2} - \text{س} + 1)\,\text{ءس}$

$= \frac{1}{3}\text{س}^{3} - \frac{1}{2}\text{س}^{2} + \text{س} + \text{ث}$

⑨ $\int \frac{4\text{س}^{3} - 12\text{س}^{2}}{\text{س} - 3}\,\text{ءس}$

$= \int \frac{4\text{س}^{2}(\text{س} - 3)}{\text{س} - 3}\,\text{ءس}$

$= \int 4\text{س}^{2}\,\text{ءس} = \frac{4}{3}\text{س}^{3} + \text{ث}$

⑩ $\int \frac{(\text{س} + 1)^{2}}{\sqrt{\text{س}}}\,\text{ءس}$

$= \int \frac{\text{س}^{2} + 2\text{س} + 1}{\sqrt{\text{س}}}\,\text{ءس}$

$= \int \left(\text{س}^{\frac{3}{2}} + 2\text{س}^{\frac{1}{2}} + \text{س}^{-\frac{1}{2}}\right)\text{ءس}$

$= \frac{2}{5}\text{س}^{\frac{5}{2}} + \frac{4}{3}\text{س}^{\frac{3}{2}} + 2\text{س}^{\frac{1}{2}} + \text{ث}$

⑪ $\int \frac{(\text{س}^{2} + 2)^{2}}{\text{س}^{2}}\,\text{ءس}$

$= \int \frac{\text{س}^{4} + 4\text{س}^{2} + 4}{\text{س}^{2}}\,\text{ءس}$

$= \int (\text{س}^{2} + 4 + 4\text{س}^{-2})\,\text{ءس}$

$= \frac{1}{3}\text{س}^{3} + 4\text{س} - 4\text{س}^{-1} + \text{ث}$

6

① $\int (\text{س} - 7)^{9}\,\text{ءس} = \frac{1}{10}(\text{س} - 7)^{10} + \text{ث}$

② $\int 6(\text{س} - 2)^{5}\,\text{ءس} = (\text{س} - 2)^{6} + \text{ث}$

③ $\int 3(3\text{س} + 1)^{3}\,\text{ءس} = \frac{(3\text{س} + 1)^{4}}{4} + \text{ث}$

④ $\int (2\text{س} - 3)^{5}\,\text{ءس} = \frac{(2\text{س} - 3)^{6}}{6 \times 2} + \text{ث}$

$= \frac{1}{12}(2\text{س} - 3)^{6} + \text{ث}$

⑤ $\int 7(2\text{س} - 7)^{6}\,\text{ءس}$

$= \frac{7(2\text{س} - 7)^{7}}{2 \times 7} + \text{ث} = \frac{1}{2}(2\text{س} - 7)^{7} + \text{ث}$

⑥ $\int (2\text{س} - 3)^{\frac{7}{3}}\,\text{ءس}$

$= \frac{(2\text{س} - 3)^{\frac{10}{3}}}{2 \times \frac{10}{3}} + \text{ث}$

$= \frac{3}{20}(2\text{س} - 3)^{\frac{10}{3}} + \text{ث}$

⑦ $\int (2\text{س} - 7)^{-3}\,\text{ءس}$

$= \frac{(2\text{س} - 7)^{-2}}{2 \times -2} + \text{ث}$

$= -\frac{1}{4}(2\text{س} - 7)^{-2} + \text{ث}$

⑧ $\int (3\text{س} + 5)^{-9}\,\text{ءس}$

$= \frac{(3\text{س} + 5)^{-8}}{-8 \times 3} + \text{ث}$

$= -\frac{1}{24}(3\text{س} + 5)^{-8} + \text{ث}$

⑨ $\int \left((3 - 2\text{س})^{5} + 3\right)\text{ءس}$

$= \frac{(3 - 2\text{س})^{6}}{6 \times -2} + 3\text{س} + \text{ث}$

$= -\frac{1}{12}(3 - 2\text{س})^{6} + 3\text{س} + \text{ث}$

⑩ $\int \frac{15}{(3\text{س} - 5)^{6}}\,\text{ءس}$

$= \int 15(3\text{س} - 5)^{-6}\,\text{ءس}$

$= \frac{15(3\text{س} - 5)^{-5}}{-5 \times 3} + \text{ث}$

$= -(3\text{س} - 5)^{-5} + \text{ث}$

⑪ $\int (2\text{س} + 7)^{\frac{1}{2}}\,\text{ءس}$

$= \frac{(2\text{س} + 7)^{\frac{3}{2}}}{2 \times \frac{3}{2}} + \text{ث} = \frac{1}{3}(2\text{س} + 7)^{\frac{3}{2}} + \text{ث}$

⑫ $\int \sqrt{(4 - 3\text{س})^{3}}\,\text{ءس}$

$= \int (4 - 3\text{س})^{\frac{3}{2}}\,\text{ءس}$

$= \frac{(4 - 3\text{س})^{\frac{5}{2}}}{\frac{5}{2} \times -3} + \text{ث}$

$= -\frac{2}{15} \times (4 - 3\text{س})^{\frac{5}{2}} + \text{ث}$

⑬ $\int 15(3\text{س} - 2)^{\frac{5}{2}}\,\text{ءس}$

$= \frac{15(3\text{س} - 2)^{\frac{7}{2}}}{\frac{7}{2} \times 3} + \text{ث}$

$= \frac{10}{7}(3\text{س} - 2)^{\frac{7}{2}} + \text{ث}$

⑭ $\int \frac{7}{\sqrt{3\text{س} - 4}}\,\text{ءس} = \int 7(3\text{س} - 4)^{-\frac{1}{2}}\,\text{ءس}$

$= \frac{7(3\text{س} - 4)^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2} \times 3} + \text{ث}$

$= \frac{14}{3}(3\text{س} - 4)^{\frac{1}{2}} + \text{ث}$

⑮ $\int \frac{\text{ءس}}{\sqrt[5]{2\text{س} + 9}} = \int (2\text{س} + 9)^{-\frac{1}{5}}\,\text{ءس}$

$= \frac{(2\text{س} + 9)^{\frac{4}{5}}}{\frac{4}{5} \times 2} + \text{ث}$

$= \frac{5}{8} \times (2\text{س} + 9)^{\frac{4}{5}} + \text{ث}$

٧

① $\int \text{س}^{٦} \left(١ - \frac{٢}{\text{س}}\right)^{٦} \text{ء س}$

$= \int (\text{س} - ٢)^{٦} \text{ء س}$

$= \frac{١}{٧} (\text{س} - ٢)^{٧} + \text{ث}$

② $\int \text{س} \sqrt[٣]{\frac{٢}{\text{س}^{٢}} - \frac{١}{\text{س}^{٣}}} \text{ء س}$

$= \int (٢\text{س} - ١)^{\frac{١}{٣}} \text{ء س}$

$= \int (٢\text{س} - ١)^{\frac{١}{٣}} \text{ء س}$

$= \frac{(٢\text{س} - ١)^{\frac{٤}{٣}}}{\frac{٤}{٣} \times ١} + \text{ث} = \frac{٣}{٤}(٢\text{س} - ١)^{\frac{٤}{٣}} + \text{ث}$

③ $\int (٤\text{س}^{٢} + ٤\text{س} + ١)^{٥} \text{ء س}$

$= \int \left[(٢\text{س} + ١)^{٢}\right]^{٥} \text{ء س}$

$= \int (٢\text{س} + ١)^{١٠} \text{ء س}$

$= \frac{(٢\text{س} + ١)^{١١}}{١١ \times ٢} + \text{ث}$

$= \frac{١}{٢٢} (٢\text{س} + ١)^{١١} + \text{ث}$

④ $\int \sqrt{\text{س} - ٣} \, (\text{س} - ٣)^{٤} \text{ء س}$

$= \int (\text{س} - ٣)^{\frac{١}{٢}} (\text{س} - ٣)^{٤} \text{ء س}$

$= \int (\text{س} - ٣)^{\frac{٩}{٢}} \text{ء س}$

$= \frac{٢}{١١} (\text{س} - ٣)^{\frac{١١}{٢}} + \text{ث}$

⑤ $\int \frac{(٤\text{س}^{٢} - ٤\text{س} + ١)^{٧}}{(٢\text{س} - ١)^{٢}} \text{ء س}$

$= \int \frac{\left[(٢\text{س} - ١)^{٢}\right]^{٧}}{(٢\text{س} - ١)^{٢}} \text{ء س}$

$= \int (٢\text{س} - ١)^{١٢} \text{ء س}$

$= \frac{(٢\text{س} - ١)^{١٣}}{١٣ \times ٢} + \text{ث}$

$= \frac{١}{٢٦} (٢\text{س} - ١)^{١٣} + \text{ث}$

إجابات الوحدة الرابعة

إجابات تمارين 14

أولا أسئلة الاختيار من متعدد

① (د)	② (ب)	③ (د)	④ (جـ)	⑤ (د)
⑥ (د)	⑦ (جـ)	⑧ (أ)	⑨ (ب)	⑩ (د)
⑪ (جـ)	⑫ (د)	⑬ (جـ)	⑭ (أ)	⑮ (د)
⑯ (أ)	⑰ (ب)	⑱ (د)	⑲ (د)	⑳ (ب)
㉑ (جـ)	㉒ (د)	㉓ (ب)	㉔ (أ)	㉕ (ب)

ثانيا الأسئلة المقالية

1

① ف = {(ص، ص، ص)، (ص، ص، ك)، (ص، ك، ص)، (ص، ك، ك)، (ك، ص، ص)، (ك، ص، ك)، (ك، ك، ص)، (ك، ك، ك)}
، ن(ف) = ٨

② ف = {٢١، ١٢، ٣١، ١٣، ٤١، ١٤، ٣٢، ٢٣، ٤٢، ٢٤، ٤٣، ٣٤}
، ن(ف) = ١٢

③ ف = {١٠، ١١، ١٢، ٢٠، ٢١، ٢٢}
، ن(ف) = ٦

④ نرمز للكرة الحمراء بالرمز ح، والبيضاء ب، والسوداء س، والصفراء ص

أولًا: ف = {(ح، ح)، (ح، ب)، (ح، س)، (ح، ص)، (ب، ح)، (ب، ب)، (ب، س)، (ب، ص)، (س، ح)، (س، ب)، (س، س)، (س، ص)، (ص، ح)، (ص، ب)، (ص، س)، (ص، ص)}
، ن(ف) = ١٦

ثانيًا: ف = {(ح، ب)، (ح، س)، (ح، ص)، (ب، ح)، (ب، س)، (ب، ص)، (س، ح)، (س، ب)، (س، ص)، (ص، ح)، (ص، ب)، (ص، س)}
، ن(ف) = ١٢

⑤ ف = {(١، ص)، (١، ك)، (٢، ص)، (٢، ك)، (٣، ص)، (٣، ك)، (٤، ص)، (٤، ك)، (٥، ص)، (٥، ك)، (٦، ص، ص)، (٦، ص، ك)، (٦، ك، ص)، (٦، ك، ك)}
، ن(ف) = ١٤

⑥ ف = {(ص، ١)، (ص، ٢)، (ص، ٣)، (ك، ١)، (ك، ٢)، (ك، ٣)}
، ن(ف) = ٦

⑦ ف = {٠، ١، ٢، ٣}، ن(ف) = ٤

2

ف = {١، ٢، ٣، ٤، ٥، ٦}

① أ = {٤} «حدث بسيط»

② ب = {١، ٢، ٣، ٤، ٦}

③ حـ = {٤، ٥، ٦}

④ ء = {١، ٢، ٣، ٤، ٥، ٦} «حدث مؤكد»

⑤ هـ = ∅ «حدث مستحيل»

⑥ و = {٢، ٣، ٥}   ⑦ ك = {٣، ٥}

⑧ ل = {٢، ٣، ٤، ٥، ٦}

⑨ م = {٢، ٣، ٥، ٦}

⑩ س = {٥} «حدث بسيط»

⑪ ص = {١، ٢، ٣، ٤}

3

① أ = {١٢، ١٤، ١٦، ١٨، ٢٠}

② ب = {١، ٢، ٣، ٤، ٦، ١٢}

③ حـ = {٣، ٩، ١٥}

④ ء = {١٠، ٢٠}

⑤ هـ = {٢، ٣، ٥، ٧، ١١، ١٣، ١٧، ١٩}

⑥ و = {١، ٢، ٣، ٤}

4

ف = {١، ٢، ٣، ٤، ٥، ٦}

① أ = {١، ٣، ٥}   ② ب = {٢، ٣، ٥}

③ أ ∩ ب = {٣، ٥}

④ أ ∪ ب = {١، ٢، ٣، ٥}

⑤ أَ = {٢، ٤، ٦}

⑥ أ − ب = {١}   ⑦ ب − أ = {٢}

⑧ (أ − ب) ∪ (ب − أ) = {١، ٢}

⑨ (أ ∩ ب)َ = {١، ٢، ٤، ٦}

5

ف = {(ص، ص)، (ص، ك)، (ك، ص)، (ك، ك)}

① أ = {(ك، ص)، (ك، ك)}

② ب = {(ك، ص)، (ص، ك)}

③ حـ = {(ص، ص)، (ص، ك)، (ك، ص)، (ك، ك)}

④ ء = {(ك، ك)}

⑤ هـ = {(ص، ص)، (ك، ك)}

⑥ و = {(ص، ك)، (ك، ص)}

⑦ ن = {(ص، ك)، (ك، ص)}

⑧ ع = {(ص، ك)، (ك، ص)، (ص، ص)}

⑨ ط = {(ك، ك)، (ص، ك)، (ك، ص)}

6

ف = {ص، (ك، ص)، (ك، ك، ص)، (ك، ك، ك)}

① أ = ف

② ب = {ص، (ك، ص)، (ك، ك، ص)}

③ حـ = {(ك، ك، ص)، (ك، ك، ك)}

④ ء = ∅

7

رقم الآحاد   رقم العشرات

١ ← ٢، ٣، ٤

٢ ← ١، ٣، ٤

٣ ← ١، ٢، ٤

٤ ← ١، ٢، ٣

ف = {٢١، ٣١، ٤١، ١٢، ٣٢، ٤٢، ١٣، ٢٣، ٤٣، ١٤، ٢٤، ٣٤}

① أ = {٢١، ٣١، ٤١، ١٣، ٢٣، ٤٣}

② ب = {٣١، ٣٢، ٣٤، ١٢، ١٣، ١٤}

③ حـ = أ ∩ ب = {٣١، ١٣}

④ ء = أ ∪ ب = {٢١، ٣١، ٤١، ١٣، ٢٣، ٤٣، ٣٢، ٣٤، ١٢، ١٤}

⑤ هـ = {١٢، ٢٤}

٨

ف = {(ع ، ع ، ع) ، (ع ، ع ، ب)
، (ع ، ب ، ع) ، (ع ، ب ، ب)
، (ب ، ع ، ع) ، (ب ، ع ، ب)
، (ب ، ب ، ع) ، (ب ، ب ، ب)}

① أ = {(ع ، ع ، ع) ، (ع ، ع ، ب)
، (ع ، ب ، ع) ، (ب ، ع ، ع)}

② ب = {(ع ، ع ، ع) ، (ع ، ع ، ب)
، (ع ، ب ، ع) ، (ع ، ب ، ب)
، (ب ، ع ، ع) ، (ب ، ع ، ب)
، (ب ، ب ، ع)}

③ حـ = {(ع ، ع ، ب) ، (ع ، ب ، ع)
، (ع ، ب ، ب) ، (ب ، ع ، ع)
، (ب ، ع ، ب) ، (ب ، ب ، ع)}

④ أ ∩ ب = {(ع ، ع ، ع) ، (ع ، ع ، ب)
، (ع ، ب ، ع) ، (ب ، ع ، ع)}

⑤ ب ∩ حـ = {(ع ، ع ، ب) ، (ع ، ب ، ع)
، (ع ، ب ، ب) ، (ب ، ع ، ع)
، (ب ، ع ، ب) ، (ب ، ب ، ع)}

⑥ حـ − أ = {(ع ، ب ، ب) ، (ب ، ع ، ب)
، (ب ، ب ، ع)}

٩

ن(ف) = ٨^{٢} = ٦٤

① أ = {(١ ، ٣) ، (٢ ، ٦)}

② ب = {(٦ ، ٨) ، (٧ ، ٧) ، (٧ ، ٨) ، (٨ ، ٦)
، (٨ ، ٧) ، (٨ ، ٨)}

∵ أ ∩ ب = ∅

∴ أ ، ب متنافيان

١٠

الرمية الثانية

الرمية الأولى

لاحظ أن: حـ = أ ∪ ب

١١

الرمية الثانية

الرمية الأولى

لاحظ أن: حـ = أ ∪ ب

ء = ∅ «حدث مستحيل»

١٢

① أ$_{١}$ = {(٤ ، ١) ، (٥ ، ٢) ، (٦ ، ٣) ، (٣ ، ٦)
، (٢ ، ٥) ، (١ ، ٤)}

② أ$_{٢}$ = {(٤ ، ٦) ، (٥ ، ٥) ، (٥ ، ٦)
، (٦ ، ٤) ، (٦ ، ٥) ، (٦ ، ٦)}

③ أ$_{٣}$ = {(٤ ، ٤) ، (٤ ، ٥) ، (٤ ، ٦)
، (٥ ، ٤) ، (٦ ، ٤)}

④ أ$_{٢}$ ∩ أ$'_{٣}$ = أ$_{٢}$ − أ$_{٣}$ = {(٥ ، ٥) ، (٥ ، ٦)
، (٦ ، ٥) ، (٦ ، ٦)}

⑤ أ$_{٣}$ ∩ أ$'_{٢}$ = أ$_{٣}$ − أ$_{٢}$ = {(٤ ، ٤) ، (٤ ، ٥)
، (٥ ، ٤)}

⑥ أ$_{٤}$ = {(١ ، ١) ، (١ ، ٢) ، (١ ، ٣) ، (٢ ، ١)
، (٢ ، ٢) ، (٢ ، ٣) ، (٣ ، ١)
، (٣ ، ٢) ، (٣ ، ٣)}

⑦ أ$_{٥}$ = {(٥ ، ١) ، (٥ ، ٢) ، (٥ ، ٣) ، (٥ ، ٤)
، (٥ ، ٥) ، (٥ ، ٦) ، (٦ ، ١)
، (٦ ، ٢) ، (٦ ، ٣) ، (٦ ، ٤)
، (٦ ، ٥) ، (٦ ، ٦) ، (١ ، ٥)
، (٢ ، ٥) ، (٣ ، ٥) ، (٤ ، ٥) ، (١ ، ٦)
، (٢ ، ٦) ، (٣ ، ٦) ، (٤ ، ٦)}

والشكل يوضح أ$_{٤}$ ، أ$_{٥}$

الحجر الثاني

الحجر الأول

١٣

النقود

النرد

① أ = {(ك ، ٢) ، (ك ، ٤) ، (ك ، ٦)}

② ب = {(ص ، ١) ، (ص ، ٣) ، (ص ، ٥)}

③ حـ = أ ∩ ب = ∅

④ ء = أ − ب = {(ك ، ٢) ، (ك ، ٤) ، (ك ، ٦)}

⑤ هـ = أ' ∪ ب' = (أ ∩ ب)' = ∅' = ف

١٤

ف = {(ص ، ص) ، (ص ، ك)
، (ك ، ١) ، (ك ، ٢)
، (ك ، ٣) ، (ك ، ٤)
، (ك ، ٥) ، (ك ، ٦)}

① أ = {(ك ، ٢) ، (ك ، ٤) ، (ك ، ٦)}

② ب = {(ص ، ص) ، (ص ، ك)}

③ حـ = {(ك ، ٢) ، (ك ، ٣) ، (ك ، ٥)}

إجابات تمارين 15

أولاً أسئلة الاختيار من متعدد

① (د)	② (د)	③ (د)	④ (أ)	⑤ (جـ)
⑥ (د)	⑦ (جـ)	⑧ (د)	⑨ (د)	⑩ (ب)
⑪ (جـ)	⑫ (جـ)	⑬ (ب)	⑭ (د)	⑮ (أ)
⑯ (د)	⑰ (جـ)	⑱ (ب)	⑲ (أ)	⑳ (ب)
㉑ (ب)	㉒ (د)	㉓ (جـ)	㉔ (ب)	㉕ (جـ)
㉖ (د)	㉗ (ب)	㉘ (جـ)	㉙ (جـ)	㉚ (ب)
㉛ (جـ)	㉜ (د)	㉝ (أ)	㉞ (أ)	㉟ (جـ)
㊱ (د)	㊲ (ب)	㊳ (د)	㊴ (أ)	㊵ (أ)
㊶ (جـ)	㊷ (جـ)	㊸ (د)	㊹ (أ)	㊺ (أ)
㊻ (جـ)	㊼ (جـ)	㊽ (د)	㊾ (ب)	㊿ (ب)
(٥١) (ب)	(٥٢) (أ)	(٥٣) (د)	(٥٤) (د)	(٥٥) (جـ)
(٥٦) (د)	(٥٧) (أ)	(٥٨) (أ)	(٥٩) (أ)	(٦٠) (جـ)
(٦١) (د)	(٦٢) (ب)	(٦٣) (د)	(٦٤) (د)	(٦٥) (جـ)
(٦٦) (د)	(٦٧) (ب)	(٦٨) (جـ)	(٦٩) (جـ)	(٧٠) (ب)
(٧١) (ب)				

ثانياً الأسئلة المقالية

١

① ل(أ') = ١ − ل(أ) = ١ − ٠,٣ = ٠,٧

② ل(أ ∪ ب) = ل(أ) + ل(ب) − ل(أ ∩ ب)
= ٠,٣ + ٠,٨ − ٠,٢ = ٠,٩

③ ل(أ − ب) = ل(أ) − ل(أ ∩ ب)
= ٠,٣ − ٠,٢ = ٠,١

④ ل(أ′ ∪ ب′) = ل(أ ∩ ب)′ = ١ − ل(أ ∩ ب)
= ١ − ٠,٢ = ٠,٨

٢

ل(أ ∪ ب) = ٠,٤٥ × $\frac{٥}{٣}$ = ٠,٧٥

، ∵ ل(أ′) = ٠,٤٥ ∴ ل(أ) = ٠,٥٥

① ل(أ ∩ ب) = ٠

∴ ل(أ ∪ ب) = ل(أ) + ل(ب)

∴ ل(ب) = ٠,٧٥ − ٠,٥٥ = ٠,٢

② ل(ب) = ل(أ ∪ ب) = ٠,٧٥

③ ∵ ل(أ − ب) = ل(أ) − ل(أ ∩ ب) = ٠,٢

∴ ل(أ ∩ ب) = ٠,٥٥ − ٠,٢ = ٠,٣٥

، ∵ ل(أ ∪ ب) = ل(أ) + ل(ب) − ل(أ ∩ ب)

∴ ٠,٧٥ = ٠,٥٥ + ل(ب) − ٠,٣٥

∴ ل(ب) = ٠,٥٥

٣

① ل(أ ∪ جـ) = ل(أ) + ل(جـ)
= ٠,١٢ + ٠,٣٢ = ٠,٤٤

② ل(أ − جـ) = ل(أ) = ٠,١٢

③ ل(أ ∩ ب) = صفر

④ ل(جـ ∩ ب)′ = ١ − ل(جـ ∩ ب) = ١ − صفر = ١

⑤ ل(أ ∪ ب ∪ جـ) = ل(أ) + ل(ب) + ل(جـ)
= ٠,١٢ + ٠,٢٨ + ٠,٣٢
= ٠,٧٢

⑥ ل(أ ∩ ب ∩ جـ) = صفر

⑦ ل(أ ∪ ب)′ = ١ − ل(أ ∪ ب)
= ١ − [ل(أ) + ل(ب)]
= ١ − (٠,١٢ + ٠,٢٨) = ٠,٦

٤

أولًا: ① ∵ أ ، ب حدثان متنافيان

∴ ل(أ ∪ ب) = ل(أ) + ل(ب)

∴ ١ − ل(أ ∪ ب)′ = ل(أ) + ل(ب)

∴ ١ − $\frac{١}{٣}$ = $\frac{١}{٢}$ + س

∴ س = $\frac{٢}{٣}$ − $\frac{١}{٢}$ = $\frac{١}{٦}$

② ∵ أ ⊂ ب

∴ ل(أ ∪ ب) = ل(ب)

∴ ١ − ل(أ ∪ ب)′ = ل(ب)

∴ ١ − $\frac{١}{٣}$ = س ∴ س = $\frac{٢}{٣}$

ثانيًا: ∵ ل(أ ∪ ب) = ل(أ) + ل(ب) − ل(أ ∩ ب)

∴ $\frac{٢}{٣}$ = $\frac{١}{٢}$ + $\frac{١}{٤}$ − ل(أ ∩ ب)

∴ ل(أ ∩ ب) = $\frac{٣}{٤}$ − $\frac{٢}{٣}$ = $\frac{١}{١٢}$

٥

∵ ل(أ ∪ ب) = ل(أ) + ل(ب) − ل(أ ∩ ب)
= ل(أ − ب) + ل(ب)
= ل(ب − أ) + ل(أ)

∴ ٠,٢٤ + ل(ب) = ٠,١٥ + ل(أ)

∴ ل(أ) − ل(ب) = ٠,٠٩

، ∵ ل(ب) = $\frac{٤}{٥}$ ل(أ) ∴ $\frac{١}{٥}$ل(أ) = ٠,٠٩

∴ ل(أ) = ٠,٤٥ ∴ ل(ب) = ٠,٣٦

، ل(أ ∪ ب) = ل(أ − ب) + ل(ب)
= ٠,٢٤ + ٠,٣٦ = ٠,٦

، ∵ ل(أ ∪ ب) = ل(أ) + ل(ب) − ل(أ ∩ ب)

∴ ٠,٦ = ٠,٤٥ + ٠,٣٦ − ل(أ ∩ ب)

∴ ل(أ ∩ ب) = ٠,٢١

∴ ل(أ′ ∪ ب′) = ل(أ ∩ ب)′ = ١ − ل(أ ∩ ب)
= ٠,٧٩

٦

∵ $\frac{١ − ل(أ)}{ل(أ)}$ = $\frac{٧}{٣}$ ∴ ل(أ) = $\frac{٣}{١٠}$

، ∵ ٢ ل(ب) = ٣ (١ − ل(ب)) ∴ ل(ب) = $\frac{٣}{٥}$

∴ ل(جـ) = ١ − ($\frac{٣}{١٠}$ + $\frac{٣}{٥}$) = $\frac{١}{١٠}$

∴ $\frac{ل(جـ′)}{ل(جـ)}$ = $\frac{١ − \frac{١}{١٠}}{\frac{١}{١٠}}$ = ٩

٧

∵ ل(أ) + ل(ب) = ١ − [$\frac{٧}{١٨}$ + $\frac{٧}{١٨}$] = $\frac{٢}{٩}$

∴ ٢ ل(ب) + ل(ب) = $\frac{٢}{٩}$

∴ ل(ب) = $\frac{١}{١٨}$ ∴ ل(أ) = $\frac{١}{٦}$

٨

① ل(ب) = ١ − ل(ب′) = ١ − ٠,٢٥ = ٠,٧٥

② ل(أ′) = ١ − ل(أ) = ١ − ٠,٦٥ = ٠,٣٥

③ ∵ ل(أ − ب) = ل(أ) − ل(أ ∩ ب)

∴ ٠,٠٥ = ٠,٦٥ − ل(أ ∩ ب)

∴ ل(أ ∩ ب) = ٠,٦

∴ احتمال وقوع ب فقط

= ل(ب − أ) = ل(ب) − ل(أ ∩ ب)

= ٠,٧٥ − ٠,٦ = ٠,١٥

④ احتمال وقوع أحدهما على الأكثر = ل(أ ∩ ب)′

= ١ − ل(أ ∩ ب) = ١ − ٠,٦ = ٠,٤

⑤ احتمال عدم وقوع أى من الحدثين

= ل(أ ∪ ب)′ = ١ − ل(أ ∪ ب)

= ١ − [ل(أ) + ل(ب) − ل(أ ∩ ب)]

= ١ − (٠,٦٥ + ٠,٧٥ − ٠,٦) = ٠,٢

⑥ احتمال عدم وقوع أ أو وقوع ب = ل(أ′ ∪ ب)

= ل(أ − ب)′ = ١ − ل(أ − ب)

= ١ − ٠,٠٥ = ٠,٩٥

⑦ ل(أ′ ∩ ب) = ل(ب − أ) = ٠,١٥

٩

∵ ١ − ل(أ) = $\frac{١}{٣}$ ل(أ) ∴ ل(أ) = $\frac{٣}{٤}$

∵ ل(أ′ ∪ ب′) = ١ − ل(أ ∩ ب) = $\frac{٥}{٨}$

∴ ل(أ ∩ ب) = $\frac{٣}{٨}$

① ل(أ ∪ ب) = ل(أ) + ل(ب) − ل(أ ∩ ب)
= $\frac{٣}{٤}$ + $\frac{١}{٢}$ − $\frac{٣}{٨}$ = $\frac{٧}{٨}$

② ل(أ ∩ ب)′ = ل(أ′ ∪ ب′) = $\frac{٥}{٨}$

③ ل(ب − أ) = ل(ب) − ل(أ ∩ ب)
= $\frac{١}{٢}$ − $\frac{٣}{٨}$ = $\frac{١}{٨}$

④ ل(أ ∪ ب) − ل(أ ∩ ب) = $\frac{٧}{٨}$ − $\frac{٣}{٨}$ = $\frac{١}{٢}$

١٠

① ل(أ ∩ ب) = ١ − ٠,٨ = ٠,٢

② ل(أ ∪ ب) = ٠,٥ + ٠,٦ − ٠,٢ = ٠,٩

③ ل(ب − أ) = ل(ب) − ل(أ ∩ ب)
= ٠,٦ − ٠,٢ = ٠,٤

١١

① ل(ح١) = ل(أ ∪ ب) = ل(أ) + ل(ب) − ل(أ ∩ ب)
= $\frac{٢}{٥}$ + $\frac{١}{٤}$ − $\frac{١}{١٠}$ = $\frac{١١}{٢٠}$

② ل(ح٢) = ل(ب − أ) = ل(ب) − ل(أ ∩ ب)
= $\frac{١}{٤}$ − $\frac{١}{١٠}$ = $\frac{٣}{٢٠}$

③ ل(ح٣) = ل(ح١′) = ١ − $\frac{١١}{٢٠}$ = $\frac{٩}{٢٠}$

④ ل(ح٤) = ل(أ ∩ ب)′ = ١ − ل(أ ∩ ب)
= ١ − $\frac{١}{١٠}$ = $\frac{٩}{١٠}$

⑤ ل($أ_٧$) = ل(أ ∪ ب) − ل(أ ∩ ب)

= $\frac{١١}{٢٠} - \frac{١}{١٠} = \frac{٩}{٢٠}$

١٢

بفرض أ حدث نجاح حسن في الرياضيات

، ب حدث نجاح حسن في الفيزياء

، ∵ ل(أ ∪ ب) = ٠,٨٨

∴ ل(أ ∪ ب) = ل(أ) + ل(ب) − ل(أ ∩ ب)

∴ ٠,٨٨ = ٠,٧٢ + ٠,٦٣ − ل(أ ∩ ب)

∴ ل(أ ∩ ب) = ٠,٤٧

① احتمال النجاح في كلا الاختبارين = ٠,٤٧

② احتمال النجاح في أحد الاختبارين على الأكثر

= ل($\overline{أ ∩ ب}$) = ١ − ل(أ ∩ ب) = ٠,٥٣

③ احتمال النجاح في أحد الاختبارين دون الآخر

= ل(أ ∪ ب) − ل(أ ∩ ب)

= ٠,٨٨ − ٠,٤٧ = ٠,٤١

④ احتمال الرسوب في كلا الاختبارين

= ل($\overline{أ ∪ ب}$) = ١ − ل(أ ∪ ب)

= ١ − ٠,٨٨ = ٠,١٢

١٣

بفرض أ يرمز للفوز في الذهاب ، ب للفوز في الإياب

معنى تصريح المدرب أن :

ل(أ ∪ ب) = ٠,٩ + ٠,٧ − ٠,٥ = ١,١

، ١,١ ∉ [٠ ، ١] لا يتفق مع مفهوم الاحتمال

١٤

① ∵ أ ، ب حدثان متنافيان

∴ ل(أ ∩ ب) = صفر

∴ ل(أ ∪ ب) = ل(أ) + ل(ب)

∴ ٦ س − ٠,٤ = س + ١ − ٤ س

∴ ٩ س = ١,٤ ∴ س = $\frac{٧}{٤٥}$

② ∵ أ ⊂ ب

∴ ل(أ ∪ ب) = ل(ب)

∴ ٦ س − ٠,٤ = ١ − ٤ س

∴ ١٠ س = ١,٤ ∴ س = ٠,١٤

③ ل(أ ∪ ب) = ل(أ) + ل(ب) − ل(أ ∩ ب)

∴ ٦ س − ٠,٤ = س + ١ − ٤ س − $\frac{٤}{٥}$ س

∴ ٩ $\frac{٤}{٥}$ س = ١,٤ ∴ س = $\frac{١}{٧}$

١٥

ف = {١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ ، ٥ ، ٦}

① ل(أ) = $\frac{١}{٦}$ ② ل(ب) = $\frac{٥}{٦}$

③ حـ = {٣ ، ٤ ، ٥ ، ٦} ∴ ل(حـ) = $\frac{٤}{٦} = \frac{٢}{٣}$

④ ء = {٥ ، ٦ ، ١ ، ٢} ∴ ل(ء) = $\frac{٤}{٦} = \frac{٢}{٣}$

⑤ هـ = ∅ ∴ ل(هـ) = صفر

⑥ و = {١ ، ٢ ، ٣ ، ٦} ∴ ل(و) = $\frac{٤}{٦} = \frac{٢}{٣}$

⑦ ن = {٣} ∴ ل(ن) = $\frac{١}{٦}$

١٦

(أ)

① أ = {٩ ، ١١ ، ١٣} ∴ ل(أ) = $\frac{٣}{٦} = \frac{١}{٢}$

② ب = {١١ ، ١٣} ∴ ل(ب) = $\frac{٢}{٦} = \frac{١}{٣}$

③ حـ = {٨ ، ١٠ ، ١٢} ∴ ل(حـ) = $\frac{٣}{٦} = \frac{١}{٢}$

④ ء = {١٣} ∴ ل(ء) = $\frac{١}{٦}$

⑤ هـ = {١٠ ، ١١ ، ١٢ ، ١٣}

∴ ل(هـ) = $\frac{٤}{٦} = \frac{٢}{٣}$

⑥ و = {٨ ، ٩} ∴ ل(و) = $\frac{٢}{٦} = \frac{١}{٣}$

(ب) ل(أ ∪ حـ)

= ل({٩ ، ١١ ، ١٣ ، ٨ ، ١٠ ، ١٢}) = ١

، ل(هـ ∪ و) = ١

، ل(ب ∩ ء) = ل({١٣}) = $\frac{١}{٦}$

١٧

① أ = {٣ ، ٦ ، ٩ ، ١٢ ، ١٥ ، ١٨ ، ٢١ ، ٢٤ ، ٢٧ ، ٣٠}

∴ ل(أ) = $\frac{١٠}{٣٠} = \frac{١}{٣}$

② ب = {٥ ، ١٠ ، ١٥ ، ٢٠ ، ٢٥ ، ٣٠}

∴ ل(ب) = $\frac{٦}{٣٠} = \frac{١}{٥}$

③ حـ = أ ∩ ب = {١٥ ، ٣٠}

∴ ل(حـ) = $\frac{٢}{٣٠} = \frac{١}{١٥}$

④ ء = أ ∪ ب

∴ ل(ء) = ل(أ ∪ ب)

= ل(أ) + ل(ب) − ل(أ ∩ ب)

= $\frac{١}{٣} + \frac{١}{٥} - \frac{١}{١٥} = \frac{٧}{١٥}$

⑤ هـ = {٦ ، ١٢ ، ١٨ ، ٢٤ ، ٣٠}

∴ ل(هـ) = $\frac{٥}{٣٠} = \frac{١}{٦}$

⑥ و = {١ ، ٢٧} ∴ ل(و) = $\frac{٢}{٣٠} = \frac{١}{١٥}$

⑦ ن = {٢ ، ٣ ، ٥ ، ٧ ، ١١ ، ١٣}

∴ ل(ن) = $\frac{٦}{٣٠} = \frac{١}{٥}$

⑧ ع = {٢ ، ٣ ، ١٢ ، ١٣ ، ٢٠ ، ٢١ ، ٢٢ ، ٢٣ ، ٢٤ ، ٢٥ ، ٢٦ ، ٢٧ ، ٢٨ ، ٢٩ ، ٣٠}

∴ ل(ع) = $\frac{١٥}{٣٠} = \frac{١}{٢}$

١٨

① ل($أ_١$) = $\frac{١٥ + ٢٥}{٥٠} = \frac{٤٠}{٥٠}$ = ٠,٨

② ل($أ_٢$) = $\frac{٧}{٥٠}$ = ٠,١٤

③ ل($أ_٣$) = $\frac{\text{٨ بيضاء + ٨ حمراء + ٨ زرقاء}}{٥٠}$

= $\frac{٢٤}{٥٠}$ = ٠,٤٨

④ ل($أ_٤$) = $\frac{\text{١٢ بيضاء + ١٢ حمراء + ١٠ زرقاء}}{٥٠}$

= $\frac{٣٤}{٥٠}$ = ٠,٦٨

⑤ ل($أ_٥$) = $\frac{\text{١٢ بيضاء + ٢ حمراء}}{٥٠} = \frac{١٤}{٥٠}$ = ٠,٢٨

⑥ ل($أ_٦$) = $\frac{\text{١٥ بيضاء + ١٠ حمراء + ٥ زرقاء}}{٥٠}$

= $\frac{٣٠}{٥٠}$ = ٠,٦

١٩

ف = {(س ، س ، س) ، (س ، س ، ع)

، (س ، ع ، س) ، (س ، ع ، ع)

، (ع ، س ، س) ، (ع ، س ، ع)

، (ع ، ع ، س) ، (ع ، ع ، ع)}

① ل(أ) = $\frac{٧}{٨}$ ② ل(ب) = $\frac{٦}{٨} = \frac{٣}{٤}$

③ ل(حـ) = $\frac{٤}{٨} = \frac{١}{٢}$ ④ ل(ء) = $\frac{٢}{٨} = \frac{١}{٤}$

٢٠

ف = {(ص ، ص ، ص) ، (ص ، ص ، ك)

، (ص ، ك ، ص) ، (ص ، ك ، ك)

، (ك ، ص ، ص) ، (ك ، ص ، ك)

، (ك ، ك ، ص) ، (ك ، ك ، ك)}

① أ = {(ص ، ص ، ص) ، (ص ، ص ، ك)

، (ص ، ك ، ص) ، (ك ، ص ، ص)}

∴ ل(أ) = $\frac{٤}{٨} = \frac{١}{٢}$

② ب = {(ص ، ص ، ك) ، (ص ، ك ، ص)

، (ك ، ص ، ص)}

∴ ل(ب) = $\frac{٣}{٨}$

③ حـ = {(ص ، ك ، ك) ، (ك ، ص ، ك)

، (ك ، ك ، ص)}

∴ ل(حـ) = $\frac{٣}{٨}$

④ ء = {(ص ، ك ، ص) ، (ص ، ك ، ك)}

∴ ل(ء) = $\frac{٢}{٨} = \frac{١}{٤}$

⑤ هـ = {(ص ، ص ، ص) ، (ص ، ص ، ك)

، (ك ، ص ، ص)}

∴ ل(هـ) = $\frac{٣}{٨}$

⑥ و = {(ص ، ص ، ص) ، (ص ، ك ، ك) ، (ك ، ص ، ك) ، (ك ، ك ، ص)}

∴ ل (و) = $\frac{٤}{٨}$ = $\frac{١}{٢}$

⑦ ن = {(ص ، ص ، ص)}َ ∴ ل (ن) = $\frac{٧}{٨}$

٢١

أ = {(ص ، ٢) ، (ص ، ٣) ، (ص ، ٥)}

، ب = {(ص ، ٢) ، (ص ، ٤) ، (ص ، ٦) ، (ك ، ٢) ، (ك ، ٤) ، (ك ، ٦)}

∴ ل (أ) = $\frac{٣}{١٢}$ = $\frac{١}{٤}$ ، ل (ب) = $\frac{١}{٢}$

، ∵ أ ∩ ب = {(ص ، ٢)} ∴ ل (أ ∩ ب) = $\frac{١}{١٢}$

① ل (أ ∪ ب) = ل (أ) + ل (ب) − ل (أ ∩ ب)

= $\frac{١}{٤}$ + $\frac{١}{٢}$ − $\frac{١}{١٢}$ = $\frac{٢}{٣}$

② ل (أ ∩ ب) = $\frac{١}{١٢}$

③ ل (ب − أ) = ل (ب) − ل (أ ∩ ب) = $\frac{١}{٢}$ − $\frac{١}{١٢}$ = $\frac{٥}{١٢}$

④ ل (أ ∪ ب) − ل (أ ∩ ب) = $\frac{٢}{٣}$ − $\frac{١}{١٢}$ = $\frac{٧}{١٢}$

٢٢

ف = {(٢ ، ٢) ، (٢ ، ٤) ، (٢ ، ٦) ، (٤ ، ٢) ، (٤ ، ٤) ، (٤ ، ٦) ، (٦ ، ٢) ، (٦ ، ٤) ، (٦ ، ٦)}

، أ = {(٢ ، ٢) ، (٢ ، ٤) ، (٢ ، ٦)}

، ب = {(٢ ، ٤) ، (٤ ، ٢) ، (٤ ، ٦) ، (٦ ، ٤)}

① أ ∩ ب = {(٢ ، ٤)}

∴ ل (أ ∩ ب) = $\frac{١}{٩}$

② أ ∪ ب = {(٢ ، ٢) ، (٢ ، ٤) ، (٢ ، ٦) ، (٤ ، ٢) ، (٤ ، ٦) ، (٦ ، ٤)}

∴ ل (أ ∪ ب) = $\frac{٦}{٩}$ = $\frac{٢}{٣}$

③ ل (أَ ∩ بَ) = ل (أ ∪ ب)َ = ١ − ل (أ ∪ ب)

= ١ − $\frac{٢}{٣}$ = $\frac{١}{٣}$

٢٣

① أ = {(٤ ، ١) ، (٤ ، ٢) ، (٤ ، ٣) ، (٤ ، ٤) ، (٤ ، ٥) ، (٤ ، ٦)}

∴ ل (أ) = $\frac{١}{٦}$

② ب = {(٢ ، ٦) ، (٦ ، ٢) ، (٣ ، ٥) ، (٥ ، ٣) ، (٤ ، ٤)}

∴ ل (ب) = $\frac{٥}{٣٦}$

③ حـ = {(١ ، ٤) ، (٤ ، ١) ، (٣ ، ٢) ، (٢ ، ٣) ، (٣ ، ١) ، (١ ، ٣) ، (٢ ، ٢) ، (٢ ، ١) ، (١ ، ٢) ، (١ ، ١)}

∴ ل (حـ) = $\frac{١٠}{٣٦}$ = $\frac{٥}{١٨}$

④ ء = {(١ ، ٥) ، (٥ ، ١) ، (٢ ، ٤) ، (٤ ، ٢) ، (٣ ، ٣) ، (٦ ، ٦)}

∴ ل (ء) = $\frac{١}{٦}$

⑤ هـ = {(١ ، ٣) ، (٣ ، ١) ، (٢ ، ٤) ، (٤ ، ٢) ، (٣ ، ٥) ، (٥ ، ٣) ، (٤ ، ٦) ، (٦ ، ٤) ، (١ ، ٤) ، (٤ ، ١) ، (٢ ، ٥) ، (٥ ، ٢) ، (٣ ، ٦) ، (٦ ، ٣) ، (١ ، ٦) ، (٦ ، ١)}

∴ ل (هـ) = $\frac{١٦}{٣٦}$ = $\frac{٤}{٩}$

⑥ و = {(٣ ، ١) ، (١ ، ٣) ، (٣ ، ٢) ، (٢ ، ٣) ، (٣ ، ٣) ، (٣ ، ٤) ، (٤ ، ٣) ، (٣ ، ٥) ، (٥ ، ٣) ، (٣ ، ٦) ، (٦ ، ٣)}

∴ ل (و) = $\frac{١١}{٣٦}$

⑦ ن = {(١ ، ٢) ، (١ ، ٤) ، (١ ، ٦) ، (٣ ، ٢) ، (٣ ، ٤) ، (٣ ، ٦) ، (٥ ، ٢) ، (٥ ، ٤) ، (٥ ، ٦)}

∴ ل (ن) = $\frac{٩}{٣٦}$ = $\frac{١}{٤}$

٢٤

ف = {(١ ، ٢) ، (١ ، ٤) ، (١ ، ٥) ، (٣ ، ٢) ، (٣ ، ٤) ، (٣ ، ٥) ، (٦ ، ٢) ، (٦ ، ٤) ، (٦ ، ٥)}

① أ = {(١ ، ٥) ، (٣ ، ٥)} ∴ ل (أ) = $\frac{٢}{٩}$

② ب = {(٣ ، ٤) ، (٣ ، ٥) ، (٦ ، ٢) ، (٦ ، ٤) ، (٦ ، ٥)}

∴ ل (ب) = $\frac{٥}{٩}$

③ حـ = {(١ ، ٥) ، (٣ ، ٥) ، (٦ ، ٢) ، (٦ ، ٤)}

∴ ل (حـ) = $\frac{٤}{٩}$

٢٥

① ∵ ل (أ) = $\frac{١٣}{٢٤}$

، ∵ ل (أ ∪ ب) = ل (أ) + ل (ب) − ل (أ ∩ ب)

∴ $\frac{٥}{٦}$ = $\frac{١٣}{٢٤}$ + $\frac{٥}{١٢}$ − ل (أ ∩ ب)

∴ ل (أ ∩ ب) = $\frac{١}{٨}$

∴ احتمال وقوع الحدثين أ ، ب معًا = $\frac{١}{٨}$

② احتمال وقوع أحد الحدثين دون الآخر

= ل (أ ∪ ب) − ل (أ ∩ ب) = $\frac{٥}{٦}$ − $\frac{١}{٨}$ = $\frac{١٧}{٢٤}$

③ ل (أَ ∪ بَ) = ل (أ ∩ ب)َ = ١ − ل (أ ∩ ب) = $\frac{٧}{٨}$

٢٦

نفرض الهلال «هـ» ، والنجمة «ع»

∴ ل (هـ) = $\frac{٤٠}{٦٠}$ = $\frac{٢}{٣}$ ، ل (ع) = $\frac{٢٨}{٦٠}$ = $\frac{٧}{١٥}$

، ل (هـ ∪ ع)َ = $\frac{٨}{٦٠}$ = $\frac{٢}{١٥}$

① ل (أحد الناديين على الأقل) = ل (هـ ∪ ع)

= ١ − $\frac{٢}{١٥}$ = $\frac{١٣}{١٥}$

② ∵ ل (هـ ∪ ع) = ل (هـ) + ل (ع) − ل (هـ ∩ ع)

∴ $\frac{١٣}{١٥}$ = $\frac{٢}{٣}$ + $\frac{٧}{١٥}$ − ل (هـ ∩ ع)

∴ ل (الناديين معًا) = ل (هـ ∩ ع)

= $\frac{٢}{٣}$ + $\frac{٧}{١٥}$ − $\frac{١٣}{١٥}$ = $\frac{٤}{١٥}$

③ ل (الهلال فقط) = ل (هـ − ع)

= ل (هـ) − ل (هـ ∩ ع) = $\frac{٢}{٣}$ − $\frac{٤}{١٥}$ = $\frac{٢}{٥}$

④ ل (أحد الناديين فقط) = ل (هـ ∪ ع) − ل (هـ ∩ ع)

= $\frac{١٣}{١٥}$ − $\frac{٤}{١٥}$ = $\frac{٣}{٥}$

٢٧

① ل (طالبة) = $\frac{١٠}{٢٥}$ = $\frac{٢}{٥}$

② ل (من القسم العلمى) = $\frac{١١}{٢٥}$

③ ل (طالب من القسم الأدبى) = $\frac{٨}{٢٥}$

④ ل (طالبة أو من القسم الأدبى) = $\frac{١٤ + ٤}{٢٥}$ = $\frac{١٨}{٢٥}$

٢٨

	طارق	زياد	المجموع
بأخطاء	٢٠	٥	٣٥
بلا أخطاء	٧٥ × ٦٠٪ = ٤٥	٢٠	٦٥
المجموع	٧٥	٢٥	١٠٠

① ل (بلا أخطاء) = $\frac{٦٥}{١٠٠}$ = ٠٫٦٥

② ل (زياد) = $\frac{٢٥}{١٠٠}$ = ٠٫٢٥

③ ل (زياد لم يخطئ) = $\frac{٢٠}{١٠٠}$ = ٠٫٢

④ ل (طارق قد أخطأ) = $\frac{٢٠}{١٠٠}$ = ٠٫٢